

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-02

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ПРИ ПОМОЩИ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ

**А. Е. Дашевский**

*Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация*

*✉ dashevsky.andry@gmail.com*

*Аннотация:* в работе приводится краткий обзор сетевой модели пористой среды. Предложен способ построения фиктивного порового пространства, в основе которого лежит принцип сетевой модели пористой среды, и приведен образец расчета на примере задачи определения поля давления в пористой среде.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, сетевая модель, керн, фильтрационные течения, поры, пористая среда.

*Для цитирования:* Дашевский А. Е. Моделирование пористой среды при помощи сетевой модели. *Успехи кибернетики*. 2024;5(1):17–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-02.

*Поступила в редакцию:* 13.02.2024.

*В окончательном варианте:* 05.03.2024.

## POROUS MEDIA MODELING WITH THE NETWORK MODEL

**A. E. Dashevsky**

*System Research Institute, Russian Academy of Sciences*

*✉ dashevsky.andry@gmail.com*

*Abstract:* the article briefly describes the network model for porous media. The technique of fictional porous media construction, which based on network model principals, is proposed, as well as example of application of this technique for task of calculating pressure in porous media.

*Keywords:* mathematic modeling, network model, core sample, filtration flow, pores, porous media.

*Cite this article:* Dashevsky A. E. Porous Media Modeling With The Network Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(1):17–23. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-02.

*Original article submitted:* 13.02.2024.

*Revision submitted:* 05.03.2024.

### Введение

В рамках изучения течений в пористых средах решается огромное количество задач в разных постановках: анализ процесса фильтрации в конкретных пористых средах [1], моделирование течения в поровых пространствах с учетом химического взаимодействия жидкостей [2], изучение процесса капиллярной пропитки [3] и множество других задач, связанных с анализом течений в пористых материалах [4–6]. Так или иначе каждый из исследователей, работающих с пористыми средами, сталкивается с необходимостью каким-либо образом моделировать сложную структуру таких сред. Математически это проявляется в определении коэффициента проницаемости, который зависит исключительно от характеристик внутреннего строения пор. Определение этого коэффициента и стало главной целью моделей геометрии порового пространства.

Для этого было предложено несколько эмпирических моделей пористой среды. Их можно разделить на два класса: гранулярные модели и каналные модели, — в описании каждого из которых имеются существенные проблемы. Для гранулярных моделей [7, 8], которые представляют пористую среду как множество круглых «гранул», основной проблемой является сложность получаемой геометрии пор [9]. Модель Козени в модификации Кармана [10], использующая площадь «гранул», относится к этому классу.

В то же самое время каналные модели, которые представляют пористые среды как множество однонаправленных каналов (например, в [11, 12]), дают относительно простые соотношения, однако не моделируют некоторые элементарные свойства пористой среды. Например, каналная модель представляет пористую среду анизотропной, хотя реальные образцы демонстрирует в общем изотропные свойства [13].

В [13] Фэтт предложил свою собственную модель пористой среды, которая представляла «сети» различной конфигурации (для простоты использовались двумерные модели). В этих моделях, в основе которых лежит течение в каналах, оно определялось законом Хагена–Пуазеля для круглого сечения.

В то же время Оуэн представлял пористую среду как набор ячеек, состоящих из «пор», и соединяющих каналов. В основе этой модели лежит предположение, что каналы вносят большее сопротивление, чем «поры», что обеспечивает высокое значение форм-фактора без введения высоких значений извилистости.

В основе сетевой модели, рассматриваемой в этой статье, лежит объединение идей моделей Оуэна и Фэтта. Элементом сетевой модели пор является объем жидкости («узел»), соединенный с другими элементами («каналами»), в которых (и только в них) происходит переток жидкости из одного объема в другой.

### Описание модели

Модель состоит из двух типов узлов: внутренних и внешних. Внутренние узлы — это область «реального» порового пространства, в которой изучается течение жидкости. Она обладает своим объемом и может сообщаться с несколькими внутренними узлами посредством каналов, представляет основную ячейку модели. Внешние узлы — «фиктивные» элементы модели, они не имеют объема и могут сообщаться только с одним внутренним узлом и больше ни с какими элементами модели. Эти узлы есть граница расчетной области, в них мы будем задавать граничные условия при решении задач.

