

DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-02

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗМА ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Д. В. Горбунов^{1,a}, Т. В. Гавриленко^{1,2,b}

¹ Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация

² Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

г. Москва, Российская Федерация

^a ✉ Gorbunov.dv@mail.ru, ^b taras.gavrilenko@gmail.com

Аннотация: в работе рассматривается задача математического моделирования функциональных систем организма человека в рамках исследований динамики изменения параметров подсистем с хаотической, самоорганизующейся структурой. Данная задача является актуальной ввиду необходимости изучения взаимодействия подсистем сложной системы организма человека, в том числе поиска причин возникновения патологических процессов. Разработанные методы математического моделирования на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью позволяют учитывать процесс самоорганизации динамических подсистем. Задача удержания стационарного состояния базируется на приближении решений к уникальной линии разрыва системы, что позволяет эффективно воспроизводить динамику подсистемы организма человека. В свою очередь, линия разрыва генерируется в процессе моделирования и корректируется в зависимости от текущего состояния подсистемы и стационарного состояния, что существенно приближает к динамике реальной живой системы. Также в работе представлены результаты применения метода математического моделирования на примере работы биомеханической системы человека (частный случай). Апробация показала высокую адекватность метода математического моделирования и эффективность численного решения на основе сравнительного анализа результатов моделирования и данных натуральных экспериментов. Результаты расчетов динамики движений биомеханической системы показали устойчивость на серии вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: математическое моделирование, биомеханическая система, самоорганизация, хаотическая динамика.

Для цитирования: Горбунов Д. В., Гавриленко Т. В. Математическое моделирование динамических процессов организма человека на основе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. *Успехи кибернетики*. 2023;4(1):15–20. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-02.

Поступила в редакцию: 02.02.2023.

В окончательном варианте: 22.02.2023.

SIMULATION OF DYNAMIC PROCESSES IN THE HUMAN BODY USING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

D. V. Gorbunov^{1,a}, T. V. Gavrilenko^{1,2,b}

¹ Surgut State University, Surgut, Russian Federation

² Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation

^a ✉ Gorbunov.dv@mail.ru, ^b taras.gavrilenko@gmail.com

Abstract: this study considers the simulation of the human body’s functional systems as part of the research into the parameter variation dynamics in subsystems with a chaotic, self-organizing structure. The problem is significant as we need to study the interaction between the subsystems of a complex system, the human body, and find the causes of pathologies. The proposed simulation method uses differential equations with a discontinuous right-hand side. It enables us to account for self-organization in dynamic subsystems. The stationary state is maintained as the solution approaches a unique discontinuity line in the system, as it correctly reproduces the dynamics of a subsystem in the human body. The discontinuity line is generated during the simulation and adjusted to match the current state of the subsystem and the stationary state, which is a much better representation of the dynamics of a real living system. The paper includes the simulation

results of a human biomechanical system (a special case). The tests proved the simulation results are in good agreement with the experiments. The biomechanical system motion simulation results show stability in a series of computational experiments.

Keywords: simulation, biomechanical system, self-organization, chaotic dynamics.

Cite this article: Gorbunov D. V., Gavrilenko T. V. Simulation of Dynamic Processes in the Human Body using Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(1):15–20. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-02.

Original article submitted: 02.02.2023.

Revision submitted: 22.02.2023.

Введение

Ввиду того, что были установлены некоторые особенности работы функциональных систем организма человека [1–3], открывается возможность применения теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [4] для осуществления моделирования изменения тех или иных параметров. Решение подобных уравнений может быть определено с помощью предельного перехода с учетом физического смысла рассматриваемой задачи [5–8]. Известно, что динамика параметров функциональных систем организма человека ведет себя непредсказуемо с позиций математической статистики. Можно полагать, что эта хаотическая динамика связана с разрывной правой частью по x , по аналогии с поиском решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для понимания решения подобных уравнений необходимо рассмотреть их связь с дифференциальным включением.

