DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ С ДАННЫМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. Г. Пятков
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Российская Федерация
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7238-9559, s_pyatkov@ugrasu.ru

Аннотация: рассматривается одномерное параболическое уравнение в прямоугольнике $(0,T) \times (a,b)$, на одной из боковых сторон которого заданы данные Коши, а также задано условие Коши в начальный момент времени. Решение этой задачи ищется в пространстве Соболева. Построен класс данных, для которого решение задачи Коши с данными Коши на боковой поверхности прямоугольника существует и единственно. Класс является минимальным, т. е. условия гладкости на данные нельзя ослабить, они необходимы и достаточны для существования решений в данном классе Соболева. Решение является регулярным, это означает, что все производные, входящие в уравнение, принадлежат пространству L_2. Задача сама по себе некорректна по Адамару. Математические модели такого типа возникают при описании процессов тепломассопереноса. Имеется большое количество работ, посвященных задачам такого типа, как в одномерном, так и в многомерном случае. В литературе основное внимание уделено численному решению задачи, поскольку она возникает во многих приложениях. Кроме того, известны теоремы единственности решений, оценки устойчивости решений и теоремы существования решений в классах Хольгрена. Мы немного уточняем последние результаты и получаем теорему существования решений в классах конечной гладкости.

Ключевые слова: обратная задача, данные Коши, начально-краевая задача, существование, тепломассоперенос.

Для цитирования: Пятков С. Г. О разрешимости задачи Коши с данными на боковой поверхности прямоугольника для одномерного параболического уравнения. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6.

CAUCHY PROBLEM SOLVABILITY WITH THE DATA SPECIFIED ON THE RECTANGLE BOUNDARY FOR A ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

S. G. Pyatkov
Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7238-9559, s_pyatkov@ugrasu.ru

Abstract: we consider a one-dimensional parabolic equation in the $(0,T) \times (a,b)$ rectangle. The Cauchy data are specified on one of its lateral sides. The Cauchy condition is also specified at the initial moment. The solution to this problem is sought in the Sobolev space. A data class was constructed for which there is a unique solution to the Cauchy problem with the Cauchy data specified on the lateral side of the rectangle. The class is minimal, i. e., the smoothness conditions applied to the data cannot be weakened. They are necessary and sufficient for the existence of solutions in a given Sobolev class. The solution is regular which means that all derivatives in the equation belong to L_2 space. The problem is ill-posed in the Hadamard sense. Mathematical models of this type arise when describing heat and mass transfer. There are many papers on such problems for both one-dimensional and multidimensional cases. The available sources mostly focus on numerical solutions, since the problem is found in many applications. Besides, there are uniqueness theorems and stability estimates, and existence theorems for solutions in Holmgren's classes. We slightly refined the recent results and obtained an existence theorem for solutions in finite smoothness classes.

Keywords: inverse problem, Cauchy data, initial boundary problem, existence, heat and mass transfer.

Cite this article: Pyatkov S. G. Cauchy Problem Solvability with the Data Specified on the Rectangle Boundary for a One-Dimensional Parabolic Equation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2022;3(2):40–46. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-6.

Введение

Мы рассматриваем вопрос об определении граничных данных вместе с решением в параболическом уравнении:

$$Lu = u_t - L_0u = f(x,t), \quad (x,t) \in G \times (0,T),\, G = (a,b), \tag{1}$$

где $L_0u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$. Уравнение дополняется граничными данными вида:

$$u(0,x) = u_0,\, u(t,a) = \psi_1(t),\; u_x(t,a) = \psi_2(t). \tag{2}$$

Определению подлежат функции u и $u(t,b)$ или $u_x(t,b)$. Математические модели такого типа возникают при описании процессов тепломассопереноса. Имеется большое количество работ, посвященных задачам такого типа, как в одномерном, так и многомерном случае (см. [1, гл. 1, 2; 3, § 8.3]. В литературе основное внимание уделено численному решению задачи, поскольку она некорректна в смысле Адамара ([4, §1.4; 5-8, 10, 11]). Известны также оценки устойчивости и теоремы единственности решений (библиографию и результаты можно найти в [2]. В работе [9] имеется теорема существования решений задачи (1)-(2), где в качестве исходных данных берутся только значения решения и нормальной производной в точке $x = 0$ (т.е. нет начального условия), а также показано, что если коэффициенты уравнения, правая часть и данные принадлежат классу Хольмгрена, то решение такой задачи существует и единственно. Показано также, что если дополнительно задано начальное условие в точке $t = 0$, то возможно определение не только решения, но и одного из коэффициентов уравнения (1). Класс Хольмгрена состоит из функций $u(t,x) \in L_\infty(Q)$ таких, что найдутся постоянные C,M такие, что существуют производные $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ для всех k и $\|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\|_{L_\infty(Q)} \le C(2n)!/M^{2k}$. Возникает вопрос о таком же точном результате, в случае когда коэффициенты и правая часть не являются бесконечно дифференцируемыми. По-видимому, такой результат неизвестен. В работе мы приводим оптимальные условия на данные в этом простом случае.

