DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-01

ФАЗОВАЯ НЕЙРОСЕТЬ ХОПФИЛДОВА ТИПА

Б. В. Крыжановский
Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0901-6370, ✍ kryzhanov@mail.ru

Аннотация: исследованы свойства полносвязной нейронной сети, построенной на фазовых нейронах по правилу Хэбба. Сигналы, протекающие по межсвязям сети, представляют собой единичные импульсы с определенными фазами. Решающее правило срабатывания нейрона задается следующим образом: в суммарном сигнале, поступающем на вход нейрона, выделяется фазовая компонента с наибольшей амплитудой, и нейрон испускает единичный импульс с такой же фазой. Фазы, кодирующие компоненты векторов ассоциативной памяти, распределены случайным образом. Для оценки ошибки распознавания применяется техника Чернова–Чебышёва, не зависящая от типа распределения кодирующих фаз. Показано, что объем ассоциативной памяти такой нейросети в четыре раза больше, чем у классической сети хопфилдова типа, оперирующей бинарными паттернами. Соответственно, в четыре раза больше и радиус области притяжения.

Ключевые слова: фазовый нейрон, ассоциативная память, правило Хэбба, распознавание.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИИСИ РАН № FNEF-2024-0001.

Для цитирования: Крыжановский Б. В. Фазовая нейросеть хопфилдова типа. *Успехи кибернетики*. 2024;5(2):8–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-01.

Поступила в редакцию: 27.04.2024. *В окончательном варианте: 28.05.2024.*

HOPFIELD TYPE PHASE NEURAL NETWORK

B. V. Kryzhanovsky
Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0901-6370, ✍ kryzhanov@mail.ru

Abstract: this study examines the properties of a fully connected neural network composed of phase neurons, following the Hebbian learning rule. The signals transmitted through the network’s interconnections are single pulses with specific phases. A neuron’s firing rule is defined as follows: among the total signals received at a neuron’s input, the phase component with the highest amplitude is identified, and the neuron emits a single pulse with the same phase. The phases encoding the components of associative memory vectors are randomly distributed. To estimate the recognition error, we employ the Chernov-Chebyshev technique, which is independent of the phase encoding distribution type. Our findings demonstrate that the associative memory capacity of this neural network is four times greater than that of a traditional Hopfield network that operates with binary patterns. Consequently, the radius of the attraction region is also four times larger.

Keywords: phase neuron, associative memory, Hebbian learning rule, recognition.

Acknowledgements: this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences.

Cite this article: Kryzhanovsky B. V. Hopfield Type Phase Neural Network. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(2):8–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-01.

Original article submitted: 27.04.2024. *Revision submitted: 28.05.2024.*

Введение

Динамика широко известных бинарных моделей нейронных сетей [1, 2] состоит в том, что выход каждого из нейронов определяется знаком воздействующего на него локального поля (знаком суммы входящих сигналов). Ассоциативная память такой сети относительно невелика: $M \sim N/2\ln N$, где N — число нейронов, M — число запоминаемых паттернов [3–7]. Объем памяти нейросети зависит как от способа организации взаимодействия между нейронами, так и от ее динамики (от способа релаксации в устойчивое состояние). Однако разработчики обычно ограничиваются исследованием различного рода нейросетевых архитектур и их особенностей [8–11]. При этом используется стандартный спиновый тип нейросетевой динамики (параллельной или асинхронной), применяемый в модели Хопфилда. В работах [12–15] предложены новые типы нейронов (параметрический и векторный нейроны), функционирующие в q-мерном пространстве, и показано, что память таких нейросетей в q^2 раз выше классических бинарных аналогов. Динамика указанных q-нарных сетей формально описывается динамикой спиновой системы, состоящей из q-мерных спинов Поттса [16–18].

Здесь мы хотим показать, что значительный прогресс может быть также достигнут и за счет изменения динамики нейрона, адаптированной для воплощения в виде реального устройства.