Основные положения метода математического моделирования из теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

Для начала необходимо установить связь математического моделирования функциональных систем организма человека с теорией дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для этого рассмотрим уравнение или систему уравнений в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1)$$

Здесь функция f является кусочно непрерывной в области G ; $x \in R^n$. В этом случае большинство определений решения можно получить следующим образом: каждой точке (t, x) области G соответствует множество $F(t, x)$ в n -мерном пространстве; если в конкретной точке (t, x) функция $f(t, x)$ непрерывна, то $F(t, x)$ содержит одну точку, эквивалентную функции f в этой точке; если точка (t, x) является точкой разрыва функции $f(t, x)$, то $F(t, x)$ должно задаваться тем или иным способом. Соответственно, решение уравнения (1) называется решением дифференциального включения и имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (2)$$

Таким образом, абсолютно непрерывная функция $x(t)$ определена на интервале или отрезке l , для которого почти всюду на l $dx(t)/dt \in F(t, x(t))$.

Неоспоримый интерес вызывают способы доопределения $F(t, x)$ в точках разрыва функции f , при которых дифференциальное включение (2) применимо для приближенного описания процессов в реальных физических системах. Приближение должно осуществляться в достаточно малой δ -окрестности множества точек разрыва функции f , тогда систему можно описать с помощью уравнений или системы (1).

А. Ф. Филиппов отмечал, что для построения множества $F(t, x)$ необходимо обладать некоторыми сведениями о поведении физической системы в δ -окрестности. Соответственно, для того чтобы осуществить переход к математическому описанию с помощью дифференциального включения (2) физической системы, необходимо продемонстрировать, что при достаточно малых δ движение физической системы сколь угодно близко к некоторому решению (2).

Способ простейшего доопределения правой части применим к системе с малым запаздыванием. В этой связи стоит обратить внимание на процесс самоорганизации биосистем. По сути, задача удержания некоторых внутренних градиентов ∇b (температура тела, тремор, теппинг, положение стоя или сидя) является процессом с запаздыванием. Проявления запаздывания заключаются в следующем:

если ∇b отклоняется на $x > \delta$, то включается механизм регуляции для того, чтобы вернуть этот ∇b в условно исходное положение. На примере из биомеханики в этом контексте положение конечности в пространстве можно рассматривать как нахождение системы в некоторой ∇ -окрестности, и при приближении к границе ∇ или выходе за пределы ∇ биосистема прилагает некоторые действия, чтобы вернуть биосистему в эту ∇ -окрестность. Какие именно действия предпринимает система, заранее неизвестно по аналогии с поиском решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью, когда неизвестно, как продолжится решение при нахождении на линиях или плоскостях S_i разрыва. Наиболее подходящий подход к решению дифференциальных уравнений с разрывной правой частью для биосистем — это простейшее выпуклое доопределение.

Математическое моделирование функциональных систем организма человека

Изучение теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью позволило сформировать формализованный математический аппарат описания динамики поведения любых функциональных систем организма (ФСО) человека. Таким образом, на основе вышеизложенного, механизм регуляции ∇b ФСО человека внутри некоторой δ -окрестности представлен системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)), \tag{3}$$

где $u_i(t, x)$ — независимые части биологической системы, которые могут независимо пробегать множества $U_i(t, x)$. Также необходимо наложить следующее ограничение: пусть физическая система вне δ -окрестности M^δ некоторого множества M , на которой функции уравнений (3) разрывны, $x(t)$ должна удовлетворять уравнению (3), а в самой окрестности при почти всех t должно выполняться неравенство:

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} - f(t, q(t)) \right| \leq \delta, \tag{4}$$

где $q(t)$ — любая функция из M^δ , которая находится на расстоянии, не большем δ , от областей непрерывности G_i, G_j, G_k, \dots . Движение системы может осуществляться по любому из законов (в зависимости от ФСО и известных сведений о процессах в этой ФСО):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_i(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)) \\ \frac{dx}{dt} &= f_g(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)) \\ \frac{dx}{dt} &= f_k(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)) \\ &\dots \end{aligned} \tag{5}$$