Модель содержит  $N$  узлов, причем множество номеров внешних узлов обозначим  $E$ , а множество номеров, связанных каналами с узлом  $n$ , обозначим  $B_n$ . Эти узлы мы называем соседними с узлом  $n$ . Тем самым имеем граф, заданный списком узлов и для каждого узла списком связей. Для внешних узлов имеем только один канал, связывающий их с остальной моделью — внутренними узлами.

Канал (связь) определяется двумя его узлами, практически идентифицируется узлом  $n$  и индексом  $j$  таким, что соседний узел  $m_{n,j} \in B_n$ , причем  $1 \leq j \leq J_n$  ( $J_n$  — количество соседей узла  $n$ ). Канал, определяемый парой  $(n,j)$ , идентичен каналу, определяемому парой  $(m_{n,j},k)$ , если  $m_{m_{n,j},k} = n$ . Идентифицировать канал будем так же по его двум узлам  $(n,m)$ , в этом случае идентификация однозначна, будем записывать подобный индекс в скобках, а индекс по узлу и номеру связи — без скобок.

Для описания геометрии сетевой модели вводим следующие обозначения:

- $\mathbf{x}_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}\}$  — координата узла  $n$  относительно заданной фиксированной системы отсчета;
- $R_n$  — характерный радиус (полуширина) внутреннего узла  $n$ . Рассматривая модель с внутренними узлами в виде куба, имеем объем узла  $V_n = 8R_n^3$ ;
- $r_{n,m}$  — полуширина канала между узлами  $n, m$ . В основных расчетах будем считать, что каналы имеют квадратное сечение. Тогда  $r_{n,m}$  — половина длины стороны квадратного сечения канала.

Длина канала определяется координатами узлов, но вследствие того, что на внутреннем узле имеет место расширение хотя бы из-за подхода нескольких каналов, важным параметром является именно эффективная (для определения сопротивления) длина  $L_{n,m}^{eff}$ , меньшая, чем расстояние между центрами узлов  $L_{n,m}$ . На ее основе строится градиент давления вдоль канала, по которому и определяется поток на основе теории ползущего течения.

Эффективная длина каналов зависит как от координат узлов, так и от геометрических параметров узлов и канала:

$$L_{n,m_{n,j}}^{eff} = L_{n,m_{n,j}} - \bar{E}_n R_n F\left(\frac{R_n}{r_{n,m_{n,j}}}\right) - \bar{E}_m R_m F\left(\frac{R_{m_{n,j}}}{r_{n,m}}\right) \quad (1)$$

$$L_{n,m_{n,j}} = |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{m_{n,j}}| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_{n,j} - x_{m_{n,j},j})^2}, \quad \bar{E}_n = \begin{cases} 1, n \notin E; \\ 0, n \in E. \end{cases}$$

где  $q_{n,m_{n,j}}$  — объемный расход в узле  $n$  в направлении соседнего узла  $m_{n,j}$ .

Здесь  $F(x)$  — функция, которая ранее была откалибрована на простой модели каналов с расширением (по Оуэну) посредством сравнения с результатами расчета модели Стокса [14]:

$$F(x) = 0.65x^{0.2}.$$

Учет влияния узлов имеет место, если узел внутренний, поскольку у внешних узлов нет расширения канала и подхода прочих каналов, что и отражено в формуле (1).

Объем жидкости (часть объема канальной модели), соответствующий узлу, сводится не только к расширению узла, но и к каналам, примыкающим к нему, причем внешним узлам никакой объем не соответствует, эти узлы рассматриваются лишь как контрольные точки. Для внутреннего узла можно определить объем следующим образом:

$$V_n = 8R_n^3 + \sum_{j=1}^{J_n} r_{n,j}^2 \begin{cases} (L_{n,m_{n,j}} - R_n - R_{m_{n,j}}) / 2, & m_{n,j} \notin E; \\ L_{n,m_{n,j}} - R_n, & m_{n,j} \in E. \end{cases} \quad (2)$$

То есть к расширению внутреннего узла добавляется половина объема каналов, соединяющих его с другими внутренними узлами, и полный объем каналов, соединяющих с внешними узлами.

