

DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-04

НЕСКОЛЬКО ПОДХОДОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЭПИДЕМИИ

В. С. Петракова^{1,a}, О. И. Криворотко^{2,3,b}¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Российская Федерация² Институт вычислительной математики и математической геофизики, г. Новосибирск, Российская Федерация³ Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1126-2148>,  vika-svetlakova@yandex.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0125-4988>, krivorotko.olya@mail.ru

Аннотация: в статье предлагаются две модели, описывающие влияние динамики распространения вируса на такие макроэкономические показатели, как численность рабочей силы и уровень среднедушевого дохода населения. Первая предложенная модель объединяет камерный подход SIR к моделированию распространения эпидемий и урбанистическую модель Лотки-Вольтерры. Вторая обобщает предложенную дифференциальную модель на задачу оптимального управления. Приведено сравнение результатов моделирования между собой и реальными данными на примере Новосибирской области за 2020–2021 гг. Для модели оптимального управления предложено несколько сценариев, которые могут быть использованы при расширении модели для моделирования отличной от рассматриваемой экономико-эпидемиологической ситуации.

Ключевые слова: COVID-19, макроэкономика, эпидемия, задачи оптимального управления.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10044-П).

Для цитирования: Петракова В. С., Криворотко О. И. Несколько подходов к моделированию динамики доходов населения в условиях эпидемии. *Успехи кибернетики*. 2023;4(1):24–32. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-04.

Поступила в редакцию: 02.12.2022.

В окончательном варианте: 20.02.2023.

APPROACHES TO THE SIMULATION OF PERSONAL INCOME VARIATIONS DURING EPIDEMICS

V. S. Petrakova^{1,a}, O. I. Krivorotko^{2,3,b}¹ Institute of Computational Modeling, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russian Federation² Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Novosibirsk, Russian Federation³ Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1126-2148>,  vika-svetlakova@yandex.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0125-4988>, krivorotko.olya@mail.ru

Abstract: this study proposes two models representing the impact of the virus spread on such macroeconomic metrics as the labor force size and per capita income. The first model combines the SIR compartmental epidemics modeling and the Lotka-Volterra model. The second one extends the proposed differential model to the optimal control problem. The simulation results are compared with each other and real-world data for the Novosibirsk Region, 2020–2021. We used several scenarios for the optimal control model to further expand the model to other economic and epidemiological conditions.

Keywords: COVID-19, macroeconomics, epidemics, optimal control problems.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10044).

Cite this article: Petrakova V. S., Krivorotko O. I. Approaches to the Simulation of Personal Income Variations During Epidemics. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(1):24–32. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-1-04.

Original article submitted: 02.12.2022.

Revision submitted: 20.02.2023.

Введение

Масштабные эпидемии инфекционных заболеваний приводят к спаду экономической активности в исследуемом регионе за счет вводимых ограничительных мер правительственными структурами, а также к снижению количества рабочей силы. При этом дестабилизация экономики региона влияет на общее благосостояние его жителей, как правило, в среднесрочной и долгосрочной перспективе. Так, экономические последствия распространения эпидемии COVID-19 в 2020–2022 гг. во всем мире показали необходимость учитывать экономические факторы при планировании противоэпидемических мероприятий [1].

Большинство сценариев распространения инфекционных заболеваний в математической эпидемиологии основывается на использовании дифференциальных уравнений и кластеризации популяции в зависимости от иммунного статуса ее агентов. Такие модели принято называть камерными моделями или SIR-моделями (первая SIR-модель предложена Кермаком и МакКендриком [2] еще в 1927 г.). К настоящему моменту разработано множество ее модификаций, начиная с увеличения количества состояний агентов (камер) и их характеристик (пространственное распределение населения, возраст) и заканчивая учетом стохастичности процесса распространения вируса (см. например, обзорную работу [3]). С развитием вычислительной техники большую популярность в прогнозировании развития эпидемий приобрели вычислительно более сложные агентные модели [3–6], которые позволили учитывать неоднородность населения и внешние ограничительные мероприятия. Помимо двух описанных подходов, некоторые исследования посвящены анализу эпидемиологического процесса в других контекстах, например, уравнениям в частных производных [7, 8], моделям «среднего поля» [9, 10], анализу временных рядов [3, 11, 12], нейронным сетям и машинному обучению [13].

