

DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ПОТОКОВ**В. А. Галкин^{1,2,a}, А. Д. Смородинов^{1,2,b}, Д. А. Моргун^{1,c}**¹ Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук»,

г. Сургут, Российская Федерация

² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9324-1844>, sachenka_1998@mail.ru^c ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0692-1583>, morgun_da@office.niisi.tech

Аннотация: в работе исследуется структура потенциальных течений несжимаемой жидкости, порожденных гармоническим потенциалом. Представлены результаты трех вычислительных экспериментов: результаты моделирования для встречных потоков одинаковой мощности и сравнение с натурным экспериментом столкновения двух встречных струй, опубликованным Lim T. и Nickels T. в 1992 г. в журнале Nature; результаты моделирования для встречных потоков разной мощности; результаты моделирования для источника и стока одинаковой мощности.

Ключевые слова: визуализация траекторий частиц, гидродинамика, уравнения Навье–Стокса.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 «Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления».

Для цитирования: Галкин В. А., Смородинов А. Д., Моргун Д. А. Решение уравнения Навье–Стокса для сталкивающихся потоков. *Успехи кибернетики*. 2023;4(2):8–15. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01.

Поступила в редакцию: 15.06.2023.

В окончательном варианте: 20.06.2023.

SOLUTION OF THE NAVIER–STOKES EQUATION FOR COLLIDING JETS**V. A. Galkin^{1,2,a}, A. D. Smorodinov^{1,2,b}, D. A. Morgun^{1,c}**¹ Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation² Surgut State University, Surgut, Russian Federation^a ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9324-1844>, sachenka_1998@mail.ru^c ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0692-1583>, morgun_da@office.niisi.tech

Abstract: this study investigates the structure of potential incompressible fluid flows generated by a harmonic potential. We presented the results of three computational experiments: simulation of head-on colliding flows of the same capacity and comparison with a physical experiment of two oncoming jets published by Lim T. and Nickels T. in 1992 in *Nature*; simulation results for head-on colliding jets flows with different capacities; and simulation results for a source and drain of the same capacity.

Keywords: visualization of particle trajectories, hydrodynamics, Navier–Stokes equations.

Acknowledgements: this study is a part of the government contract 47 GP with the Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, project No. 0580-2021-0007 Advancing Distribution System Simulation and Computation Methods.

Cite this article: Galkin V. A., Smorodinov A. D., Morgun D. A. Solution of the Navier–Stokes Equation for Colliding Jets. *Russian Journal of Cybernetics*. 2023;4(2):8–15. DOI: 10.51790/2712-9942-2023-4-2-01.

Original article submitted: 15.06.2023.

Revision submitted: 20.06.2023.

Введение

Система уравнений Навье—Стокса [1] играет ключевую роль в гидродинамике и применяется в математическом моделировании многих природных явлений, например, океанских течений, турбулентного потока, движущегося за самолетом, или потока крови в организме человека.

Если добавить к системе Навье—Стокса уравнение переноса массы или тепла, то полученная модель может применяться для описания конвекции и термодиффузии в жидкости.

В настоящей работе рассматривается класс потенциальных решений системы Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, заданных гармоническим потенциалом

$$\vec{V} = \nabla\varphi(\vec{x}, t), \quad (1)$$

где $\varphi(\vec{x}, t)$ — скалярное поле, которое удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(\vec{x}, t) \equiv 0. \quad (2)$$

Как известно еще из классических работ Лагранжа и Эйлера, данное поле является точным решением системы уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости. Вкратце воспроизведем обоснование данного утверждения.

Рассмотрим систему уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \nabla P = \varepsilon^2 \Delta\vec{V}, \\ \operatorname{div} \vec{V} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Так как $\Delta\vec{V} = \operatorname{rot}(\nabla\vec{V}) = 0$, то получаем

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \nabla P = 0. \quad (4)$$

Воспользовавшись известным тождеством

$$\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + [\vec{V}, \operatorname{rot} \vec{V}] \quad (5)$$

и учитывая равенство нулю ротора потенциального поля, имеем

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + \nabla P = 0. \quad (6)$$

Положим

$$P = -\frac{\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (7)$$

Непосредственной подстановкой полученных тождеств в соотношения (3) убеждаемся, что формулы (1), (2), (7) дают решение системы уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости.