Для симуляции течений мы будем использовать принцип моделей Фэтга, Оуэна и Кармана–Козени, где течение в капиллярах предполагалось ламинарным течением в трубке, описываемым уравнением Навье–Стокса, решение которого для данного случая:

$$q_{n,m_{n,j}} = \frac{\xi}{\mu L_{n,m_{n,j}}^{eff}} A_{n,m_{n,j}}^2 (p_n - p_m), \quad c_{n,m_{n,j}} = \frac{\xi}{\mu L_{n,m_{n,j}}^{eff}} A_{n,m_{n,j}}^2, \quad (3)$$

где  $\xi$  — форм-фактор (зависит от формы канала (для каналов квадратного сечения  $\xi = 0.5632$  [14])),  $A_{nm}$  — площадь сечения канала между узлами  $n$  и  $m$ ,  $p_n - p_m$  — перепад давления в канале между узлами  $n$  и  $m$ .

Как можно увидеть, при  $\xi = \frac{1}{8\pi}$  мы получим известный закон Хагена–Пуазейля, описывающий расход в трубе круглого сечения.

Рассмотрим применение такой модели для решения задачи о нахождении поля давления. Для нашей модели нахождение поля какой-либо величины эквивалентно поиску значения этой величины в каждом внутреннем узле модели. Учитывая, что плотность жидкости и геометрия порового пространства постоянная, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho_n V_n) &= \rho_n \sum_{j=1}^{J_n} q_{n,j} = \rho_n \sum_{j=1}^{J_n} c_{n,m_{n,j}} (p_n - p_{m_{n,j}}), \quad n \notin E \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{J_n} c_{n,m_{n,j}} (p_n - p_{m_{n,j}}) = 0, \quad n \notin E \end{aligned} \quad (4)$$

Получаем незамкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Дополним их соотношениями на внешних узлах — граничными условиями:

1) условие Дирихле:

$$p_n = P(x_n), \quad n \in E_G; \quad (5)$$

2) условие Неймана в общем виде:

$$\sum_{j=1}^{J_n} c_{n,m_{n,j}} (p_n - p_{m_{n,j}}) = Q(x_n), \quad n \in E_G. \quad (6)$$

Решение дополненной системы и будет решением задачи об определении поля давлений.

Для моделирования используется сфабрикованный образец, который строится следующим образом:

1) создается равномерная сетка пор и каналов:

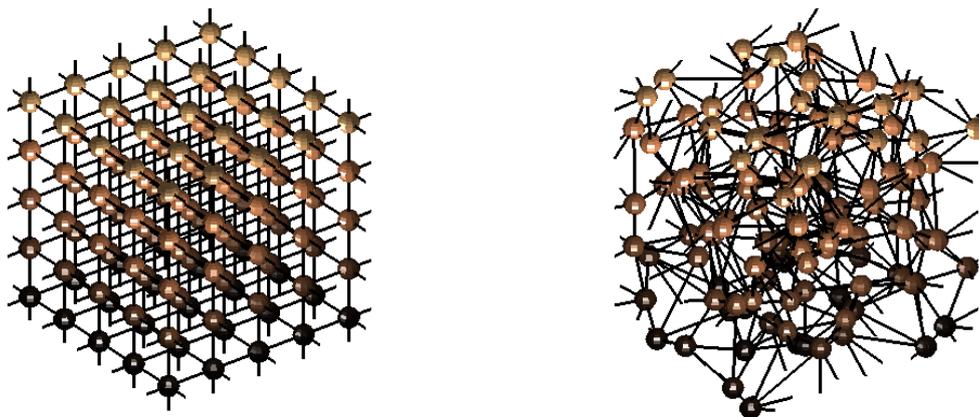
а) зона образца, имеющая форму параллелепипеда, разбивается равномерной кубической сеткой;

б) каждый из узлов полученной сетки считаем центром узла сетевой модели;

с) каждому из полученных узлов присваиваются одинаковые радиусы, исключаяющие пересечение узлов;

- d) для каждого из узлов определяются соседние узлы: для каждого узла сетки узлы, которые имеют общее ребро с прилегающими кубическими элементами, считаются соседними (6-связность);
- e) соседние узлы соединяются каналами с одинаковыми геометрическими параметрами;
- f) из каждого узла на границе образца перпендикулярно образцу откладывается канал, который соединяется с «внешним» узлом — областью задания граничных условий для образца;
- 2) в равномерной сетке случайным образом создаются нерегулярности:
- a) внутренние узлы случайным образом смещаются, меняя положения объема, а также длины каналов (движение исключается пересечением узлов);
- b) радиус случайно выбранных каналов уменьшается до малой величины, симулируя закрытые поры.