Однако большинство исследований в математической эпидемиологии посвящено оценке динамики распространения заболеваемости и не описывает процесс с экономической точки зрения, а работы по экономике, предлагающие прогноз экономических последствий распространения инфекции, не показывают связи между характером эпидемического процесса и экономической деятельностью. Существует лишь небольшое количество работ, посвященных построению математических моделей в этой области. Например, в статье [14] предложена абстрактная агенто-ориентированная модель в виде клеточного автомата без использования реалистичных предположений о распространении вируса и состоянии экономики. В работах [15, 16] оценено влияние различных сценариев развития эпидемии на бизнес и домохозяйства. В исследовании [17] представлена математическая модель влияния смертности от коронавируса на показатели потребления на душу населения и дохода популяции.

В данной работе представлена математическая модель, описывающая влияние распространения новой коронавирусной инфекции COVID-19 на два макроэкономических показателя региона: среднедушевой доход населения и численность его рабочей силы. Сложность оценки динамики доходов населения в долгосрочной перспективе связана с тем, что на их изменение влияет множество факторов (инфляция, производительность труда, уровень безработицы и т.д.). В основе предложенной модели лежит гипотеза о существовании связи между среднедушевым доходом населения и величиной конечного производимого в регионе продукта. В качестве базовой эпидемиологической модели выбрана простейшая SIR-модель, которая, как правило, не используется для долгосрочного прогнозирования развития заболеваемости, но после небольших модификаций позволяет достаточно точно оценить качественное влияние пандемии на экономику региона.

Базовая дифференциальная модель распространения инфекционного заболевания с учетом экономических процессов

Наиболее используемыми для описания вспышки распространения инфекционного заболевания моделями, как уже было сказано выше, являются камерная SIR-модель и ее различные модификации [2, 3]. Такие модели привлекательны за счет своей структурной простоты и наличия большого числа инструментов для анализа и численного решения прямых и обратных задач для таких моделей. Здесь предполагается, что вся популяция (в простейшем случае) в каждый момент времени t разделена на три группы (кластера, камеры): восприимчивые к вирусу $m_S(t)$ (неинфицированные), инфицированные $m_I(t)$ и иммунные $m_R(t)$ (получившие иммунитет после болезни либо умершие). В этом случае Кермак и МакКендрик в 1927 году в своей работе показали, что динамика эпидемии внутри замкнутой популяции может быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dm_S(t)}{dt} = -\beta m_S(t) m_I(t), \\ \frac{dm_I(t)}{dt} = \beta m_S(t) m_I(t) - \gamma m_I(t), \\ \frac{dm_R(t)}{dt} = \gamma m_I(t) \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями $m_i(0) = m_{i0}$, $\forall i \in \{S, I, R\}$. Дополним систему (1) следующими уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dm_P(t)}{dt} = m_P(t) (-\beta/\varepsilon \cdot m_I(t) - \omega + \rho m_F(t)) + \gamma \varepsilon m_I(t), \\ \frac{dm_F(t)}{dt} = m_F(t) (\sigma m_P(t) - \phi (m_S(t) + m_I(t) + m_R(t))). \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) представляет собой модификацию урбанистической модели Лотки-Вольтерры, описанной в работе [18]. Здесь $m_P(t)$ — доля трудоспособного населения в каждый момент времени t , а изменение $m_F(t)$ описывает динамику среднедушевого дохода населения в рассматриваемом регионе. В отличие от модели, описанной в [18], в (2) добавлена эпидемиологическая составляющая: трудоспособное население может заболеть и какое-то время не вкладываться в развитие экономики (члены $\beta/\varepsilon \cdot m_I(t)$, $\gamma \varepsilon m_I(t)$), а также рассмотрена нелинейная зависимость изменения среднедушевого дохода населения от текущей ситуации на рынке труда (составляющая $\sigma m_P(t)$). Представленные системы дифференциальных уравнений (1) и (2) с начальными условиями $m_i(0) = m_{i0}$, $i \in \{S, I, R, P, F\}$, будут рассмотрены далее как модель, описывающая влияние распространения заболеваемости на такие макроэкономические показатели региона, как численность активного трудоспособного населения и среднедушевой доход по региону. Описание параметров предложенной модели изложено в таблице 1.