Определения и вспомогательные утверждения

В работе мы используем пространства Соболева и Гельдера $W_p^s(G)$, $C^\alpha(\overline{G})$ (см. определения в [12, 13]). Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Пусть $(u,v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$. Обозначим через $B_\delta(x_0)$ — шар радиуса δ с центром в точке x_0. Мы также используем анизотропные пространства Соболева $W_p^{s,r}(S) = W_p^s\big(J; L_p(\Gamma)\big) \cap L_p\big(J; W_p^r(\Gamma)\big)$ и Гельдера $C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q})$, $C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{S})$ (см. определения в [12]).

Напомним некоторые свойства преобразования Лапласа $\mathcal{L}(u)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}u(t)\,dt$. Пусть E – гильбертово пространство. Преобразование Лапласа изоморфно отображает пространство Соболева $\tilde{W}_2^s(\mathbb{R}_+; E)$ функций, определенных на $(0,\infty)$, допускающих продолжение нулем при $t < 0$ с сохранением класса, с нормой

$$\big\|e^{-\gamma_0 t}\tilde{u}(t)\big\|_{W_2^s(\mathbb{R};E)} = \big\|u(t)\big\|_{s,\gamma_0},$$

где $\tilde{u}(t)$ — продолжение функции u, определенной при $t \ge 0$, нулем на всю вещественную ось, на пространство E_{s,γ_0} аналитических в области $\operatorname{Re} p > \gamma_0 > 0$ функций с конечной нормой

$$\big\|U(p)\big\|_{s,\gamma_0}^2 = \sup_{\gamma>\gamma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \big\|U(\gamma + i\tau)\big\|_E^2 |\gamma + i\tau|^{2s}\, d\tau. \tag{3}$$

В частности, при $s = 0$ имеем, что норма $\|e^{-\gamma t}u\|_{L_2(0,\infty;E)}$ совпадает с нормой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|U(\gamma + i\tau)\|_E^2\, d\tau. \tag{4}$$

В случае если $E = \mathbb{C}$, или $E = L_2(G)$, или $E = W_2^s(G)$, приведенные выше свойства преобразования Лапласа имеются, например, в [14] (см. теорему 7.1 в случае $E = \mathbb{C}$ и §8 — в остальных случаях). Если $s \ne 1/2$, то нормы $\|e^{-\gamma_0 t}\tilde{u}(t)\|_{W_2^s(\mathbb{R};E)}$ и $\|e^{-\gamma_0 t}u(t)\|_{W_2^s(\mathbb{R}_+;E)}$ эквивалентны (см. [14]).

Предположим, что

$$a \in C^1\big([a,b]\big) \cap W_1^2(a,b),\;\; b \in C\big([a,b]\big) \cap W_1^1(a,b),\;\; c \in L_\infty(a,b). \tag{5}$$

Естественным образом также считаем, что найдутся постоянные $M_1, M_2 > 0$ такие, что $M_1 \leq a(\xi) \leq M_2$ для всех ξ. Далее считаем эти условия на коэффициенты оператора L_0 выполненными, не оговаривая это дополнительно в формулировках утверждений.

Рассмотрим уравнение

$$L_0 u - \lambda u = f(x), \quad |\arg\lambda| \leq \pi - \delta_0, \ \ \delta_0 \in (0,\pi). \tag{7}$$

Положим $r(\xi) = 1/\sqrt{a(\xi)}$. Далее знак $\approx$ в выражении $a(\lambda) \approx b(\lambda)$ означает, что выполнено равенство $a(\lambda) = b(\lambda)\big(1 + O\big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\big)\big)$ при соответствующих параметрах λ.