Таким образом, для вычисления течений в образце требуется задать граничные условия (для чего используются внешние узлы) и начальные условия в каждом из узлов.



**Рис. 1.** Пример сгенерированного образца: слева — регулярная сетка, до преобразования (этап 1), справа — нерегулярная сетка, после преобразования (этап 2)

Моделирование псевдослучайного распределения производится посредством метода Бокса-Мюллера, позволяющего симулировать распределение Гаусса. Таким образом, для каждого из экспериментов имеем модель, которая определяется параметром среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ . При  $\sigma=0$  имеем случай равномерной решетки.

#### Решение задачи вычисления поля давления

Введем некоторые новые обозначения, которые позволят визуализировать результаты проведенных расчетов. Введем декартову систему координат с осями, параллельными связям ионной решетки, имеющую начало в углу образца. Теперь мы построим плоскость, проходящую через центр какого-либо узла модели и перпендикулярную одной из осей координат (значение координаты на этой оси в каждой точке плоскости назовем «осевой координатой», а саму ось — «основной»), и будем в качестве основных характеристик модели использовать средние значения давления и насыщенности первой жидкости в узлах на таких поверхностях. Такую поверхность будем называть средней, а ее координату обозначим  $L_{avg}$ . Среднее давление на этой поверхности обозначим  $P_{avg}$ . Насыщенность вытесняющей жидкости на этой поверхности обозначим  $S_{avg}$ .

По умолчанию при моделировании использовались следующие параметры (основная ось — ось 1) (табл.).

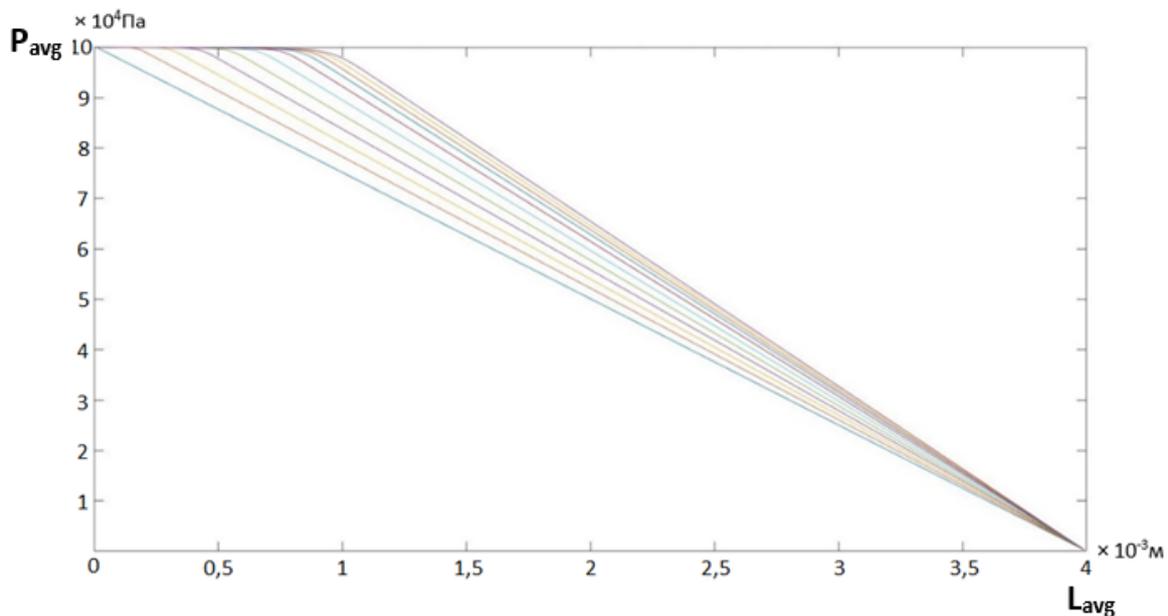
В каждом из экспериментов начальное давление в узлах задается как равномерно убывающее, начиная от значения давления на поверхности вытеснения и заканчивая значением на поверхности вытекания жидкости из образца.