Вычислительные эксперименты

Кулоновский потенциал является гармонической функцией в \mathbb{R}_3 с выколотой особенностью потенциала в точке M_1

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\|\vec{x} - M_1\|}. \quad (8)$$

Соответствующее векторное поле

$$\vec{V}(x) = \nabla\left(\frac{1}{\|\vec{x} - M_1\|}\right) \quad (9)$$

удовлетворяет системе (3). Более того, системе (3) удовлетворяет суперпозиция потенциальных полей, которую можно записать в виде

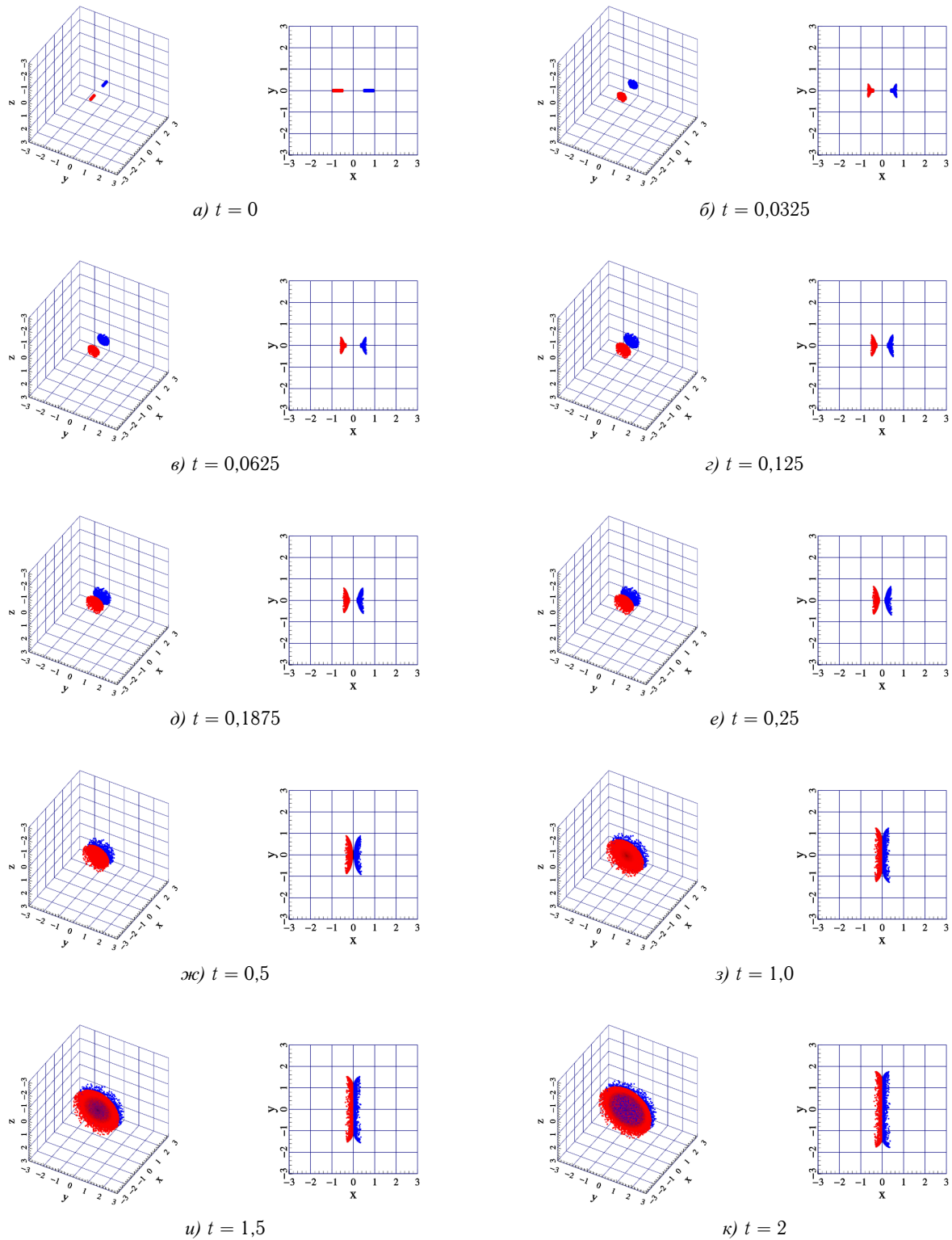


Рис. 1. Математическое моделирование столкновения двух встречных потоков с мощностью источников $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$\vec{V}(x) = \nabla \left(\sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\|\vec{x} - M_i\|} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим столкновение двух встречных потоков. В представленной математической модели оно описывается сложением двух потенциальных потоков ($k = 2$ в формуле (10)):