Лемма 1 ([15, лемма 1]). *Существуют два линейно независимых решения однородного уравнения* (7)*, удовлетворяющие асимптотике*

$$y_1(x) \approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi - \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right),$$

$$y_1'(x) \approx -\sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi - \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right),$$

$$y_2(x) \approx \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi + \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right),$$

$$y_2'(x) \approx \sqrt{\lambda} r(x) \exp\left(\int_a^x r_1(\xi)\,d\xi + \sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right),$$

где $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg\lambda}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$, $\lambda = \sigma + i\gamma$, $r_1(\xi) = \frac{-1}{2}(ar'r - br^2)(\xi)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7). Запишем данные Коши

$$v(a) = v_0, \ v_x(a) = v_1. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть v — решение задачи Коши* (7), (8)*, где $f = 0$. Тогда имеет место представление*

$$v(b) = \frac{v_0}{2}\exp\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi + \int_a^b r_1(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \\ + \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)}\exp\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi + \int_a^b r_1(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{9}$$

$$v'(b) = \frac{\sqrt{\lambda}r(a)v_0}{2}\exp\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi + \int_a^b r_1(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \\ + \frac{v_1}{2}\exp\left(\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi + \int_a^b r_1(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{10}$$

Функция v допускает оценку

$$\sum_{i=0}^{2}\|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda|\|v\|_{L_2(G)} \leq c_0(|\sqrt{\lambda}r(a)v_0| + |v_1|)\exp\left(Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi\right)|\lambda|^{1/4},$$

где c_0 — некоторая постоянная, не зависящая от λ. Если $v_1 = 0$ или $v_0 = 0$, то найдутся постоянные c_i, не зависящие от λ, такие, что

$$c_1\left(\sum_{i=0}^{2}\|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda|\|v\|_{L_2(G)}\right) \leq |\lambda|^{3/4}|v_0|e^{Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi} \leq c_2\left(\sum_{i=0}^{2}\|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda|\|v\|_{L_2(G)}\right), \tag{11}$$

или

$$c_1\left(\sum_{i=0}^{2}\|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda|\|v\|_{L_2(G)}\right) \leq |\lambda|^{1/4}|v_1|e^{Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi} \leq c_2\left(\sum_{i=0}^{2}\|v^{(i)}\|_{L_2(G)} + |\lambda|\|v\|_{L_2(G)}\right). \tag{12}$$

Доказательство. Запишем Вронскиан $W(\xi) = y_1'(\xi)y_2(\xi) - y_1(\xi)y_2'(\xi)$. Используя асимптотику из леммы 1, получим

$$W(x_1) \approx -2\sqrt{\lambda}r(x_1)\exp\left(2\int_a^{x_1} r_1\,d\xi\right). \tag{13}$$

Выпишем представление решения задачи Коши. Решение уравнения (7) представимо в виде

$$v(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

где y_i — решения, определенные в лемме 1. Удовлетворяя данным, получим систему

$$c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = v_0,\ c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) = v_1,$$

решение которой записывается в виде $c_1 = (-y_2'(a)v_0 + y_2(a)v_1)/\Delta$, $c_2 = (y_1'(a)v_0 - y_1(a)v_1)/\Delta$, где $\Delta = W(a)$. Используя асимптотику, получим

$$c_1 = \frac{v_0}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) - \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right),$$
$$c_2 = \frac{v_0}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \frac{v_1}{2\sqrt{\lambda}r(a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right). \tag{14}$$

Тогда решение записывается в виде

$$v(x) = \left(v_0\left(\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda}r(a)}v_1\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\right)\right)e^{\int_a^b r_1(\xi)\,d\xi}. \tag{15}$$

Подставляя здесь $x = b$, мы получим представление (9). Дифференцируя представление решения и используя (14), а также взяв $x = b$, мы придем к (10). Чтобы получить оценку (11), достаточно оценить интегралы $J_1 = \|\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi)\|_{L_2(G)}$, $J_2 = \|\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi)\|_{L_2(G)}$. Они оцениваются одинаково. Например, для первого из них имеем

$$J_1^2 \le \int_a^b e^{2Re\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi}\,dx \le \delta_0\int_a^b e^{2Re\sqrt{\lambda}\int_a^x r(\xi)\,d\xi}r(x)\,dx \le \frac{\delta_0}{2Re\sqrt{\lambda}}e^{2Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)}\,d\xi,$$