В эксперименте проанализируем возможные изменения параметров процесса фильтрации при изменении исходной модели (ионной решетки) способом смещения узлов модели. Будем сравнивать поведение модели при двух значениях  $\sigma$ :  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$ . Будем определять время процесса по количе-

Таблица

## Параметры моделирования

Геометрия модели	
Размеры моделируемого образца, по каждому измерению, м	0.02x0.005x0.005
Размеры модели, количество внутренних узлов по каждому измерению	200x50x50
Полуширина канала (половина стороны квадрата), м	5.0e-006
Половина характерного размера узла (половина длины стороны куба), м	5.0e-006
Параметры жидкости	
Вязкость первой жидкости, вытесняющей, Ст	0.001
Вязкость второй жидкости, вытесняемой, Ст	0.1
Перепад давления, давление на поверхности вытеснения, Па	1.0e+005
Значение давление на поверхности высачивания, Па	1.0e+002



**Рис. 2.** Зависимость среднего давления на контрольных поверхностях от осевой координаты в образце, созданном при  $\sigma = 0$ . На горизонтальной оси приведены координаты средней поверхности  $L_{avg}$  (м), на вертикальной оси – среднее по поверхности давление  $P_{avg}$  (Па)

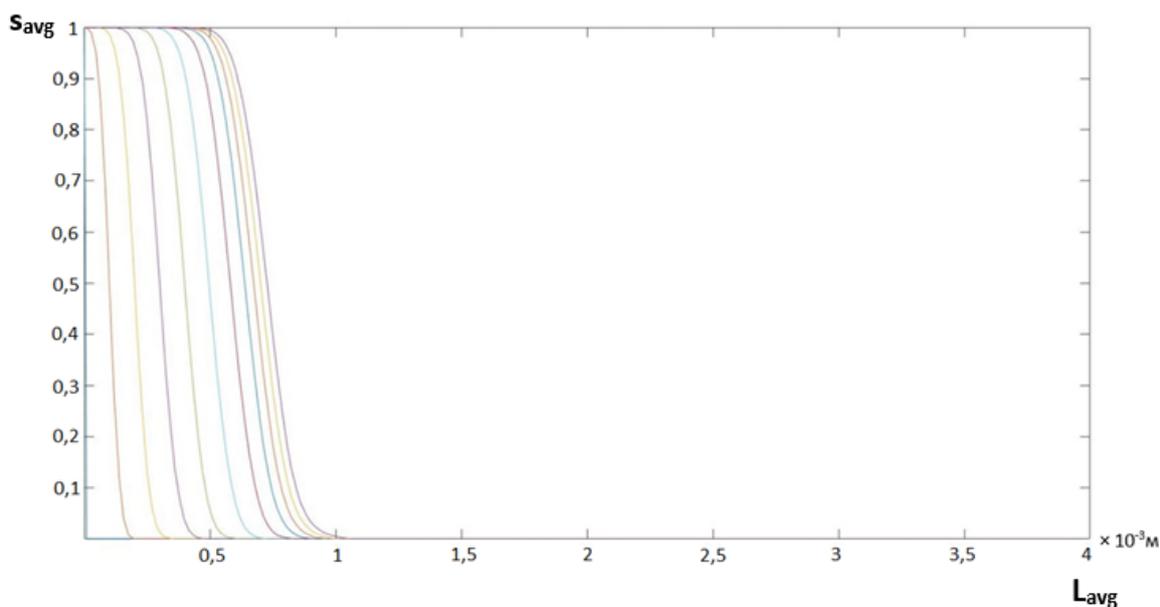
ству пройденных шагов по времени. В данном эксперименте совершаются два расчета с  $dsteps=100$ . В визуализации отображается распределение давления в модели каждые 10 итераций.

Обратимся к графикам давления 2 и 4. Как было ранее указано, единственная возможность изменения параметров жидкости во внутренних узлах сетевой модели – это появление потока жидкости из соседних узлов. Вследствие перепада давления жидкости начинают двигаться от поверхности вытеснения в сторону поверхности вытекания жидкости. Как можно видеть, процесс вытеснения жидкости во втором случае ( $\sigma = 1$ ) происходит значительно медленнее, чем в первом. Такие изменения структуры уменьшили показатель проницаемости образца.