Таблица 1

Описание параметров модели распространения инфекционного заболевания с учетом влияния макроэкономических процессов и их средние значения для вычислительного эксперимента

Символ	Описание	Значение
N	Численность популяции (Новосибирская область)	2785836
$m_S(t)$	Доля популяции — подверженные заболеванию в каждый момент времени t	$m_S(0) = (N - 8)/N$
$m_I(t)$	Доля популяции — активные инфицированные в момент времени t	$m_I(0) = 8/N$
$m_R(t)$	Доля популяции — получившие иммунитет к моменту времени t	$m_R(0) = 0$
$m_P(t)$	Трудоспособная часть населения в момент времени t	$m_P(0) = \varepsilon m_S(0)$
$m_F(t)$	Среднедушевой доход населения в каждый момент времени t (тыс. руб.)	$m_F(0) = 2.9265$
β	Контагиозность, скорость распространения вируса	0.5505
γ	Скорость выздоровления популяции	0.4607
ω	Коэффициент миграции трудоспособного населения в другие регионы	$0.99/N$
ρ	Коэффициент миграции трудоспособного населения в рассматриваемый регион	$0.19/N$
ε	Доля трудоспособного населения в рассматриваемом регионе	0.576
σ	Коэффициент роста среднедушевого дохода за счет роста числа работающего населения	0.0042
ϕ	Коэффициент «старения» популяции, перехода части населения в пенсионный возраст	0.002

Протестируем построенную дифференциальную модель на соответствие реальным статистическим данным. Данные по заболеваемости COVID-19 в Новосибирской области взяты из открытого источника [22]. Экономические параметры, используемые в модели, выбирались исходя из официальных данных из аналитического отчета Правительства Новосибирской области за 2020 год [19], а эпидемиологические параметры β и γ подбирались таким образом, чтобы приблизить первый подъем заболеваемости за период апрель–июнь 2020 г. Числовые значения параметров также представлены в таблице 1. На рисунке 1а показано сравнение реальных данных по заболеваемости в регионе за период с апреля 2020 года по апрель 2021 года в Новосибирской области с результатами моделирования (1)–(2). На рисунке 1б представлено аналогичное сравнение динамики среднедушевого дохода населения.

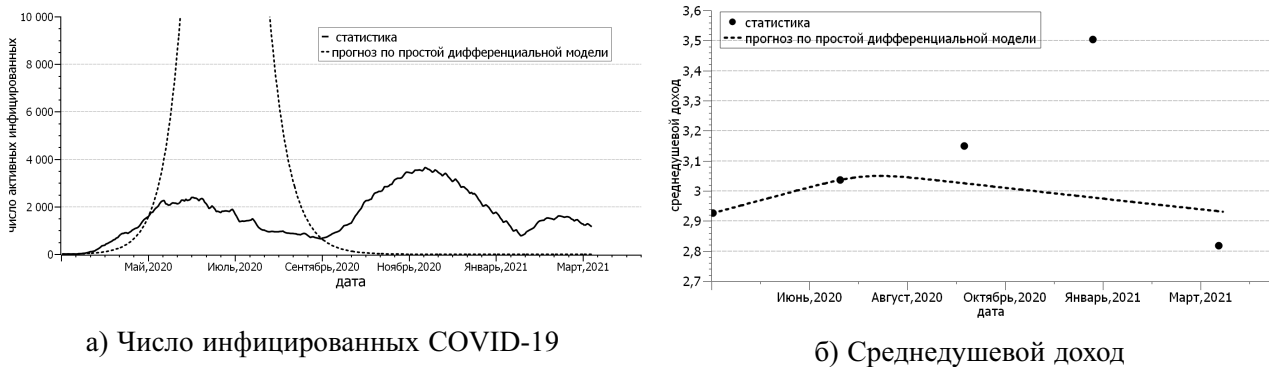


Рис. 1. Сравнение результатов моделирования на основе модели (1)–(2) с реальными данными в Новосибирской области за 2020 год

Из рисунка 1а видно, что модель SIR приближает статистические данные только на отрезке апрель–июнь 2020 года (для чего и подбирались соответствующие значения эпидемиологических констант). Далее происходит завышение показателей и резкий их спад, что не соответствует реальным измерениям. Такое поведение характерно для всех SIR-моделей, следствием чего является факт, что такие модели не используются для прогноза на долгосрочный или даже среднесрочный временные периоды. Вместе с тем на период апрель–июнь 2020 года модель хорошо приближает динамику среднедушевого дохода, резко занижая ее в последующем из-за ошибочного приближения количества инфицированных (рис. 1б).