В случае математического описания процессов работы ФСО человека необходимо учесть и тот факт, что некоторые параметры $u_1(t, x), \dots, u_r(t, x)$ в процессе самоорганизации удержания ∇b в определенной δ -окрестности могут независимо пробегать соответственные множества $U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)$. Тогда пусть:

$$F_1(t, x) = f(t, x, U_1(t, x), \dots, U_r(t, x)) \tag{6}$$

является множеством значений функции $f(t, x, u_1(t, x), \dots, u_r(t, x))$, когда t и x постоянны. Решением дифференциального уравнения (3) называются решения дифференциального включения $dx/dt \in F(t, x)$, где $F(t, x) \equiv F_1(t, x)$. Таким образом, система дифференциальных уравнений (3) способна описать динамику удержания внутренних градиентов ∇b внутри некоторой δ -окрестности, которая представляет собой некоторое стационарное состояние. Соответственно, уравнение (3) является формализованным математическим аппаратом описания динамики поведения тех или иных параметров ФСО человека по некоторым известным процессам в реальных биосистемах.

Математическое моделирование на примере биомеханической системы человека

На основании вышеизложенного математическая модель динамики движений биомеханической системы человека имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & f(t, x, u_1^{br}(t, x), u_2^{br}(t, x), u_1^{ibr}(t, x, Q^+(t, x)), u_2^{ibr}(t, x, Q^-(t, x)), u_{tr}(t, x, Qq(t, x)), \\ & u_{1,o}^+(x, t, m_{1,o}^+(t, x), t_{se}^+(t, x)), u_{2,\omega}^+(x, t, m_{2,\omega}^+(t, x), t_{ak}^+(t, x)), u_{3,s}^+(x, t, m_{3,s}^+(t, x), t_{lj}^+(t, x)), \\ & u_{1,o}^-(x, t, m_{1,o}^-(t, x), t_{se}^-(t, x)), u_{2,\omega}^-(x, t, m_{2,\omega}^-(t, x), t_{ak}^-(t, x)), u_{3,s}^-(x, t, m_{3,s}^-(t, x), t_{lj}^-(t, x))), \end{aligned} \quad (7)$$

где o, ω, s — количество мышечных волокон определенного типа, $u_1^{br}(t, x), u_2^{br}(t, x)$ осуществляют установку верхней и нижней границы, являются непрерывными и пробегают множества $U_1^{br}(t, x), U_2^{br}(t, x)$. Особое внимание необходимо обратить на функции $u_1^{ibr}(t, x, Q^+(t, x)), u_2^{ibr}(t, x, Q^-(t, x))$, отвечающие за формирование коридора, в котором генерируется линия разрыва (траектория движения), при ее пересечении происходит переключение работы мышечных пучков. Эти функции являются разрывными и пробегают соответствующие множества $U_1^{ibr}(t, x, QQ^B), U_2^{ibr}(t, x, QQ^H)$. Соответственно, формирование траектории линии разрыва для воспроизведения динамики произвольных и непроизвольных движений осуществляется на основе функции $u_{tr}(t, x, Qq(t, x))$, где $Qq(t, x)$ пробегает множество $QQq(QQ^H, QQ^B)$, а решение u_{tr} пробегает множество $U_{tr}(t, x, QQq)$. Далее необходимо детально рассмотреть реализации работы мышечных волокон в системе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Таким образом, $u_{1,o}^+(x, t, m_{1,o}^+(t, x), t_{se}^+(x, t))$ осуществляет контроль работы мышечных волокон одного типа (всего в модели присутствуют 3 типа мышечных волокон, как и в мышечных пучках). Функция $t_{se}^+(x, t)$ отвечает за величину потенциала мышечного волокна и пробегает множество $T_{se}^+(x_{se}, y_{se})$, а решение для функции $m_{1,o}^+(t, x)$ записывается в виде $U_{1,o}^+(x, t, M_{1,o}^+, T_{se}^+)$.