Описание фазовой модели

Рассмотрим систему из N спинов, взаимодействие которых описывается гамильтонианом:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} J_{kr} s_k s_r, \qquad k,r = 1,2,\ldots,N, \tag{1}$$

а матрица межсвязей организована по правилу Хэбба:

$$J_{kr} = \sum_{\mu=1}^{M} s_{\mu k} s_{\mu r} \tag{2}$$

на M эталонных векторах $S_\mu = (s_{\mu 1},\ s_{\mu 2}\ ,\ \ldots,\ s_{\mu N})$, $\mu = 1,\ldots,M$. Диагональные элементы матрицы межсвязей полагаются равными нулю, а воздействующее на k-й нейрон локальное поле вычисляется в традиционным виде $h_k = -\partial E/\partial s_k$:

$$h_k = \sum_{r=1}^{N} J_{kr} s_r. \tag{3}$$

Положим, что сигналы s_k, протекающие по межсвязям, представляют собой единичные импульсы с определенными фазами:

$$s_k = e^{i\varphi_k}. \tag{4}$$

Тогда матрица (2) запишется в виде:

$$J_{kr} = \sum_{\mu=1}^{M} e^{i(\varphi_{\mu k} - \varphi_{\mu k})}. \tag{5}$$

Пусть на вход сети поступает некоторый вектор $S = S_m$, являющийся одним из семейства записанных в памяти паттернов S_μ, $\mu = 1,2,\ldots,M$. Тогда входной сигнал на k-й нейрон (3) примет вид:

$$h_k = \sum_{\mu=1}^{M}\sum_{r\neq k}^{N} e^{i(\varphi_{\mu k} - \varphi_{\mu r} + \varphi_{mr})}. \tag{6}$$

Для выработки решающего правила представим (6) в виде $h_k = He^{i\varphi_{mk}}$, где:

$$H = (N-1) + \sum_{\mu\neq m}^{M}\sum_{r\neq k}^{N} e^{i(\varphi_{\mu k} - \varphi_{\mu r} + \varphi_{mr} - \varphi_{mk})}. \tag{7}$$

Решающее правило таково: в входном сигнале определяется фазовая компонента с наибольшей амплитудой, и k-й нейрон испускает единичный импульс с этой фазой. Нетрудно заметить, что правильное распознавание, т. е. испускание нейроном сигнала $s_k(out) = e^{i\varphi_{mk}}$, соответствующего распознаваемому вектору S_m, происходит при условии:

$$ReH > 0. \tag{8}$$

Распознающая способность сети

Рассмотрим, насколько решающее правило (8) хорошо работает для правильного распознавания подаваемого на вход сети вектора $S = S_m$. Для простоты анализа будем рассматривать случай, когда фазы $\varphi_{\mu k}$случайным образом распределены на отрезке $0 \le \varphi_{\mu k} \le 2\pi$. В этом случае вероятность ошибки распознавания определится в виде:

$$P_{err} = \Pr\left\{\sum_{\mu\neq m}^{M}\sum_{r\neq k}^{N}\cos(\varphi_{\mu k} - \varphi_{\mu r} + \varphi_{mr} - \varphi_{mk}) > (N-1)\right\}. \tag{9}$$

Поскольку фазы $\varphi_{\mu k}$случайным образом распределены на отрезке $0 \le \varphi_{\mu k} \le 2\pi$, то и величины $\theta_l = \varphi_{\mu k} - \varphi_{\mu r} + \varphi_{mr} - \varphi_{mk}$ также случайным образом распределены на отрезке $0 \le \varphi_{\mu k} \le 2\pi$. Здесь индекс l пробегает значения от 1 до $L = (N-1)(M-1)$, однако для простоты выражений будем полагать Nдостаточно большим и заменим всюду $N-1$ на N, т. е. $L = N(M-1)$. Для оценки (9) используем выражение Чернова–Чебышёва, не связанное со статистикой фаз $\varphi_{\mu k}$:

$$P_{err} = \Pr\left\{\sum_{l=1}^{L}\cos\theta_l > N\right\} \le \Pr\left\{e^{\rho\sum_{l=1}^{L}\cos\theta_l} > e^{\rho N}\right\} \le$$

$$\le\ e^{-\rho N}\left\langle \exp\left(\rho\sum_{l=1}^{L}\cos\theta_l\right)\right\rangle\ \le\ e^{-\rho N}\left\langle e^{\rho\cos\theta}\right\rangle^{L}. \tag{10}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение, а ρ — некоторая произвольная величина, изменяя которую можно минимизировать правую часть выражения (10), т. е. найти верхнюю границу ошибки. Поскольку в (10) усреднению подвергается производящая функция модифицированных функций Бесселя:

$$e^{\rho\cos\theta} = I_0(\rho) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\rho)\cdot\cos(k\rho), \tag{11}$$

то в результате усреднения остается только член $I_0(\rho)$, т. е. $\left\langle e^{\rho\cos\theta}\right\rangle = I_0(\rho)$.

С учетом сказанного для вероятности ошибки из (9)–(11) окончательно получим:

$$P_{err} \le R^N, \qquad R = [I_0(\rho)]^{M-1}e^{-\rho}. \tag{12}$$

Здесь мы выделили величину R, зависящую только от ρ и M и не содержащую N, которую мы будем минимизировать по ρ при заданном значении M.

Перейдем к определению минимума по ρ верхней границы ошибки. Наиболее просто это сделать при $M = 2$. В этом случае $R = I_0(\rho)e^{-\rho}$ при $\rho \to \infty$ обращается в ноль. Это означает, что при $M = 2$ сеть распознает входной паттерн безошибочно.

В более общем случае $M > 2$ функция $R = R(\rho)$ имеет минимум при конечных значениях ρ, поскольку при больших значениях параметра ρона экспоненциально нарастает как $R \approx e^{\rho M}/\sqrt{2\pi\rho}$. Минимум функции $R = R(\rho)$определится выражением:

$$M\frac{d}{d\rho}\ln\left[I_0(\rho)\right] = 1. \tag{13}$$

Простой анализ функции $R = R(\rho)$ показывает, что экстремум по ρнаходится на отрезке $0 < \rho < 1$. Более того, с возрастанием $M \gg 1$ точка экстремума стремится к нулю. Соответственно, при $M \gg 1$, используя разложение $I_0(\rho)$в ряд, можно получить из (13) соотношения для оптимального значения параметра ρ:

$$\rho = \frac{1}{2M}. \tag{14}$$

Тогда для верхней границы ошибки распознавания из (12) получим:

$$P_{err} \le e^{-\frac{2N}{M}}. \tag{15}$$

Выражением (15) определяется верхняя граница ошибки распознавания на отдельно взятом нейроне. Вероятность ошибки нейросети в целом в N раз больше. Соответственно, если мы хотим, чтобы сеть распознавала весь паттерн целиком, т. е. не допускала ошибки даже на одном нейроне, то необходимо выполнение условия $N\exp(-2N/M) < 1$. Отсюда мы получаем ограничение на размер ассоциативной памяти рассматриваемой нейросети:

$$M \le M_{\max} = \frac{2N}{\ln N}. \tag{16}$$

Очевидно, что с ростом M при превышении величины $M_{\max}$ сеть начинает все хуже распознавать входящие паттерны, и при некотором значении Mассоциативная память полностью разрушится, т. е. ни один паттерн не будет распознаваться [19]. Исследование такой ситуации требует развития соответствующего статфизического подхода, аналогичного развитому в [20].