Таким образом, для оценки влияния распространения вируса на макроэкономические показатели региона необходима адекватная базовая эпидемиологическая модель. Это требование приводит либо к построению модификаций модели SIR путем добавления новых групп населения и связей между ними. Например, для прогнозирования распространения COVID-19 за 2020–2021 гг. на основе различных предположений о вирусе было разработано более 100 камерных моделей [3], которые могут быть использованы вместо системы (1). Однако, как показало сравнение прогнозируемых данных с реальной статистикой, такие модели обладают большим числом чувствительных параметров, определение которых само по себе является сложной задачей и основано на многих предположениях. Незвестные параметры необходимо оценивать путем решения обратных задач по данным предыдущего временного участка, что делает модель более неопределенной [6]. Более того, при длительном течении COVID-19 изменение параметров модели связано со многими факторами, например, введением карантинных ограничений, обязательного ношения масок или проведением эффективной кампании по вакцинации. В этом случае одним из способов улучшения модели может быть рассмотрение эпидемиологических параметров зависимыми от времени.

Модель оптимального управления

Как известно [20], для моделей типа SIR параметры β , γ наиболее чувствительные и определяют характер поведения кривых, являющихся решением модели (1). Критика таких моделей, помимо плохого прогноза на долгосрочный временной период, основывается на предположении однородности населения без учета дифференциации населения по социальным признакам: например, возраст или соблюдение/несоблюдение противоковидных ограничений. Для преодоления этих трудностей в следующем разделе сформулирована задача управления.

Постановка задачи оптимального управления

Пусть $\alpha_{Is}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, означающая кумулятивную лояльность населения к изоляции (соблюдению ограничений). Положим, что $|\alpha_I(t)| \leq 1 \forall t$, а скорость распространения инфекции β в (1)–(2) изменяется по правилу

$$\beta = \beta_{\min} + (\beta_{\max} - \beta_{\min}) \frac{1 + \alpha_{Is}(t)}{2}. \quad (3)$$

Будем искать набор функций $\{m_S, m_I, m_R, m_P, m_F, \alpha_{Is}\}$, доставляющий максимум функционалу вида

$$J = \int_0^T G(m_{SIRPF}, \alpha_{Is}) dt + \Phi(m_{SIRPF}(0), m_{SIRPF}(T)), \quad (4)$$

где обозначение m_{SIRPF} означает вектор функций состояния управляемой системы $\{m_S(t), m_I(t), m_R(t), m_P(t), m_F(t)\}$. Здесь G определяет качество функционирования системы на всем промежутке управления, а Φ — терминальные условия, конечный результат воздействия управления, определяемый совокупностью начальных $m_i(0)$ и конечных $m_i(T)$ данных.

Таким образом, задача оптимального управления формулируется следующим образом: *максимизировать функционал* вида (4) *с ограничениями* в виде дифференциальных уравнений (1)–(2) с учетом (3). Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Введем в рассмотрение гладкие функции $\psi_i(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ и помножим $\psi_i(t) \forall i \in \{S, I, R, P, F\}$ на соответствующее уравнение в (1)–(2). Выпишем функцию Понтрягина [21]:

$$\begin{aligned} H(m_{SIRPF}, \alpha_{Is}, \psi_{SIRPF}) = & G(m_{SIRPF}, \alpha_{Is}) + \psi_S(t) (-\beta(\alpha_{Is}) m_S(t) m_I(t)) + \\ & + \psi_I(t) (\beta(\alpha_{Is}) m_S(t) m_I(t) - \gamma m_I(t)) + \psi_R(t) (\gamma m_I(t)) + \\ & + \psi_P(t) (-\beta(\alpha_{Is}) / \varepsilon \cdot m_P(t) m_I(t) - \omega m_P(t) + \rho m_P(t) m_F(t) + \gamma \varepsilon m_I(t)) + \\ & + \psi_F(t) m_F(t) (\sigma m_P(t) - \phi(m_S(t) + m_I(t) + m_R(t))). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\{m_{SIRPF}^*(t), \alpha_{Is}^*(t)\}$ — оптимальный процесс в задаче (1)–(4). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители $\psi_{SIRPF}(t)$ такие, что выполнены следующие условия:

1. Функция Понтрягина $H(m_{SIRPF}, \alpha_{Is}, \psi_{SIRPF})$ задачи (1)–(4) при каждом $t \in [0, T]$ достигает максимума по α_{Is} в точках $\alpha_{Is}^*(t)$ при $m_{SIRPF} = m_{SIRPF}^*(t)$, $\psi_{SIRPF} = \psi_{SIRPF}(t)$.
2. Вектор-функция $\psi_{SIRPF}(t)$ удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_S}{dt} &= \beta(\alpha_I) m_I(t) (\psi_S(t) - \psi_I(t)) + \phi \psi_F(t) m_F(t) - \partial G / \partial m_S, \\ \frac{d\psi_I}{dt} &= \beta(\alpha_I) m_S(t) (\psi_S(t) - \psi_I(t)) + \gamma (\psi_I(t) - \psi_R(t)) + \beta(\alpha_{Is}) / \varepsilon \cdot \psi_P(t) m_P(t) - \\ &\quad - \gamma \varepsilon \psi_P(t) + \phi \psi_F(t) m_F(t) - \partial G / \partial m_I, \\ \frac{d\psi_R}{dt} &= \phi \psi_F(t) m_F(t) - \partial G / \partial m_R, \\ \frac{d\psi_P}{dt} &= \beta(\alpha_{Is}) / \varepsilon \cdot \psi_P(t) m_I(t) + \omega \psi_P(t) - \rho \psi_P(t) m_F(t) - \sigma \psi_F(t) m_F(t) - \partial G / \partial m_P, \\ \frac{d\psi_F}{dt} &= -\rho \psi_P(t) m_P(t) - \sigma \psi_F(t) m_P(t) + \phi \psi_F(t) (m_S(t) + m_I(t) + m_R(t)) - \partial G / \partial m_R \end{aligned} \right. \quad (6)$$

с условиями трансверсальности

$$\psi_i(0) = \frac{\partial \Phi(m_i(0), m_i(T))}{\partial m_i(0)}, \quad \psi_i(T) = \frac{\partial \Phi(m_i(0), m_i(T))}{\partial m_i(T)}. \quad (7)$$

Исследуем (5) на выполнение необходимого условия максимума функции

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{Is}} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_{Is}} + \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{2\varepsilon} (\varepsilon m_S(t) m_I(t) (\psi_I(t) - \psi_S(t)) - \psi_P(t) m_P(t) m_I(t)) = 0. \quad (8)$$

В случае вогнутости функции G относительно функции управления α_{Is} (8) представляет собой условия оптимальности выбранной популяцией стратегии.

Алгоритм решения задачи оптимального управления

Для численной реализации задачи оптимального управления воспользуемся следующим итерационным алгоритмом.

Вход: начальные значения $m_{SIRPF}(0)$, отсутствие управления $\alpha_{Is}(t) \equiv 0$, точность вычисления максимума ε_J .

1. Получить набор сеточных значений $m_i^h(t_k)$ решением системы дифференциальных уравнений (1)–(2) с учетом (3).
2. Получить приближенное значение функционала стоимости J^h согласно (4).
3. **Пока** $|J - \max J| \geq \varepsilon_J$ **выполнять:**
 - a. Получить набор сеточных значений $\psi_i^h(t_k)$ решением системы дифференциальных уравнений (6) с учетом (3).
 - b. Получить набор сеточных значений $\alpha_{Is}^h(t_k)$ из уравнения (8).
 - c. Вычислить функцию Понтрягина H (5) с учетом текущих значений $m_i^h(t_k)$, $\psi_i^h(t_k)$, $\alpha_{Is}^h(t_k)$.
 - d. Вычислить функцию Понтрягина H (5) с учетом текущих значений $m_i^h(t_k)$, $\psi_i^h(t_k)$ и граничных значений $\alpha_{Is}^h(t_k)$.
 - e. В качестве значений $\alpha_{Is}^h(t_k)$ на новой итерации выбрать те, которые доставляют наибольшее значение функции H .
 - f. Получить новый набор сеточных значений $m_i^h(t_k)$ решением системы дифференциальных уравнений (1) с учетом (3).
 - g. Получить приближенное значение функционала стоимости J^h согласно (4).

Выход: выбрать полученные на последней итерации сеточные функции $m_i^h(t_k)$, $\psi_i^h(t_k)$, $\alpha_{Is}^h(t_k)$ в качестве решения задачи оптимизации.

Для решения систем дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты 4 порядка аппроксимации.

Вычислительные эксперименты для модели оптимального управления

Для тестирования построенного алгоритма будем рассматривать несколько сценариев развития эпидемиологической ситуации COVID-19 в Новосибирской области.