Решением системы дифференциальных уравнений (7) называется дифференциальное включение:

$$\begin{aligned} F_1(t, x) = & f(t, x, U_1^{br}, U_2^{br}, U_1^{ibr}, U_2^{ibr}, U_{tr}(t, x, QQq), U_{1,o}^+(t, x, M_{1,o}^+, T_{se}^+), \\ & U_{2,\omega}^+(t, x, M_{2,\omega}^+, T_{ak}^+), U_{3,s}^+(t, x, M_{3,s}^+, T_{lj}^+), U_{1,o}^-(t, x, M_{1,o}^-, T_{se}^-), \\ & U_{2,\omega}^-(t, x, M_{2,\omega}^-, T_{ak}^-), U_{3,s}^-(t, x, M_{3,s}^-, T_{lj}^-)). \end{aligned} \quad (8)$$

Стоит отметить, что механизм генерации уровня удержания позиции для произвольных и непроизвольных движений существенно отличается тем, что при моделировании произвольных движений необходимы дополнительные условия движения траектории уровня удержания позиции. Такой подход обусловлен тем, что несмотря на то, что произвольные движения управляются сознанием человека, в динамике поведения параметров теппинграм все равно наблюдается проявление особого хаоса. На основе полученных определенного рода закономерностей в области изучения произвольных движений [1–3] был разработан математический аппарат [9], который позволяет, с одной стороны, задавать однозначную траекторию движения, а с другой стороны — вносить хаос в эту траекторию.

Согласно представленной математической модели был разработан алгоритм для моделирования непроизвольных движений. Алгоритм для моделирования произвольных движений существенно отличается только частью генерации траектории движения. Для генерации случайных чисел был выбран алгоритм вихрь Мерсенна [10].

Результатами работы математической модели являются выборки, полученные в режиме реального времени. Пример временной развертки реальной выборки треморограммы представлен на рис. I-a, модельной выборки — на рис. I-b. Также на рис. II-a представлена временная развертка экспериментальной теппинграммы и на рис. II-b — временная развертка модельной теппинграммы.

Сравнительный анализ результатов моделирования с данными натуральных экспериментов

При изучении экспериментальных данных использовался метод расчета энтропии Шеннона в рамках термодинамики неравновесных систем И.Р. Пригожина [11]. В соответствии с этим для модельных данных также производился расчет параметров энтропии Шеннона. Результат расчета энтропии H представлен в таблице.