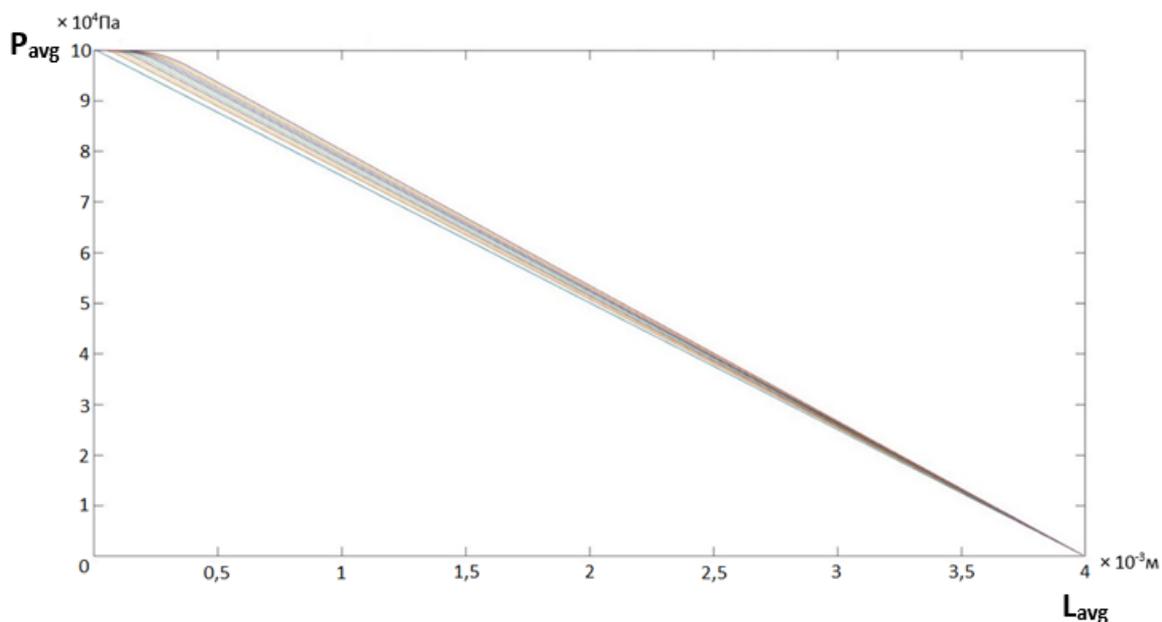
Обратимся к графикам 3 и 5. Помимо указанных выше фактов, стоит заметить, что распределение давления меняется значительно активнее, чем движение вытесняющей жидкости внутрь образца. Таким образом, давление вытесняемой жидкости растет, и она начинает двигаться в сторону поверхности вытекания жидкости.

Как можно видеть из полученных результатов, задание модели через изменение ионной решетки позволяет симулировать сложную геометрию пор.

В каждом из случаев  $t \approx 15$  часов (время моделирования) и  $C=0.5$  (аналог числа Куранта).



**Рис. 3.** Зависимость средней насыщенности вытесняющей (первой) жидкости на контрольных поверхностях от осевой координаты в образце, созданном при  $\sigma = 0$ . На горизонтальной оси приведены координаты средней поверхности  $L_{avg}$  (м), на вертикальной оси — средняя по поверхности насыщенность  $S_{avg}$  (безразмерная величина)

