

DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5

ИНДУЦИРОВАННОЕ ШУМОМ ПОДАВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ (ФЛАТТЕРА) В МОДЕЛИ КЕЛДЫША**В. П. Кошчев¹, Ю. Н. Штанов²**¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Российская Федерация, koshcheev1@yandex.ru*² *Тюменский индустриальный университет, филиал в г. Сургуте, г. Сургут, Российская Федерация, yuran1987@mail.ru*

Аннотация: построено уравнение эволюции энергии динамической системы (модель Келдыша с одной степенью свободы), которая содержит источник белого шума. Показано, что автоколебания (флаттер) подавляются, если интенсивность белого шума превышает критическое значение.

Ключевые слова: модель Келдыша, предельный цикл, флаттер, вызванное шумом подавление автоколебаний.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00236 а.

Для цитирования: Кошчев В. П., Штанов Ю. Н. Индукцированное шумом подавление автоколебаний (флаттера) в модели Келдыша. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):36–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5.

NOISE SUPPRESSION OF SELF-OSCILLATION (FLUTTER) USING THE KELDYSH MODEL**V. P. Koshcheev¹, Yu. N. Shtanov²**¹ *Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Moscow oblast, Zhukovsky, Russian Federation, koshcheev1@yandex.ru*² *Tyumen Industrial University, Surgut Branch, Surgut, Russian Federation, yuran1987@mail.ru*

Abstract: an equation for the evolution of the dynamic system energy (a single DOF Keldysh model), containing a white noise source is constructed. It is shown that self-oscillations (flutter) are suppressed if the white noise intensity exceeds a threshold value.

Keywords: Keldysh model, limit cycle, flutter, suppression of noise-induced oscillations.

Acknowledgements: this study is supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-07-00236 а.

Cite this article: Koshcheev V. P., Shtanov Yu. N. Noise Suppression of Self-Oscillation (Flutter) Using the Keldysh Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):36–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-5.

Введение

Более семидесяти лет тому назад были построены нелинейные дифференциальные уравнения (модель Келдыша с одной и двумя степенями свободы [1]), автоколебательные решения которых позволили объяснить природу флаттера. Модель Келдыша [1] продолжает привлекать к себе внимание исследователей [2]. Открытым все эти годы оставался вопрос о влиянии шума на модель Келдыша. Подобная задача о влиянии шума на осциллятор Ван дер Поля была решена впервые в [3], на что было обращено внимание в [4]. В [3] было показано, что если интенсивность шума превышает некоторое критическое значение, то автоколебания исчезают. Аналогичный результат был получен в [5] с помощью стохастического уравнения эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6]. В настоящей работе стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6] применено к модели Келдыша с одной степенью свободы, в которую включен аддитивный источник белого шума.

Решение нелинейного дифференциального уравнения в модели Келдыша

Нелинейное дифференциальное уравнение (см., например, модель Келдыша с одной степенью свободы [2]) имеет вид

$$J\ddot{x} + kx = -\mu\dot{x} - (\Phi + \kappa\dot{x}^2) \operatorname{sign} \dot{x}, \quad (1)$$

где константы $J = k = \kappa = 1$, $\mu < 0$, $\Phi > 0$ определены в [2].

Если энергия невозмущенной динамической системы имеет вид

$$E = \frac{J\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (2)$$

то точки поворота траектории имеют вид

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (3)$$

Стохастическое уравнение эволюции энергии динамической системы с одной степенью свободы [6] имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{T} \int_{x_1}^{x_2} (\bar{f} + \delta f) dx, \quad (4)$$

где $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}$ – период колебаний невозмущенной системы; $\bar{f} = -\mu\dot{x} - (\Phi + \kappa\dot{x}^2) \text{sign } \dot{x}$; $\delta f = \sqrt{2D}\xi(t)$; D – интенсивность шума случайного источника; $\xi = \xi(t)$ – случайная величина с единичной дисперсией.

Скорость динамической переменной найдем с помощью (2)

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2E - kx^2}{J}}. \quad (5)$$

С помощью (5) перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{dE}{dt} = \mp (a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + a_2 E^{\frac{3}{2}}) + a_3 E^{\frac{1}{2}} \delta f, \quad (6)$$

где $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\Phi}{\sqrt{J}}$, $a_1 = \frac{\mu}{J} < 0$, $a_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\kappa}{J^{\frac{3}{2}}}$, $a_3 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{J}}$.

Знак минус в правой части уравнения (6) соответствует знаку плюс в формуле (5). Уравнение (6), в котором отсутствует флуктуирующий источник,

$$\frac{dE}{dt} = \mp (a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + a_2 E^{\frac{3}{2}}) \quad (7)$$

имеет три стационарные точки $E = 0$ и

$$\sqrt{E_{1,2}} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}, \quad (8)$$

где дискриминант $a_1^2 - 4a_0 a_2 = \frac{(\mu^2 - \delta_K^2)}{J^2}$; $\delta_K^2 = \frac{128\Phi\kappa}{3\pi^2}$.