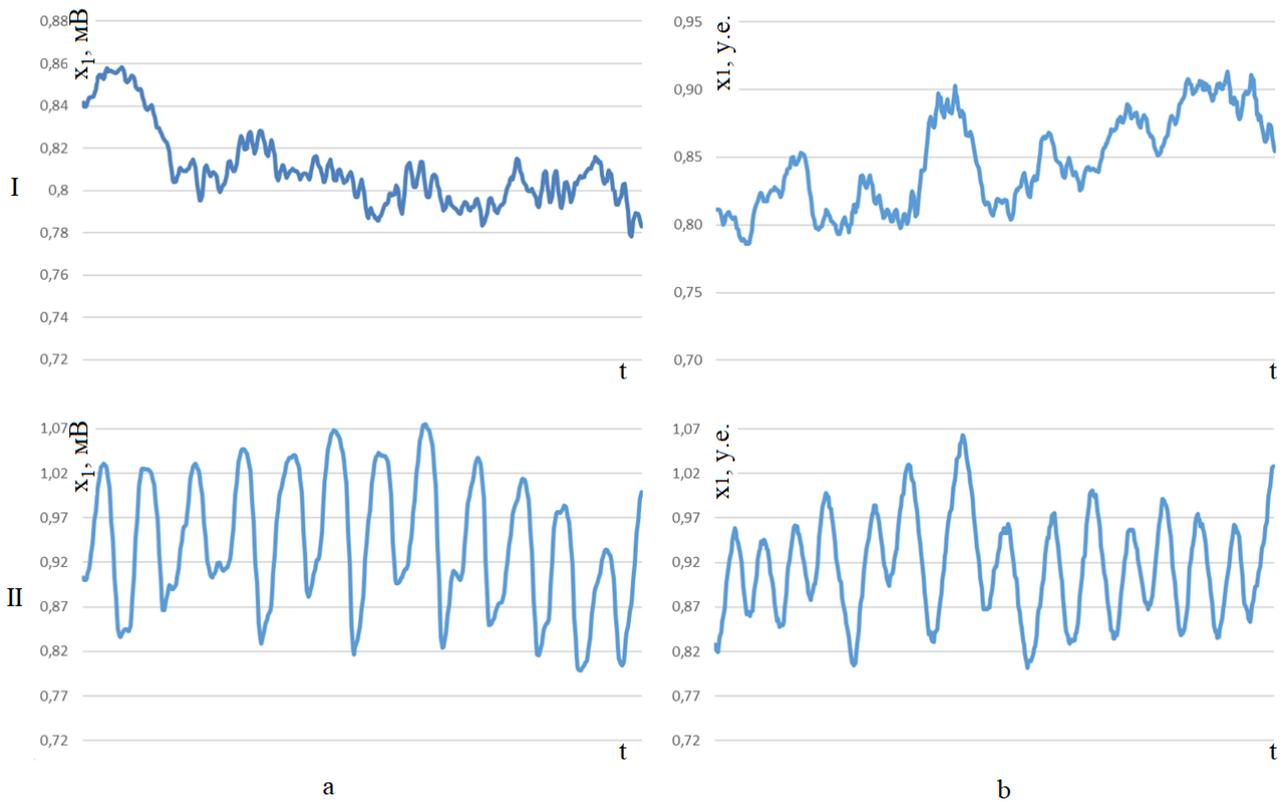


Рис. Временная развертка произвольных (I) и регулярных (II) движений: а – экспериментальные выборки; б – модельные выборки

Таблица

Значения энтропии Шеннона для экспериментальных H_e и модельных H_m выборок треморограмм при разном числе разбиений выборок на интервалы

	10		20		50		200		1000	
	H_e^{10}	H_m^{10}	H_e^{20}	H_m^{20}	H_e^{50}	H_m^{50}	H_e^{200}	H_m^{200}	H_e^{1000}	H_m^{1000}
1	2,8868	2,9867	3,8132	3,9421	5,0835	5,2182	6,7646	6,9832	6,9410	7,3952
2	3,0425	2,8654	4,0229	3,7949	5,2693	5,0467	6,9018	6,8075	7,0208	7,1888
3	2,7321	3,2107	3,6568	4,1708	4,9041	5,4271	6,5162	7,1913	7,3772	6,8097
4	3,1180	3,2027	4,0734	4,1849	5,3210	5,4442	7,0323	7,2072	6,6563	7,0716
5	3,0751	2,7724	4,0426	3,7140	5,2916	4,9792	6,9251	6,7476	6,3147	7,1573
6	2,8706	3,1459	3,8130	4,1123	5,0185	5,3983	6,7000	7,0733	7,3688	6,8923
7	3,1597	3,0152	4,0983	3,8843	5,3572	5,1557	6,9394	6,8843	7,3281	7,3960
8	3,0608	3,1524	4,0461	4,0814	5,2965	5,3559	6,9176	7,0952	6,6264	7,4352
9	2,5216	3,1680	3,4760	4,1472	4,7719	5,4255	6,4352	7,1716	6,4265	6,5857
10	2,5127	3,0031	3,4578	3,9522	4,6856	5,2281	6,3482	7,0220	6,7985	6,5579
11	2,9041	3,2195	3,8640	4,1887	5,1332	5,4458	6,7729	7,2263	7,3891	7,3033
12	3,0576	3,1672	4,0245	4,1473	5,2415	5,4324	6,8006	7,1967	6,5725	7,2281
13	3,1181	3,0361	4,0772	4,0088	5,3118	5,2759	6,8111	6,9864	6,5124	6,8183
14	3,0862	3,0361	4,0530	4,0184	5,3160	5,2843	6,8096	7,0245	7,3857	6,8024
15	2,9503	3,1397	3,8866	4,0735	5,1524	5,3143	6,7208	7,0601	6,6119	7,1486
$\langle E \rangle$	2,9397	3,0747	3,8937	4,0280	5,1436	5,2955	6,7597	7,0451	6,8887	7,0527
	уровень значимости $p_1 = 0,09$		уровень значимости $p_2 = 0,13$		уровень значимости $p_3 = 0,09$		уровень значимости $p_4 = 0,01$		уровень значимости $p_5 = 0,23$	