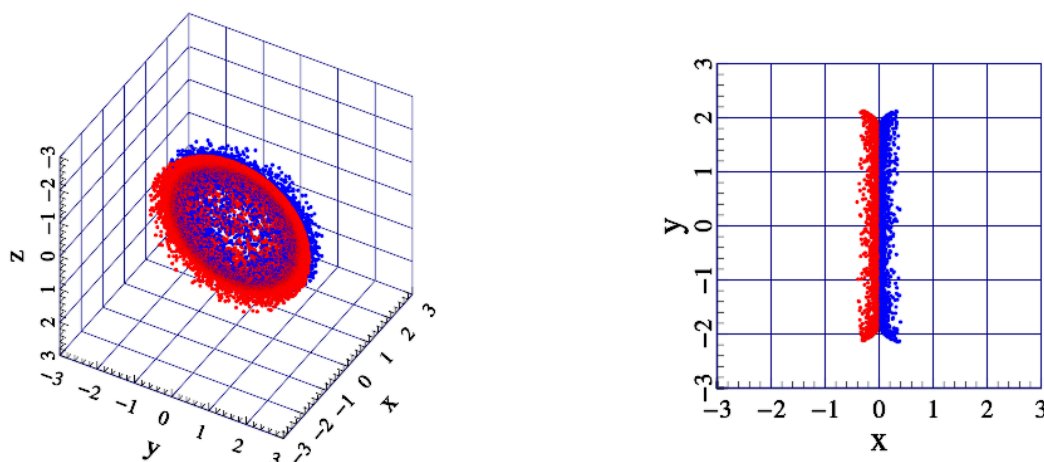


Рис. 2. Математическое моделирование столкновения двух встречных потоков с мощностью источников $\alpha = 1$, $\beta = 1$ на момент времени 3

$$\vec{V}(x) = \nabla \left(\frac{\alpha}{\|\vec{x} - M_1\|} + \frac{\beta}{\|\vec{x} - M_2\|} \right), \quad (11)$$

где α — мощность 1-го потока, β — мощность 2-го потока, в знаменателе стоит евклидова норма.

Обозначим точки расположения источников потоков как M_1 и M_2 . Для поля (11) покомпонентная запись поля примет вид:

$$V_i = -\frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - M_1^1)^2 + (x_2 - M_1^2)^2 + (x_3 - M_1^3)^2}^{-3} \cdot (2x_i - 2M_1^i) - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - M_2^1)^2 + (x_2 - M_2^2)^2 + (x_3 - M_2^3)^2}^{-3} \cdot (2x_i - 2M_2^i).$$

Для моделирования натурального эксперимента, описанного в работе [2], расположим точки M_1 , M_2 на оси Ox и зададим для них следующие координаты:

$$M_1 = (-1, 0, 0); \quad M_2 = (1, 0, 0).$$

Проведем серию вычислительных экспериментов по моделированию динамики примеси, движущейся во встречных потенциальных течениях, задаваемых кулоновскими потенциалами. Движение i -й примеси описывается уравнением

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) N_i = \sigma_i^2 \cdot \Delta N_i, \quad (12)$$

где N_i — концентрация примеси i . Будем рассматривать движение безынерционных недиффундирующих примесей. Тогда коэффициент диффузии $\sigma_i = 0$, вектор скорости движения примесей совпадает с вектором скорости движения жидкости \vec{V} и уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) N_i.$$

Для получения траекторий частиц примесей решаем задачу Коши в трехмерном пространстве. Используется численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений — метод Рунге—Кутты 4-го порядка точности, который лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ [3].

Для визуализации результатов применялась библиотека MathGL [4].

Для моделирования использовался компьютер с процессором AMD Ryzen Threadripper 2990WX 32-Core-Processor, 2 400 МГц и с 32 ГБ оперативной памяти.