где $\delta_0 = \max_{x\in[a,b]}(1/r(x))$. Аналогично,

$$J_2^2 \le \frac{\delta_0}{2Re\sqrt{\lambda}}e^{2Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)}\,d\xi.$$

Из этих неравенств вытекает оценка

$$|\lambda|\|v\|_{L_2(G)} \le c_0(|\sqrt{\lambda}r(a)v_0| + |v_1|)\exp\left(Re\sqrt{\lambda}\int_a^b r(\xi)\,d\xi\right)|\lambda|^{1/4}.$$

Оценка для функций v'', v' вытекает непосредственно из уравнения (7). Таким образом, оценка (11) получена. Оценки (12), (13) также элементарно вытекают из представления (15).

Далее приведем теоремы разрешимости прямой задачи. Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G),\ \ u_0(a)|_\Gamma = \psi_1(0), \tag{16}$$

$$e^{-\lambda t}\psi_2 \in W_2^{1/4}(0,T),\ \ e^{-\lambda t}\psi_1 \in W_2^{3/4}(0,T),\ f(t,x)e^{-\lambda t} \in L_2(Q). \tag{17}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_t - L_0u = f(t,x),\ \ u(0,x) = u_0,\ \ u(t,a) = \psi_1,\ u(t,b) = 0. \tag{18}$$

Следующая теорема имеется в [14] (см. также теорему 8.2 в [17]).

Теорема 1. *Пусть $T = \infty$. Предположим, что выполнено условие* (16). *Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнено условие* (17)*, то существует единственное решение задачи* (18) *со свойством $e^{-\lambda t}u \in W_2^{1,2}(Q)$.*

Если $T < \infty$, тогда можем взять $\lambda_0 = 0$ и теорема может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть $T < \infty$ и выполнены условия* (16), (17) *при $\lambda = 0$. Тогда существует единственное решение задачи* (18) *такое, что $u \in W_2^{1,2}(Q)$.*

Основные результаты

Считаем, что условия (16), (17) выполнены, для некоторого λ такого, что $Re\,\lambda \geq \lambda_0$, где параметр $\lambda_0 \geq 0$ построен в теореме 1. Построим решение w_0 вспомогательной задачи (18) такое, что $e^{-\lambda t}w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$. После замены переменных $w = u - w_0$ мы придем к более простой задаче

$$w_t - L_0 w = 0,\ w(t,a) = 0,\ w_x(t,a) = \psi_2 - w_{0x}(t,a) = \tilde{\psi}_2,\ w|_{t=0} = 0. \tag{19}$$

Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_2(t) = \int_0^t V_\gamma(t-\tau)\psi_{02}(\tau)d\tau,\ e^{-\lambda t}\psi_{02} \in W_2^{1/4}(0,T),\ \gamma = \int_a^b r(\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

где $V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}$. Имеем, что $\mathcal{L}\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda}\gamma}$ (см. лемму 1.6.7 в [18]).

Теорема 3. *Пусть $T = \infty$. Предположим, что выполнено условие* (16). *Тогда найдется $\lambda_0 \geq 0$ такое, что если $\lambda \geq \lambda_0$ и выполнены условия* (17), (20)*, то существует единственное решение задачи* (1), (2) *такое, что $e^{-\lambda t}u \in W_2^{1,2}(Q)$. Справедливы оценки*

$$\|e^{-\lambda t}w\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq C\|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} < \infty.$$

$$\|e^{-\lambda t}w(t,b)\|_{W_2^{3/4}(0,\infty)} + \|e^{-\lambda t}w_x(t,b)\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} \leq C\|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)} < \infty,$$

где w — решение вспомогательной задачи (19). *Если существует решение задачи* (1), (2) *такое, что $e^{-\lambda t}u \in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda \geq \lambda_0$ (где параметр λ_0 определен в теореме* 1)*, то выполнены условия* (16), (17), (20). *Решение u удовлетворяет оценке*

$$\|e^{-\lambda t}u\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c(\|e^{-\lambda t}f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(G)} + \|e^{-\lambda t}\psi_1\|_{W_2^{3/4}(0,\infty)} + \|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)}).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно рассмотреть вспомогательную задачу (19). Применяя преобразование Лапласа к уравнению (19), придем к задаче

$$-L_0\hat{w} + p\hat{w} = 0, Re\,p \geq \lambda_0. \tag{21}$$

$$\hat{w}|_{x=0} = 0, \hat{w}_x|_{x=0} = \mathcal{L}(\tilde{\psi}_2)(p) = \hat{\tilde{\psi}}_2, \tag{22}$$

где постоянная λ_0 взята из теоремы 1. Возьмем $\lambda \geq \lambda_0$. Решение этой задачи существует и единственно, как мы выяснили в лемме 2. Увеличивая λ_0, если необходимо, можем считать, что при $Re\,p \geq \lambda \geq \lambda_0 > 0$ справедливы представления из леммы 1. Получим оценки.