Исследование энтропии Шеннона на стадии расчета самого значения H не закончено. Был выполнен дополнительный анализ с использованием математической статистики. В качестве статистического анализа производилось парное сравнение реальных выборок треморограмм, полученных от испытуемых, и модельных выборок симуляционной модели. При таком сравнении было установлено, что динамика энтропии статистически не имеет различий. Уровень значимости в подавляющем большинстве (более 95 %) пар (реальная выборка — модельная выборка) больше $p = 0.05$, что дает основания сделать вывод о том, что такая пара принадлежит некоторой одной генеральной совокупности. Такая динамика поведения энтропии H подтверждает высокий уровень адекватности симуляционной модели. Подобная динамика поведения значений энтропии Шеннона H наблюдается и для модельных теппинграмм.

Заключение

Реализованный метод математического моделирования позволяет более эффективно воспроизводить реальную динамику движений биомеханической системы организма человека. Объективная оценка результатов на основе математической статистики и на основе термодинамике неравновесных систем продемонстрировала высокую адекватность модельных данных при сравнении экспериментальных и модельных выборок как треморограмм, так и теппинграмм. Результаты математического моделирования, как и реальные выборки, подчиняются доказанной гипотезе Н.А. Бернштейна «повторение без повторений». Следует отметить, что если жестко зафиксировать начальные параметры модели x_0 (что в живых системах невозможно), крайне маловероятно повторение некоторого промежуточного состояния x_n моделируемого процесса и тем более — конечного состояния x_k . Разработанная математическая модель может быть применена в исследовании патологических процессов, т.е. моделировании и нахождении закономерности в динамике движений биомеханической системы при различных внешних воздействиях, отслеживании проявлений некоторых генерализаций, которые могут привести к развитию патологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еськов В. М., Еськов В. В., Гавриленко Т. В. и др. Формализация эффекта «повторение без повторения» Н.А. Бернштейна. *Биофизика*. 2017;62(1):168–176.
2. Берестин Д. К. Изменение квазиаттракторов треморограмм испытуемых в условиях гипотермии. *Сложность. Разум. Постнеклассика*. 2018;4:76–84.
3. Бетелин В. Б., Еськов В. М., Галкин В. А. и др. Стохастическая неустойчивость в динамике поведения сложных гомеостатических систем. *Доклады Академии наук*. 2017;472(6):642–644. DOI: 10.7868/S0869565217060044.
4. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. *Матем. сб.* 1960;51(1):99–128.
5. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Математические и вычислительные проблемы, связанные с образованием структур в сложных системах. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022;14(4):805–815.
6. Галкин В. А., Дубовик А. О. *Интеграл Лебега. сходимости численных методов решения систем дифференциальных уравнений*. Сургут: Сургутский государственный университет; 2021.
7. Галкин В. А., Дубовик А. О. *Теория меры. Сходимости численных методов решения законов сохранения*. Сургут: Сургутский государственный университет; 2021.
8. Галкин В. А. О неподвижных точках периодических непрерывных отображений на плоскости R^2 и сфере S^2 . *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):8–10.
9. Горбунов Д. В. Симуляционное моделирование произвольных движений человека. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2019;29(4):67–76. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-67-76.
10. Nishimura T. Tables of 64-bit Mersenne Twisters. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*. 2000;10(4):234–357.
11. Prigogine I. R. *The End of Certainty, Time, Chaos and the New Laws of Nature*. The Free Press: New York; 1997.