DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ $\mathbb{R}^2$ И СФЕРЕ S^2

В. А. Галкин
Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация
val-gal@yandex.ru

Аннотация: исследованы условия появления неподвижной точки у идемпотентного непрерывного отображения на плоскости и, как следствие, существование, по крайней мере, двух неподвижных точек для отображений этого класса на двумерной сфере.

Ключевые слова: непрерывные отображения на плоскости, непрерывные отображения на сфере, периодические непрерывные отображения, неподвижные точки.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Для цитирования: Галкин В. А. О неподвижных точках периодических непрерывных отображений на плоскости $\mathbb{R}^2$ и сфере S^2. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):8–10. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1.

ON FIXED POINTS OF PERIODIC CONTINUOUS MAPPINGS TO PLANE $\mathbb{R}^2$ AND SPHERE S^2

V. A. Galkin
Surgut Branch of Federal State Institute "Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences", Surgut, Russian Federation
val-gal@yandex.ru

Abstract: the conditions for the emergence of a fixed point in an idempotent continuous mapping on the plane and, as a consequence, the existence of at least two fixed points for the mappings of this class on the two-dimensional sphere are studied.

Keywords: continuous mappings onto a plane, continuous mappings onto a sphere, periodic continuous mappings, fixed points.

Acknowledgements: this study is the 47 GP government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods.

Cite this article: Galkin V. A. On Fixed Points of Periodic Continuous Mappings to Plane $\mathbb{R}^2$ and Sphere S^2. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):8–10. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-1.

Предметом настоящей статьи является вопрос о существовании неподвижных точек у непрерывного периодического отображения $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ и переносе этого утверждения на двумерную сферу S^2. Ниже рассматривается случай идемпотентных непрерывных отображений на плоскости.

ТЕОРЕМА. *Пусть для непрерывного отображения* $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ *выполнено тождество (условие идемпотентности)* $f^2(x) \equiv x, \forall x \in \mathbb{R}_2$. *Тогда существует, по крайней мере, одна неподвижная точка* $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Доказательство. Отметим, что в силу условия идемпотентности непрерывное отображение $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ является гомеоморфизмом. Выберем произвольную точку $a \in \mathbb{R}_2$ и её образ $f(a)$. Если выполнено равенство $a = f(a)$, то теорема доказана. Поэтому считаем, что $a \neq f(a)$. Рассмотрим отрезок $[a,f(a)]$ и его образ $f([a,f(a)])$. Обозначим интервал $(a,f(a)) = [a,f(a)] \setminus \{a,f(a)\}$ и, соответственно, его образ — $f((a,f(a))$. Возможны два случая взаимного расположения отрезка и его образа.

В первом — $(a,f(a)) \cap f((a,f(a))) = \emptyset$, а во втором — $(a,f(a)) \cap f((a,f(a))) \neq \emptyset$. Отметим, что в последнем случае существует точка $a_1 \in (a,f(a))$, для которой $f(a_1) \in (a,f(a))$. Если для всех точек отрезка $a_1 \in [a,f(a)]$ справедливо соотношение $a_1 \neq f(a_1)$, то можно указать такую точку $\tilde{a} \in [a,f(a)]$, для которой выполнены условия: $f(\tilde{a}) \in (a,f(a))$ и $(\tilde{a},f(\tilde{a})) \cap f((\tilde{a},f(\tilde{a}))) = \emptyset$, т.е. для отрезка $[\tilde{a},f(\tilde{a})]$ имеет место первый случай, который изучим ниже.