Запишем решение этой задачи

$$v(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где постоянные представлены формулой (14).

Используя лемму 2, а также свойства преобразования Лапласа, имеем

$$\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{W_2^2(G)} + |p|\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{L_2(G)}\,d\xi \leq C\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{\tilde{\psi}}_2(\sigma+i\xi)\|^2|e^{2Re\,\sqrt{p}\gamma}|p|^{1/2}\,d\xi,\ p = \sigma+i\xi.$$

Однако имеем, что

$$\mathcal{L}(\tilde{\psi}_2)(p) = V_\gamma(p)\hat{\psi}_{02} = e^{-\sqrt{p}\gamma}\hat{\psi}_{02}.$$

Тогда из предыдущего неравенства получим

$$\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{W_2^2(G)}+|p|\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{L_2(G)}\,d\xi\le C_1\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{\tilde{\psi}}_{02}(\sigma+i\xi)\|^2|p|^{1/2}\,d\xi.$$

Последнее влечет, что для вектор-функции $\hat{w}$ определено обратное преобразование Лапласа и справедлива оценка

$$\|e^{-\lambda t}w\|_{W_2^{1,2}(Q)}\le C\|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)}<\infty.$$

Получим оценки для следов $w(t,b)$, $w_x(t,b)$. Воспользуемся леммой 2. Как и ранее, имеем

$$\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{w}(t,b)(\sigma+i\xi)|^2|p|^{3/2}+|\hat{w}_x(t,b)|\sigma+i\xi)|^2|p|^{1/2}\,d\xi\le C\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{\tilde{\psi}}_{02}(\sigma+i\xi)\|^2|p|^{1/2}\,d\xi.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|e^{-\lambda t}w(t,b)\|_{W_2^{3/4}(0,\infty)}+\|e^{-\lambda t}w_x(t,b)\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)}\le C\|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,\infty)}<\infty.$$

Получим утверждение в обратную сторону. Пусть существует решение задачи (1), (2) такое, что $e^{-\lambda t}u\in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda\ge\lambda_0$. Условия (16), (17) вытекают из стандартных теорем вложения (см. §8 в [14]). Построим решение w_0, $e^{-\lambda t}w_0\in W_2^{1,2}(Q)$. Покажем, что функция $\tilde{\psi}_2$ допускает представление (20). Рассмотрим вспомогательную задачу (19). В соответствии с теоремой 1 функция w_0 обладает свойством $e^{-\lambda t}w_0\in W_2^{1,2}(Q)$. Тогда и $e^{-\lambda t}w\in W_2^{1,2}(Q)$. Применяя преобразование Лапласа, придем к задаче (21), (22). Но тогда в силу леммы 2 имеем оценку

$$\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{\tilde{\psi}}_2(\sigma+i\xi)\|^2e^{2Re\sqrt{p}\gamma}|p|^{1/2}\,d\xi\le c\sup_{\sigma>\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{W_2^2(G)}+|p|\|\hat{w}(\sigma+i\xi)\|^2_{L_2(G)}\,d\xi<\infty.$$

Таким образом, определено обратное преобразование Лапласа от функции $\hat{\psi}_{02}=\hat{\tilde{\psi}}_2(\sigma+i\xi)e^{\sqrt{p}\gamma}$, причем сама функция ψ_{02} обладает свойством $e^{-\lambda t}\psi_{02}\in W_2^{1/4}(0,\infty)$. Тогда имеем равенство $\hat{\psi}_2=e^{-\sqrt{p}\gamma}\hat{\psi}_{02}$. Откуда и вытекает представление (20).

В случае конечного промежутка $(0,T)$ теорема 3 переформулируется в следующем виде.