Покажем, что при $\delta_K^2 < \mu^2$ динамическая система (модель Келдыша) релаксирует либо к внешнему $\sqrt{E_1}$, либо к внутреннему $\sqrt{E_2}$ предельному циклу в зависимости от знака минус или плюс в уравнении (7).

Решение уравнения (7), в правой части которого стоит знак минус, имеет вид

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2} A \cdot \exp(-t/\tau)}{1 - A \cdot \exp(-t/\tau)}, \quad (9)$$

где $A = \frac{\sqrt{E_0} - \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_0} - \sqrt{E_2}}$; $E_0 = E(t_0 = 0)$ – начальное значение энергии динамической системы (модели Келдыша с одной степенью свободы) в момент времени $t_0 = 0$; время релаксации к стационарному состоянию имеет вид

$$\tau = \frac{2J}{\sqrt{\mu^2 - \delta_K^2}}. \quad (10)$$

Видно, что при $t \gg \tau$ динамическая система (модель Келдыша) релаксирует к внешнему $\sqrt{E_1}$ предельному циклу. Решение для уравнения (7), в правой части которого стоит знак плюс, совпадает формулой (9) при замене $t \rightarrow -t$. Видно, что в этом случае динамическая система (модель Келдыша) релаксирует к внутреннему $\sqrt{E_2}$ предельному циклу.

Результаты расчетов

Стационарное решение уравнения (6), в правой части которого стоит знак минус, построим с помощью (см., например, [7])

$$g(E) = \frac{1}{N\sqrt{E}} \exp \left[- \left(\frac{2a_0 E^{\frac{1}{2}} + a_1 E + \frac{2}{3} a_2 E^{\frac{3}{2}}}{Da_3^2} \right) \right], \quad (11)$$

где N — нормировочный множитель.

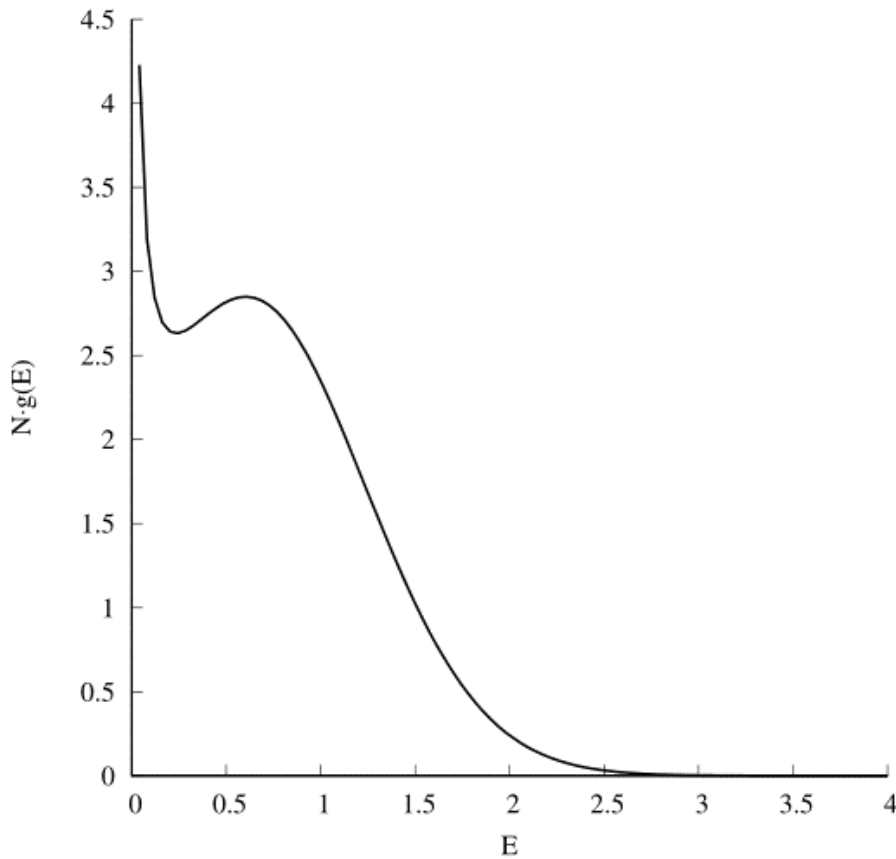


Рис. 1. График плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для значения интенсивности случайного источника $D = 0.2$

График функции (11) плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для двух значений интенсивности случайного источника $D = 0.2$ на рис. 1 и $D = 0.4$ на рис. 2. Константы $J = k = \kappa = 1$; $\mu = -1.2987$; $\Phi = 0.2$ определены в [2].