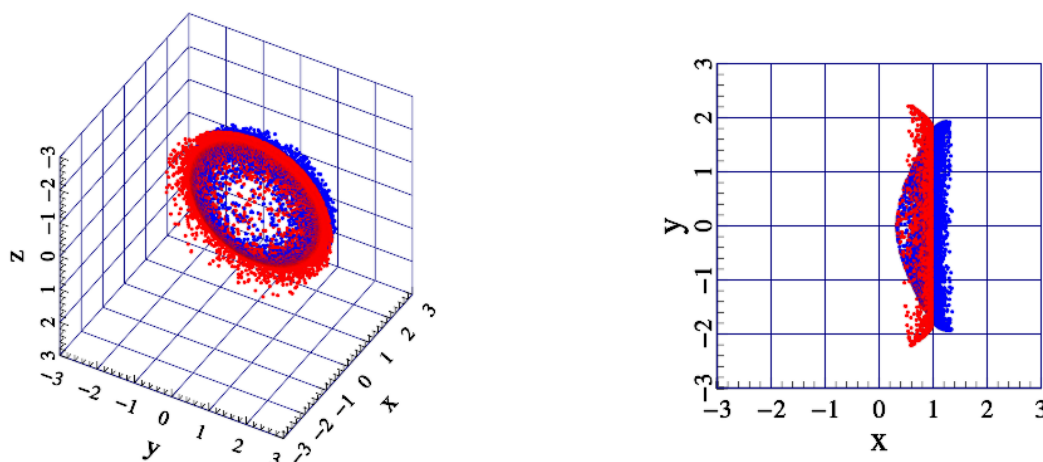


Рис. 4. Математическое моделирование столкновения двух встречных потоков с мощностью источников $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$ на момент времени 3

В приведенных ниже результатах вычислительных экспериментов радиус r такой области равен 0.5, ближайшее основание отстоит от источника на 0.5 в сторону центра координат, а длина цилиндрической области равна 0.45. Количество точек моделирования равно 5000, шаг по времени равен $1/2000$; всего шагов 6000.

Вычислительный эксперимент 1

Предполагается, что безынерционные примеси следуют линиям тока. Мощность источников задается множителем для соответствующего кулоновского поля, задающего поле скоростей течения несжимаемой жидкости. На рисунке 1 представлена визуализация ключевых моментов изменения движения потока. Первый вычислительный эксперимент проведен для одинаковых мощностей встречных потоков — $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. В нулевой момент времени наблюдаются две тонких струи (конфигурации точек цилиндрической формы). Далее, в моменты времени 0,0325 и 0,0625 (рисунок 1б и 1в), струи двигаются навстречу друг другу и их конфигурация начинает принимать дискообразную форму. В моменты времени 0,125; 0,1875; 0,25 (рисунки 1г, 1д и 1е) продолжается трансформация струй и их сближение. Начиная с момента времени 0,5 (рисунок 1ж) наблюдается максимальное сближение струй; далее обе струи будут радиально расходиться от оси Ox вдоль плоскости Oxy и не смешиваются друг с другом вплоть до конца математического моделирования.

Результат математического моделирования в момент времени $t = 3$ представлен на рисунке 2.

Как видно из результатов проведенного моделирования, предложенное потенциальное поле качественно повторяет результаты натурного эксперимента [2].

Вычислительный эксперимент 2

В следующем вычислительном эксперименте мощности потоков разные — $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$. Результаты математического моделирования представлены на рисунке 3.

Поведение синих и красных точек, моделирующих струи из разных источников, во многом аналогично предыдущему случаю. Но теперь граница, разделяющая частицы из разных источников, смещается ближе к более слабому источнику, а форма этой границы трансформируется из плоскости к криволинейной поверхности, напоминающей параболоид. Можно сказать, что частицы, испускаемые более мощным источником, в какой-то момент времени начинают огибать область с более слабым источником.

Результат математического моделирования в момент времени $t = 3$ представлен на рисунке 4.

Вычислительный эксперимент 3

В третьем вычислительном эксперименте мощности потоков одинаковы по модулю, но противоположны по знаку — $\alpha = -1$, $\beta = 1$, что соответствует стоку в точке M_1 и источнику в точке M_2 . Результаты математического моделирования представлены на рисунке 5.