Теорема 4. *Пусть $T<\infty$. Предположим, что выполнено условие* (16), (17), (20)*, где $\lambda_0=0$. Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2) *такое, что $u\in W_2^{1,2}(Q)$. Справедливы оценки*

$$\|w\|_{W_2^{1,2}(Q)}\le C\|\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)}<\infty.$$

$$\|w(t,b)\|_{W_2^{3/4}(0,T)}+\|e^{-\lambda t}w_x(t,b)\|_{W_2^{1/4}(0,T)}\le C\|e^{-\lambda t}\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)}<\infty.$$

Если существует решение задачи (1), (2) *такое, что $e^{-\lambda t}u\in W_2^{1,2}(Q)$ для некоторого $\lambda\ge\lambda_0$ (где параметр λ_0 определен в теореме* 1*), то выполнены условия* (16), (17), (20)*. Решение и удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)}\le c(\|f\|_{L_2(Q)}+\|u_0\|_{W_2^1(G)}+\|\psi_1\|_{W_2^{3/4}(0,T)}+\|\psi_{02}\|_{W_2^{1/4}(0,T)}).$$

Доказательство. Рассмотрим представление (20). Продолжим функцию ψ_{02} на весь интервал $(0,\infty)$ с сохранением класса как функцию с компактным носителем (например, нулем) и определим соответствующую функцию ψ_2 . Как и ранее, решаем вспомогательную задачу (19). Все условия теоремы 3 выполнены. Применяя теорему 3, получим, что решение существует. Мы тем самым построим решение вспомогательной задачи на $(0,\infty)$, его сужение на промежуток $[0,T]$ даст нам искомое решение вспомогательной задачи. Единственность решений вытекает из стандартных теорем, например, мы можем сослаться на [19] (теорема 2).

Замечание 1. В качестве вспомогательной задачи при построении функции w_0 мы можем рассматривать любую корректную краевую задачу. Естественным образом при этом изменится условие (20). Например, мы можем взять в качестве функции w_0 решение задачи

$$u_t-L_0u=f(t,x),\quad u(0,x)=u_0,\ \ u_x(t,a)=\psi_2,\ u(t,b)=0. \tag{23}$$

Тогда вместо функции ψ_2 возникнет дополнительное условие на функцию ψ_1, поскольку задача (19) перейдет в задачу

$$w_t-L_0w=0,\ w(t,a)=0,\ w(t,a)=\psi_1-w_0(t,a)=\tilde{\psi}_1,\ \ w_x|_{t=0}=0. \tag{24}$$

Оно будет иметь аналогичный характер, т. е. должно иметь место представление (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988.
2. Klibanov M. V., Li J. *Inverse Problems and Carleman Estimates.* Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH; 2021.
3. Kabanikhin S. I. *Inverse and Ill-Posed Problems.* Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH; 2012.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики.* Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ; 2009.
5. Tabarintseva E. V. Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation. *Numerical Analysis and Applications*. 2018;11:236–255.
6. Табаринцева Е. В., Менихес Л. Д., Дрозин А. Д. О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения методом квазиобращения. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика.* 2012;11:8–13.
7. Табаринцева Е. В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения. *Сибирский журнал вычислительной математики.* 2018;21(3):293–303.
8. Hao D. N., Schneiders A., Reinhardt H.-J. Regularization of a Non-Characteristic Cauchy Problem for a Parabolic Equation. *Inverse Problems*. 1999;11(6):1247.
9. Hao D. N., Reinhardt H. J. Recent Contributions to Linear Inverse Heat Conduction Problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems*. 1996;4:23–32.
10. Jonas P., Louis A. K. Approximate Inverse for a One-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems.* 2000;16:175–185.
11. Chapko R., Johansson B. T. A Boundary Integral Equation Method for Numerical Solution of Parabolic and Hyperbolic Cauchy Problems. *Applied Numerical Mathematics. 2018;129:104–119.*
12. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука; 1967.
13. Triebel H. *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; 1978.
14. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *УМН.* 1964;19:53–161.
15. Неустроева Л. В., Пятков С. Г. О некоторых классах обратных задач об определении функции источников. *Математические заметки СВФУ.* 2020;27(1):21–40.
16. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука; 1969.
17. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type. *Mem. Amer. Math. Soc.*; 2003;166.
18. Arendt W., Batty C. J. K., Neubrander F., Hieber M. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Berlin: Springer Basel AG; 2011.
19. Fernandez F. J. Unique Continuation for Parabolic Operators. II, *Communications in Partial Differential Equations*. 2003;28(9-10):1597–1604.