С помощью формулы (8) можно вычислить $E_1 \approx 0.845$ и $E_2 \approx 0.027$. Радиусы внешнего и внутреннего предельного цикла на рис. 1а в работе [2] близки к значениям $\sqrt{2E_1} \approx 1.303$ и $\sqrt{2E_2} \approx 0.23$, соответственно. Видно, что график функции (11) на рис. 1 достигает максимального значения при энергии динамической системы $E = 0$ и при энергии, которая немного меньше, чем $E_1 \approx 0.845$. Аналогичный результат был получен в [5] при исследовании влияния интенсивности шума на положение максимума плотности вероятности обнаружения динамической системы, которая описывается уравнением Ван дер Поля.

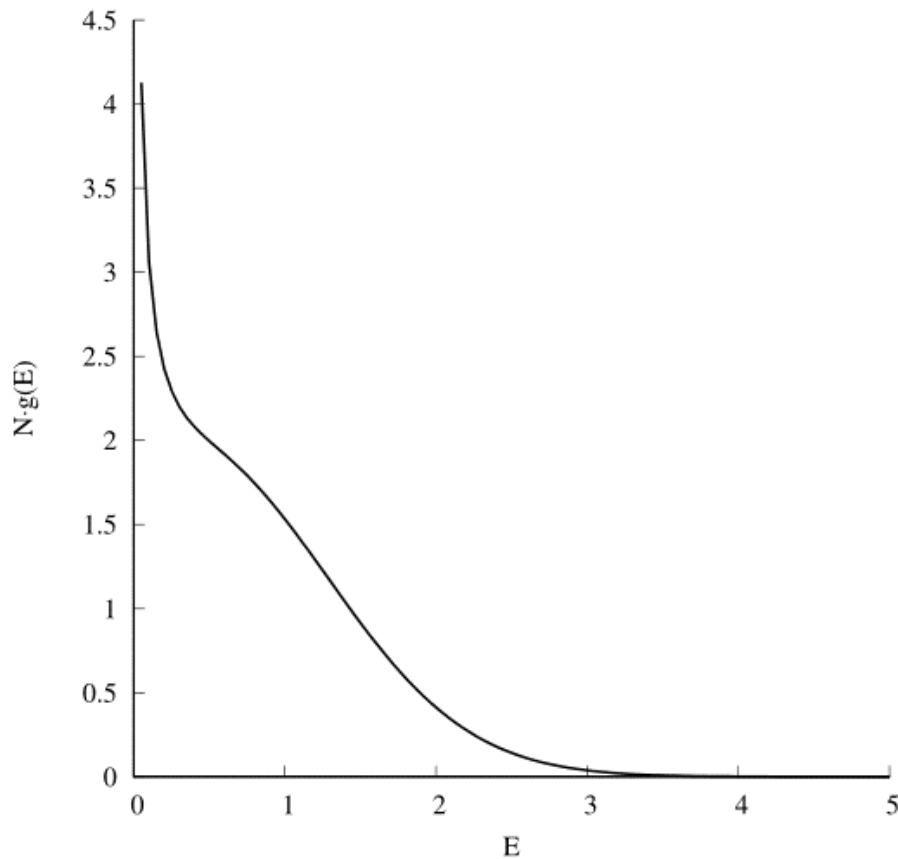


Рис. 2. График плотности вероятности обнаружения динамической системы (модели Келдыша) в зависимости от энергии динамической системы построен для значения интенсивности случайного источника $D = 0.4$

Заключение

Видно, что при $D \geq D_{crit.} \approx 0.4$ автоколебания подавлены, так как исчез максимум функции (11), который описывает плотность вероятности обнаружения динамической системы в окрестности предельного цикла. Динамическая система переходит в квазистационарное состояние покоя, так как автоколебания вновь появятся при уменьшении интенсивности случайного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. О демпферах с нелинейной характеристикой. *Тр. ЦАГИ*. 1944;557:26–37.
2. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В. О подавлении флаттера в модели Келдыша. *ДАН*. 2018;482(1):33–37. DOI: 10.31857/S086956520003130-6.
3. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Воздействие электронных флуктуаций на ламповый генератор. *ЖЭТФ*. 1955;28:509–523.
4. Хорстхемке В., Лефевр Р. *Индукцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии*. М.: Мир; 1987. 400 с.
5. Кощев В. П. Стохастическое уравнение эволюции каналированных частиц. *Письма в ЖТФ*. 2001;27(18):61–64. Режим доступа: <https://journals.ioffe.ru/articles/39235>.
6. Кощев В. П. Индуцированный шумом переход между стационарными состояниями осциллятора Ван дер Поля. *Письма в ЖТФ*. 2014;40(3):64–69. Режим доступа: <https://journals.ioffe.ru/articles/27307>.
7. Гардинер К. В. *Стохастические методы в естественных науках*. М.: Мир; 1986. 538 с.