Обсуждение результатов

Нами была рассмотрена полносвязная нейросеть, основанная на фазовых нейронах. Выражения (10)–(16) были получены в предположении, что на вход нейросети подается паттерн S_m — неискаженный вариант одного из семейства паттернов $\{S_\mu\}$, прописанных в матрице межсвязей (6). Рассмотрение достаточно легко обобщается на случай, когда на вход нейросети подается вектор $\bar{S}_m$, представляющий собой искаженный вариант вектора S_m. Например, вектор S_m, покрытый мультипликативным шумом. В этом случае в выражении (7) вместо слагаемого $N-1$ следует подставить $(N-1)(1-2p)$, где p — вероятность изменения фазы на π. Проводя все последующие вычисления для объема памяти вместо (16), получим:

$$M_{\max} = \frac{2N}{\ln N}(1-2p).$$

Как видим, наличие искажений может существенно уменьшить величину ассоциативной памяти.

В заключение отметим, что рассмотренный вариант нейросети обладает в четыре раза большим объемом памяти, чем у классической бинарной модели Хопфилда. Соответственно, в четыре раза больше и радиус области притяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopfield J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1982;79:2554–2558.
2. Hebb D. *The Organization of Behavior*. New York: Wiley; 1949. 365 p.
3. Palm G., Sommer F. Information Capacity in Recurrent McCulloch-Pitts Networks with Sparsely Coded Memory States. *Network*. 1992;3:177–186.
4. Kuh A., Dickinson B. Information Capacity of Associative Memory. *IEEE Trans. on Inf. Theory.* 1989;35:59–68.
5. Herz A., Marcus C. Distributed Dynamics in Neural Networks. *Phys. Rev. E*. 1993;47:2155–2161.
6. McEllice R., Posner E. et al. Capacity of the Hopfield Associative Memory. *IEEE Trans. on Inf. Theory.* 1987;33:461–482.
7. Bolle D., Dupont P., Mourik J. van. Stability Properties of Potts Neural Networks with Biased Pattern and Low Loading. *J. Phys. A.* 1991;24:1065.
8. Kazanovich Y., Borisyuk R. Dynamics of Neural Networks with Central Element. *Neural Networks*. 1999;12:441–454.
9. Kryzhanovsky B. V., Magomedov B. M., Mikaelian A. L. A Domaine Model of Neural Network. *Doklady Mathematics*. 2005;71:310–314.
10. Vogt H., Zippelius A. Invariant Recognition in Potts-Glass Neural Network. *J. Phys. A.* 1992;25:2209.
11. Sompolinsky H. Neural Network with Non-linear Synapses and Static Noise. *Phys. Rev. A.* 1986;34:2571.
12. Крыжановский Б. В., Микаэлян А. Л. О распознающей способности нейросети на нейронах с параметрическим преобразованием частот. *Доклады АН. Сер. Мат. физика.* 2002;383(3):318–321.
13. Крыжановский Б. В., Микаэлян А. Л. Ассоциативная память, способная распознавать сильно скоррелированные образы. *Доклады АН. Сер. Информатика.* 2003;390(1):27–31.

14. Mikaelian A. L., Kryzhanovsky B. V., Litinskii L. B. Parametrical Neural Network. *Optical Memory&Neural Network*. 2003;12(3):227–236.
15. Kryzhanovsky B. V., Litinskii L. B., Mikaelian A. L. Vector-Neuron Models of Associative Memory. *2004 IEEE International Joint Conference on Neural Networks*. Budapest; 2004. P. 909–1004.
16. Kanter I. Potts-Glass Models of Neural Networks. *Phys. Rev. A*. 1988;37(7):2739.
17. Bolle D., Dupont P., Huyghebaert J. Thermodynamic Properties of the q-State Potts-Glass Neural Network. *Phys. Rev. A.* 1992;45:4194.
18. Wu F. Y. The Potts Model. *Rev. Mod. Phys.* 1982;54:235.
19. Amit D. J., Gutfreund H., Sompolinsky H. Information Storage in Neural Networks with Low Levels of Activity. *Phys. Rev. A.* 1987;35:2293.
20. Karandashev I., Kryzhanovsky B., Litinskii L. Weighted Patterns as a Tool to Improve the Hopfield Model. *Physical Review E.* 2012;85:041925.