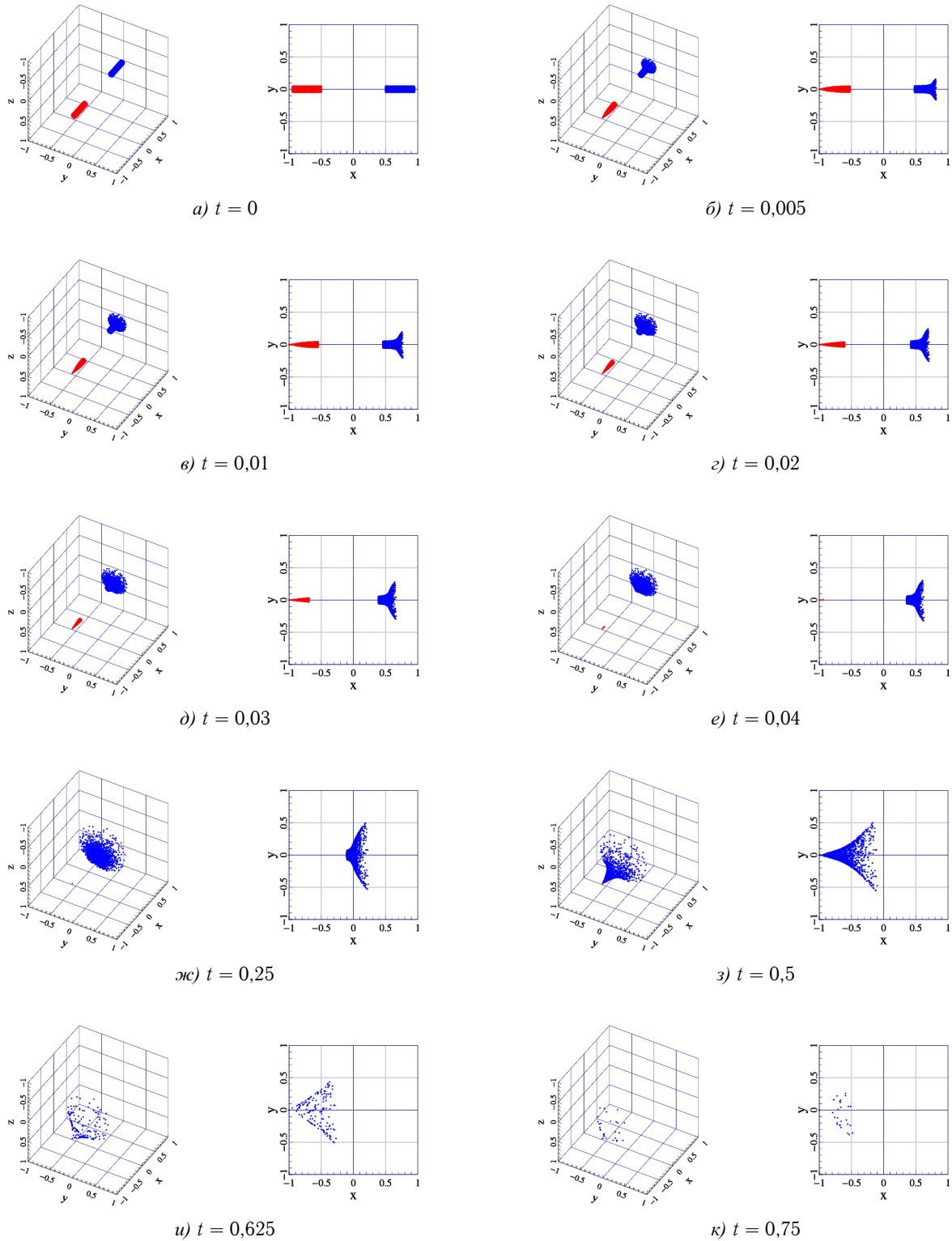


Рис. 5. Математическое моделирование столкновения двух встречных потоков с мощностью источников $\alpha = -1$, $\beta = 1$

Начальная конфигурация в этом эксперименте (рис. 5а) такая же, как и в предыдущих экспериментах. Далее, с момента времени $t = 0,005$ (рис. 5б) и до момента $t = 0,04$ левый поток полностью стекает в сток, а правый поток движется по направлению к центру координат и вплоть до момента времени $t = 0,25$ (рис. 5ж) ведет себя так же, как и в предыдущих численных экспериментах. Далее и он начинает стекать в сток, и к моменту времени $t = 0,75$ в расчетной области остается лишь небольшое количество точек. К моменту времени $t = 1$ все оставшиеся точки «стекают» в сток.

Заключение

Представлены результаты трех вычислительных экспериментов по моделированию течения, описываемого системой уравнений Навье–Стокса с полем скоростей, заданным уравнением

$$\vec{V}(x) = \nabla \left(\frac{\alpha}{\|\vec{x} - M_1\|} + \frac{\beta}{\|\vec{x} - M_2\|} \right).$$

Результаты моделирования решения уравнения Навье–Стокса с одинаковой мощностью встречных потоков $\alpha = \beta = 1$ позволяют качественно описать натурный эксперимент столкновения двух встречных струй, опубликованный Lim T. и Nickels T. в 1992 г. в журнале Nature [2].

Эксперименты с разной мощностью источников или с разным знаком также демонстрируют ожидаемый результат: в первом случае граница раздела струй трансформируется из плоскости в криволинейную поверхность и частицы, испускаемые более мощным источником, начинают огибать более слабый источник; во втором случае — все частицы с течением времени стекают в сток, которому соответствует отрицательное значение мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 736 с.
2. Lim T., Nickels T. Instability and Reconnection in the Head-On Collision of Two Vortex Rings. *Nature*. 1992;357:225–227. Режим доступа: <https://doi.org/10.1038/357225a0>.
3. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 592 с.
4. *MathGL*. Режим доступа: <https://mathgl.sourceforge.net/>.