Рассмотрим область D на плоскости $\mathbb{R}_2$, ограниченную отрезком $[a,f(a)]$ и его гомеоморфным образом $f([a,f(a)])$. Очевидно, что в данных условиях объединение $\gamma = [a,f(a)] \cup f([a,f(a)])$ гомеоморфно единичной окружности на плоскости. В силу теоремы Жордана (см. [1]) простая кривая γ (т.е. так называемая жорданова кривая) разбивает плоскость $\mathbb{R}_2$ на две связные компоненты и является их общей границей. (Теорема была сформулирована и доказана Камилем Жорданом в 1887 г. Теорема Жордана обобщается по размерности n: любое $(n-1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}_n$, гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две связные компоненты и является их общей границей. При $n = 3$ это утверждение было доказано Лебегом, в общем случае — Брауэром, поэтому при произвольных $n > 3$ теорему Жордана иногда называют теоремой Жордана — Брауэра.)

Важнейшим усилением теоремы Жордана на плоскости $\mathbb{R}_2$ является теорема Шёнфлиса [2], по которой существует гомеоморфизм плоскости в себя, переводящий данную жорданову кривую в окружность. Таким образом, ограниченная компонента в вышеупомянутой теореме Жордана на $\mathbb{R}_2$ гомеоморфна единичному диску, а неограниченная компонента гомеоморфна внешности единичного диска. (Для размерностей $n \geq 3$ это утверждение не справедливо, примером чему является «рогатая сфера Александера» , дающая патологический пример вложения сферы в пространство. Впервые она была описана Джеймсом Александером в 1924 г., см. [5, 6].)

Таким образом, в силу теоремы Шёнфлиса замыкание компактной компоненты $\bar{D}$ плоскости, ограниченное построенной выше жордановой кривой $\gamma = [a,f(a)] \cup f([a,f(a)])$, гомеоморфно замкнутому кругу. Поскольку идемпотентное непрерывное отображение $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ является гомеоморфизмом на плоскости, образ $f(\bar{D})$ является компактом и в силу принципа соответствия границ при гомеоморфных отображениях и теоремы Жордана справедливо равенство $\partial f(\bar{D}) = \gamma$. Очевидно, что точки дополнения $\mathbb{R}_2 \backslash D$ не являются компактом, и, следовательно, значения $f(D) \notin \mathbb{R}_2 \backslash D$, и, значит, $f(\bar{D}) = \bar{D}$. Применяя теорему Брауэра о неподвижной точке [7] для непрерывного отображения $f : \bar{D} \to \bar{D}$, устанавливаем существование неподвижной точки $\bar{x} = f(\bar{x})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть непрерывное идемпотентное отображение двумерной сферы $f : S^2 \to S^2$ не отображает точки сферы на диаметрально им противоположные. Тогда f обладает, по крайней мере, двумя неподвижными точками.

Доказательство этого утверждения является прямым следствием известной теоремы «о еже» и доказанной выше теоремы об идемпотентном непрерывном отображении плоскости.

Вопрос о существовании неподвижных точек у непрерывных преобразований на сфере $f : S^2 \to S^2 \bar{x} = f(\bar{x})$ имеет богатую историю, связанную с так называемой теоремой о «причёсывании ежа», или кратко — с теоремой о «еже», восходящей к работам А.Пуанкаре [3] и Л.Э. Дж. Брауэра [4].

Теорема «о еже», или, как принято в западной литературе, “Hairy Ball Theorem” (см. [7, 8]) — «теорема о волосатом шаре» была впервые сформулирована А. Пуанкаре в 1885 г. В 1912 г. общий случай был исследован голландским математиком Л.Э. Дж. Брауэром [4], который доказал, что теорема Пуанкаре верна не только для двумерной сферы S^2, но и для любой сферы чётной размерности. Утверждение теоремы Пуанкаре состоит в том, что на S^2 не существует непрерывного касательного векторного поля, которое нигде не обращается в ноль и, следовательно, любое непрерывное отображение $f : S^2 \to S^2$ либо имеет неподвижную точку $\bar{x} = f(\bar{x})$, либо отображает некоторую точку сферы на диаметрально ей противоположную. Таким образом, «ежа нельзя причесать»: хоть одна игла будет перпендикулярна поверхности (см. рис. 1 [9]).