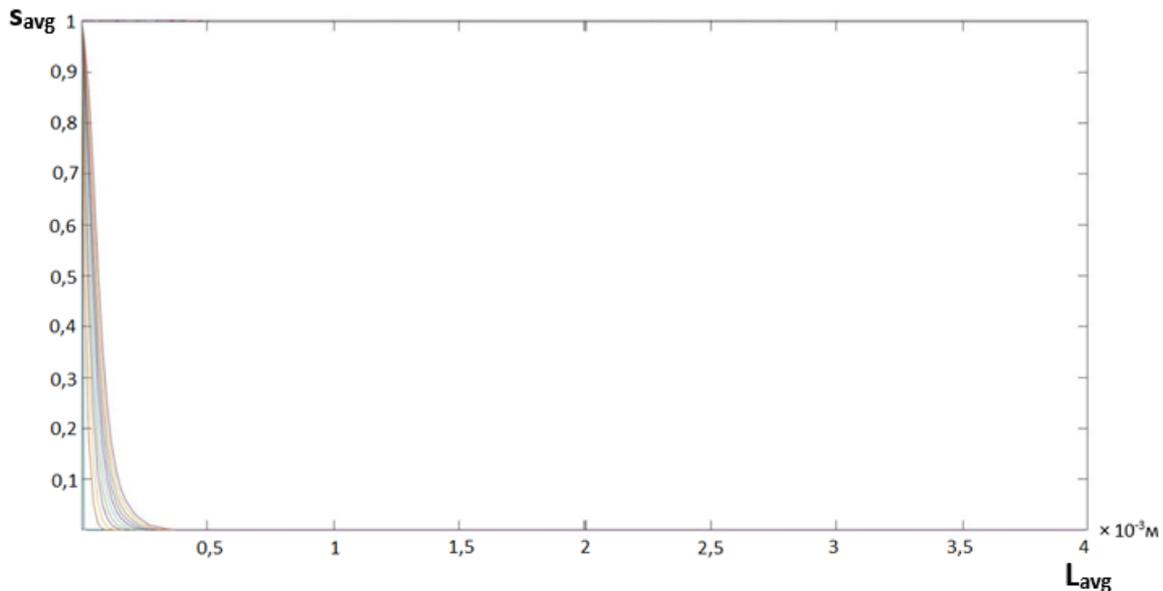


**Рис. 4.** Зависимость среднего давления на контрольных поверхностях от осевой координаты в образце, созданном при  $\sigma = 1$ . На горизонтальной оси приведены координаты средней поверхности  $L_{avg}$  (м), на вертикальной оси — среднее по поверхности давление  $P_{avg}$  (Па)

### Заключение

В данной работе дан краткий обзор существующих моделей пористой среды, включая сетевые модели. Предложен новый способ построения фиктивного порового пространства на основе сетевой модели пористой среды, сформулирована математическая модель течения в данной среде.

На примере задачи определения поля давлений и концентраций жидкости при вытеснении из пористой среды продемонстрирована возможность данного способа построения фиктивного порового пространства симулировать пористые среды разных проницаемостей.



**Рис. 5.** Зависимость средней насыщенности вытесняющей (первой) жидкости на контрольных поверхностях от осевой координаты в образце, созданном при  $\sigma = 1$ . На горизонтальной оси приведены координаты средней поверхности  $L_{avg}$  (м), на вертикальной оси — средняя по поверхности насыщенность  $S_{avg}$  (безразмерная величина)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольпин С. Г., Ломакина О. В., Афанаскин И. В., Юдин В. А. Обоснование гидродинамической модели пласта-коллектора баженовской свиты. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):78–86.
2. Душин В. Р., Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Макеева М. Н., Манахова А. Н. Моделирование вытеснения жидкостей из пористых сред с учетом химических взаимодействий между фазами. *Успехи кибернетики*. 2022;3(1):20–27.
3. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Вайсман Ю. Г. Многократная пропитка пористой среды в условиях микрогравитации: экспериментальные исследования и математическое моделирование. *Успехи кибернетики*. 2022;3(2):24–30.
4. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Фахретдинова Р. Р. Вычислительное моделирование процесса очистки трещины ГРП и процесса вытеснения нефти из области, содержащей трещину ГРП. *Успехи кибернетики*. 2022;3(3):14–21.
5. Никитин В. Ф., Скрылева Е. И., Манахова А. Н. Учет неустойчивости фронта течения жидкости сквозь пористую среду в условиях пониженной гравитации и при наличии химических взаимодействий между фазами. *Успехи кибернетики*. 2023;4(3):72–85.
6. Паремская Л. А. Образование «вязких пальцев» на межфазных границах при совместном вытеснении трех вязких жидкостей из пористой среды. *Успехи кибернетики*. 2023;4(4):22–31.
7. Hazen A. Some Physical Properties of Sands and Gravels, with Special Reference to their Use in Filtration. 24th Annual Report. *Massachusetts State Board of Health*. USA; 1892. P. 539–556.
8. Slichter C. S. Theoretical Investigation of the Motion of Groundwaters. *USGS Annual Report*. 1899;19(Part II):295–384.
9. Kozeny J. Ueber Kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Sitzungsber Akad. Wiss. Wien*; 1927;136(2a):271–306.
10. Carman P. C. Fluid Flow through Granular Beds. *J Soc Chem Ind*. 1938;57:225.
11. Childs E., Collis-George C. N. Interaction of Water and Porous Materials. Soil Geometry and Soil-Water Equilibria. *Discussions of the Faraday*. 1948;3:78–85.
12. Gates J. I., Tempelaar Lietz W. *API Drill. & Prod. Prac*. New York; 1950.
13. Fatt I. The Network Model of Porous Media. *Trans. AIME*. 1956;207:144.
14. Бетелин В. Б., Никитин В. Ф., Смирнов Н. Н. Сетевая модель пор. *Вестник кибернетики*. 2017;4:19–30.