1. Оптимистический сценарий. Будем искать набор функций $\{m_{SIRPF}, \alpha_{Is}\}$, доставляющих максимум функционалу

$$J_1 = \int_0^T \left(d_1 m_F^2(t) - d_2 (1 + \alpha_{Is})^2 \right) dt + m_F(T). \quad (9)$$

Функционал J_1 выбран таким образом, чтобы оптимальной для популяции являлась стратегия максимизации среднедушевого дохода, что заставляет население более лояльно относиться к противоковидным мерам и соблюдать их.

2. Пессимистический сценарий. Будем максимизировать функционал вида

$$J_2 = \int_0^T d_1 m_S(t)(1 + \alpha_{Is})^2 dt + m_S(T). \quad (10)$$

Здесь J_2 есть функциональное представление так называемой «стоимости анархии» — ситуации, когда наибольшую выгоду получает та часть населения, которая не соблюдала ограничений, но при этом не заразилась.

3. Сборный вариант. Будем искать максимум функционала

$$J_3 = \int_0^T \left(d_1 m_S(t)(1 + \alpha_{Is})^2 + d_2 m_F^2(t) - d_3 (1 + \alpha_{Is})^2 \right) dt + m_S(T) + m_F(T). \quad (11)$$

Функционал вида (11) представляет собой обобщение двух противоположенных процессов (9) и (10).

Здесь d_1 , d_2 , d_3 представляют собой весовые константы. Для (9)–(11) выбирались значения $d_1 = 4.5$, $d_2 = 8$, $d_3 = 6.5$. Будем считать, что параметр β изменяется в пределах $[0.9\beta_0, 1.1\beta_0]$, где β_0 соответствует значению в таблице 1. На рисунке 2 представлено сравнение результатов вычислительного эксперимента для сценариев (9), (10), (11) с результатами, полученными при решении задачи (1)–(2), и реальными данными. Как и предполагалось, при выполнении сценария (9) заболеваемость в своем пике меньше, чем для модели (1)–(2), что приводит к повышению среднедушевого дохода населения. В

случае пессимистического сценария (10) ситуация обратная. Функционал (11) даёт средний результат относительно двух вышеизложенных.

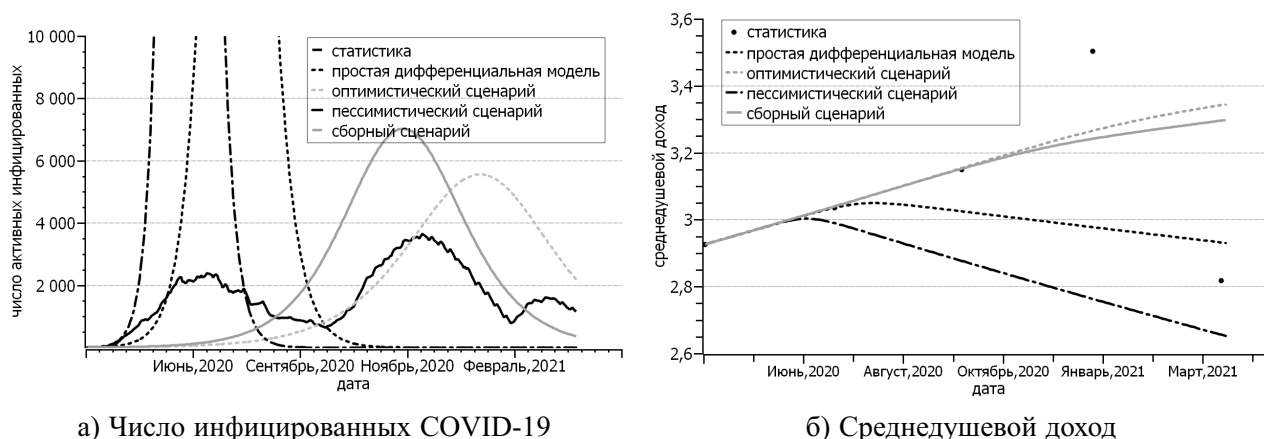


Рис. 2. Сравнение результатов, полученных при реализации сценариев оптимального управления распространением эпидемии COVID-19 с учетом экономических процессов в Новосибирской области, и реальных данных

Поскольку изменение макроэкономических показателей интересно, в первую очередь, в долгосрочной перспективе, а камерные модели обычно используются для моделирования на коротких временных промежутках, то одним из перспективных подходов может стать построение сценариев на некоторые небольшие промежутки времени и выбор наиболее подходящего под ситуацию сценария. Так, на рисунке 3 представлено последовательное применение сценариев (9)–(11) к моделированию ситуации сроком на 3 месяца. Здесь кривая, состоящая из точек, составлена из сценариев, показавших