Соответственно, здесь каждый вектор поля на сфере представляется как «игла ежа», растущая из каждой точки на сфере — «еже». По этой причине теорема обычно формулируется как «нельзя расчесать волосы на волосатом шаре ровно, не создавая завитка», поскольку процесс расчесывания шара эквивалентен определению векторного поля на его поверхности.

Таким образом, в силу сделанного предположения о том, что точки сферы не отображаются на диаметрально противоположные, обеспечивается наличие, по крайней мере, одной неподвижной точки, которую поместим на северный полюс сферы в точку с координатами (0,0,1) и рассмотрим сте-

Рис. 1. *Иллюстрация к теореме «о еже» [9]*

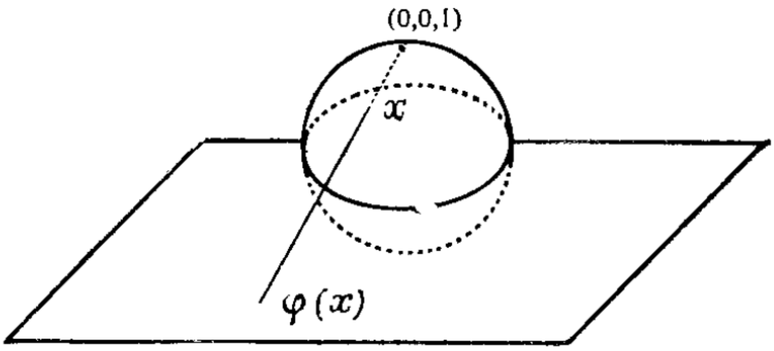

Рис. 2. *Стереографическая проекция φ сферы S^2 на плоскость $\mathbb{R}_2$*

реографическую проекцию $x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}_2, \forall x \in S^2 \backslash (0,0,1)$ сферы с «выколотым северным полюсом» на плоскость (см. рис. 2).

Отображение φ является гомеоморфизмом сферы с выколотым северным полюсом на плоскость $\mathbb{R}_2$. В силу идемпотентности $f : S^2 \to S^2$ суперпозиция $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ является непрерывным идемпотентным отображением плоскости, у которого по доказанной теореме существует неподвижная точка. Тем самым устанавливается существование второй неподвижной точки у отображения $f : S^2 \to S^2$.

В связи с теоремой «о еже» можно указать метеорологическое приложение этой теоремы [10].

Важный класс задач, связанный с наличием периодических точек $\bar{x} = f^N(\bar{x})$, $N > 1$, для непрерывного гомеоморфного отображения сферы $f : S^2 \to S^2$, исследовался С. Смейлом [11].

Отметим, что из доказанного следствия вытекает, что наличие свойства периодичности чётного порядка для непрерывного отображения двумерной сферы, у которого степень, равная половине периода, не отображает точки сферы в диаметрально противоположные, приводит к существованию, по крайней мере, одной неподвижной точки и периодической точки с половинным периодом по отношению к полному периоду отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Жордана теорема. *Математическая энциклопедия*. М.: Советская энциклопедия; 1977–1985.
2. *Теорема Жордана*. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Жордана#cite_note-autogenerated1-1.
3. Poincaré H. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *J. Math. Pures. Appl.* 1885;4(1):167–244.
4. Brouwer L. E. J. Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann*. 1912;71:97–115.
5. Alexander J. W. An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected. Proceedings of the National Academy of Sciences. 1924;10(1):8–10. DOI: 10.1073/pnas.10.1.8.
6. Фукс Д. Рогатая сфера Александера. *Квант*. 1990;6:2–7.
7. Milnor J. Analytic Proofs of the «Hairy Ball Theorem» and the Brouwer Fixed Point Theorem. *The American Mathematical Monthly*. 1978;85(7):521–524.
8. Ioppolo M. The Hairy Ball Theorem. *AfterMath*. 2008;5:3–5.
9. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
10. *Теорема о причёсывании ежа*. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_о_причёсывании_ежа#Формулировка.
11. Смейл С. Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным количеством периодических точек. *Нелинейная динамика*. 2007;3(4):445–446.