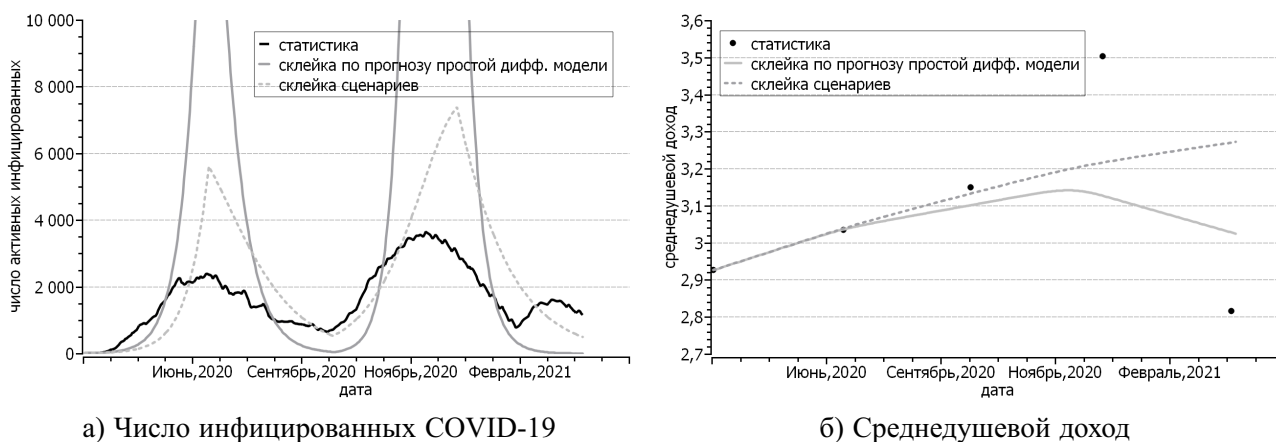


Рис. 3. Сравнение данных, полученных при склейке сценариев

наибольшее приближение с известными статистическими данными по заболеваемости. Из рисунка видно, что модель оптимального управления может дать более точный прогноз, чем простая дифференциальная модель (серая линия), но требует адекватной оценки ситуации при построения нового прогностического сценария. Описание используемых при моделировании параметров представлено в таблице 2.

Заключение

Таким образом, в работе последовательно построено две модели, описывающих влияние эпидемиологического процесса на макроэкономические показатели. Предложенная базовая дифференциальная модель основана на совокупности камерной модели SIR и урбанистической модели Лотки-Вольтерры. Такая модель вычислительно проста и может быть легко доработана за счет модификации модели SIR любой известной камерной моделью, что позволит дать более точный эпидемиологический прогноз.

Таблица 2

Описание эпидемиологических данных заболеваемости COVID-19, используемых при склейке сценариев

Для заданного промежутка времени	1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
Значение параметра β в простой дифференциальной модели	0.55	0.48	0.7	0.27
Значение параметра γ в простой дифференциальной модели	0.46	0.50	0.51	0.26
Используемый сценарий, показавший наилучшее приближение	(9)	(10)	(9)	(9)
Значение δ , где $\beta_{min} = \beta - \delta\beta$, $\beta_{max} = \beta + \delta\beta$	3%	3%	17%	2%

Далее, на основе базовой дифференциальной модели предложена модель оптимального управления, где скорость распространения вируса зависит от реализации популяцией стратегии изоляции (выполнения противоэпидемиологических мер). Сравнение с реальными статистическими данными результатов вычислительного моделирования показывает, что такая модель хорошо приближает количественные показатели, но нуждается в адекватной оценке текущей эпидемиологической ситуации (оценке параметров модели) и подборе правильного сценария развития эпидемии. Отметим, что рисунок 2 показывает, что, хотя развитие сценарного подхода позволяет строить более приближенные к реальности прогнозы, SIR модели с постоянными коэффициентами плохо приближают реальные данные заболеваемости COVID-19 в долгосрочной перспективе (ввиду появления новых штаммов и административных воздействий).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zyatkov N., Krivorotko O. Forecasting Recessions in the US Economy Using Machine Learning Methods. *Proceedings – 2021 17th International Asian School-Seminar “Optimization Problems of Complex Systems”*. 2021:139–146. DOI: 10.1109/OPCS53376.2021.9588678.
2. Kermack W. O., McKendrick A. G. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proc. R. Soc.* 1927;A115:700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
3. Krivorotko O. I., Kabanikhin S. I. *Mathematical models of COVID-19 spread*. Available at: https://www.researchgate.net/publication/356985697_Mathematical_models_of_COVID-19_spread.
4. Kerr C. C. et al. Covasim: An Agent-Based Model of COVID-19 Dynamics and Interventions. *PLoS Comput. Biol.* 2021;17(7):e1009149. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1009149.
5. Lin Q. et al. A Conceptual Model for the Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Outbreak in Wuhan, China with Individual Reaction and Governmental Action. *Int. J. Infect. Dis.* 2020;93:211–216. DOI: 10.1016/j.ijid.2020.02.058.
6. Krivorotko O. et al. Agent-Based Modeling of COVID-19 Outbreaks for New York State and UK: Parameter Identification Algorithm. *Infectious Disease Modelling*. 2022;7(1):30–44. DOI: 10.1016/j.idm.2021.11.004.
7. Viguier A. et al. Diffusion–Reaction Compartmental Models Formulated in a Continuum Mechanics Framework: Application to COVID-19, Mathematical Analysis, and Numerical Study. *Comput. Mech.* 2020;66:1131–1152. DOI: 10.1007/s00466-020-01888-0.
8. Aristov V. V., Stroganov A. V., Yastrebov A. D. Simulation of Spatial Spread of the COVID-19 Pandemic on the Basis of the Kinetic-Advection Model. *Physics*. 2021;3(1):85–102. DOI: 10.3390/physics3010008.
9. Bremaud L. *Mean Field Game Modeling of Epidemic Propagation*. Paris: LPTMS; 2021.
10. Petrakova V. S., Krivorotko O. I. Mean Field Game for Modeling of COVID-19 Spread. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2022;514:126271–126271. DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126271.
11. Adarchenko V. A. et al. Modeling the Development of the Coronavirus Epidemic Using Differential and Statistical Models. *RFNC-VNIITF*. 2020;264:Preprint.
12. Brauer F. Mathematical Epidemiology: Past, Present, and Futures. *Infectious Disease Modelling*. 2017;2(2):113–127. DOI: 10.1016/j.idm.2017.02.001.

13. Wiecezorek M., Silka J., Wo M. Neural Network Powered COVID-19 Spread Forecasting Model. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020;140:110203. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110203.
14. Kano T. et. al. An Agent-Based Model for Interrelation Between COVID-19 Outbreak and Economic Activities. *Proc. R. Soc. A*. 2021;477(2245). DOI: 10.1098/rspa.2020.0604.
15. McAdams D. Nash SIR: An Economic-Epidemiological Model of Strategic Behavior During a Viral Epidemic. *MedRN: COVID-19 Research (Topic)*. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/Nash-SIR%3A-An-Economic-Epidemiological-Model-of-a-McAdams/be9875ba29b20b692fec23e6cb12761dfd93b9ce>. DOI: 10.2139/ssrn.3593272.
16. Silva P. et al. COVID-ABS: An Agent-Based Model of COVID-19 Epidemic to Simulate Health and Economic Effects of Social Distancing Interventions. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020 Oct;139:110088. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110088.
17. Goenka A., Liu L., Nguyen M.-H. SIR Economic Epidemiological Models with Disease Induced Mortality. *Journal of Mathematical Economics*. 2021;93(3):102476. DOI: 10.1016/j.jmateco.2021.102476.
18. Kamann D., Nijkamp P. Technogenesis: Incubation and Diffusion. The Spatial Context of Technological Development at the Local Level. *Serie Research Memoranda*. 1988.
19. *Novosibirsk Region Federal State Statistics Service*. Available at: <https://novosibstat.gks.ru/>.
20. Chunfeng M. et al. Understanding Dynamics of Pandemic Models to Support Predictions of COVID-19 Transmission: Parameter Sensitivity Analysis of SIR-Type Models. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*. 2022;26(6):2458–2468. DOI: 10.1109/JBHI.2022.3168825.
21. Yong J., Zhou X. Y. Maximum Principle and Stochastic Hamiltonian Systems. *Stochastic Controls. Applications of Mathematics*. 1999;43. Springer, New York, NY. DOI: 10.1007/978-1-4612-1466-3_3.
22. Inverse Problems. Available at: <https://covid19-modeling.ru/data>. (In Russ.)