

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-05

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ АЛГОРИТМА ВАНГА–ЛАНДАУ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА**В. И. Егоров^a, Б. В. Крыжановский^b***Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация*^a ✉ rvladegorov@rambler.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, kryzhanov@mail.ru

Аннотация: проведен анализ точности результатов и скорости выполнения алгоритма Ванга–Ландау при расчете плотности состояний для двумерной модели Изинга. Показано, что вычисление плотности состояний одновременно по энергии и намагниченности способствует увеличению точности расчета статистических моментов энергии. Относительная ошибка определения плотности состояний по энергии уменьшается с ростом размера решетки. Обнаружено, что для больших решеток невозможно заранее оценить время выполнения алгоритма, так как критерий перехода в режим $1/t$ не выполняется.

Ключевые слова: алгоритм Ванга–Ландау, плотность состояний, скорость алгоритма, критический переход.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИИСИ РАН № FNEF-2024-0001.

Для цитирования: Егоров В. И., Крыжановский Б. В. Анализ точности и производительности алгоритма Ванга–Ландау при расчете плотности состояний для модели Изинга. *Успехи кибернетики*. 2024;5(2):46–52. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-05.

*Поступила в редакцию: 14.05.2024.**В окончательном варианте: 25.05.2024.***ANALYZING THE ACCURACY AND PERFORMANCE OF THE WANG-LANDAU ALGORITHM FOR CALCULATING THE DENSITY OF STATES IN THE ISING MODEL****V. I. Egorov^a, B. V. Kryzhanovsky^b***Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation*^a ✉ rvladegorov@rambler.ru^b ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, kryzhanov@mail.ru

Abstract: we analyzed the accuracy and performance of the Wang-Landau algorithm in calculating the density of states for the two-dimensional Ising model. Our findings indicate that calculating the density of states simultaneously by energy and magnetization enhances the accuracy of energy moment estimations. As the lattice size increases, the relative error in the density of states decreases. However, for large lattices, it is not possible to estimate the execution time of the algorithm in advance, as the criterion for switching to the $1/t$ mode is never met.

Keywords: Wang-Landau algorithm, density of states, algorithm performance, critical transition.

Acknowledgements: this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences.

Cite this article: Egorov V. I., Kryzhanovsky B. V. Analyzing the Accuracy and Performance of the Wang-Landau Algorithm for Calculating the Density of States in the Ising Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(2):46–52. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-05.

*Original article submitted: 14.05.2024.**Revision submitted: 25.05.2024.***Введение**

Алгоритм Ванга–Ландау (ВЛ) [1] является эффективным методом, позволяющим напрямую оценить плотность состояния системы, т. е. вырожденность ее энергетических уровней. Особенно интересной возможностью алгоритма является получение совместной плотности состояний по энергии

и другим параметрам, например, намагниченности. Используя такую совместную плотность состояний, можно получить плотность распределения по энергии и намагниченности при любых значениях температуры и внешнего поля. Известно, что в классической реализации алгоритма в определенный момент происходит сатурация ошибки и дальнейшие вычисления не способствуют увеличению точности оценки плотности состояний. В случае двумерной модели Изинга это приводит к флуктуационной ошибке порядка 10^{-4} . Хотя такая ошибка кажется на первый взгляд достаточно малой, погрешность вычисления измеряемых в «реальном эксперименте» величин, таких как теплоемкость, может быть значительной. Стоит отметить работу [2], где было показано, что для избежания сатурации ошибки вычислений модификационный множитель должен уменьшаться в процессе моделирования как $1/t$, где t — время моделирования. Однако до сих пор не был выполнен анализ применимости данной схемы к вычислению совместной плотности состояний.

Как отмечают некоторые авторы, например, [3], основной проблемой при выполнении расчетов по алгоритму Ванга–Ландау является то, что в процессе случайного блуждания сложно достичь состояний с низкой энергией. В результате при моделировании решеток средних и больших размеров значительно увеличивается время выполнения алгоритма. Возможным способом решения этой проблемы является распараллеливание алгоритма и ограничение случайного блуждания в некоторой области энергии и намагниченности. Например, в работах [4, 5] случайное блуждание выполняется путем перевода двух спинов с противоположными значениями, тем самым сохраняется постоянное значение намагниченности. Однако, как отмечено в работах [6, 7], разделение пространства энергий приводит к ошибке вычислений, поэтому необходимо введение обмена конфигураций между подокнами и их взаимное перекрытие.

В этой работе мы провели анализ эффективности и точности алгоритма Ванга–Ландау по схеме $1/t$ при вычислении обычной и совместной плотности состояний для двумерной модели Изинга. При этом исследовалась точность расчета не только самой плотности состояний, но и вычисляемой с ее помощью теплоемкости.

Расчет одномерной плотности состояний $g(E)$

Для расчета плотности состояний $g(E)$, то есть числа конфигураций с энергией E , модели Изинга на решетке $L \times L$ с периодическими граничными условиями использовался описанный ниже алгоритм. Сначала задавалось начальное приближение для плотности состояний $g(E) = 1$, начальное значение модификационного множителя $f = e$ и инициализировалась гистограмма $H(E) = 0$. Далее выполнялось случайное блуждание по конфигурациям системы путем переворота случайного спина. Переход в новую конфигурацию $i \rightarrow j$ принимался с вероятностью

$$P(i \rightarrow j) = \min \left(\frac{g(E_i)}{g(E_j)}, 1 \right). \quad (1)$$

Вне зависимости от того, принята новая конфигурация или нет, для энергии текущей конфигурации выполняется обновление плотности состояний и гистограммы:

$$g(E) \rightarrow f \cdot g(E), \quad H(E) \rightarrow H(E) + 1. \quad (2)$$

Когда для всех значений энергии гистограмма отлична от нуля $H(E) > 0$, модификационный множитель уменьшается $f \rightarrow \sqrt{f}$ и гистограмма обнуляется. Данный процесс продолжается до тех пор, пока $\ln f > 1/t$, где $t = n/N_E$, n — общее число попыток переворота спина с начала моделирования, $N_E = L^2 - 1$ — число возможных значений энергий. Как только выполняется условие $\ln f \leq 1/t$, процесс моделирования изменяется: модификационный множитель меняется каждый шаг моделирования согласно соотношению $\ln f = 1/t$, а гистограмма посещения состояний больше не используется. Моделирование прекращается, когда $\ln f < \ln f_{final} = 5 \cdot 10^{-8}$. Полученные плотности состояний были перенормированы таким образом, чтобы значение $g(E_0)$, где E_0 — основное состояние, было равно двум. Здесь стоит отметить, что общее число итераций (попыток переворота спина) за все время моделирования составляет $N_E / \ln f_{final} = 2 \cdot 10^7 (L^2 - 1)$, что позволяет заранее оценить время выполнения алгоритма.

По данному алгоритму были рассчитаны плотности состояний $g(E)$ для решеток с линейным размером от $L = 10$ до $L = 256$. Некоторые из полученных зависимостей $G(E) = \ln g(E)$ показаны

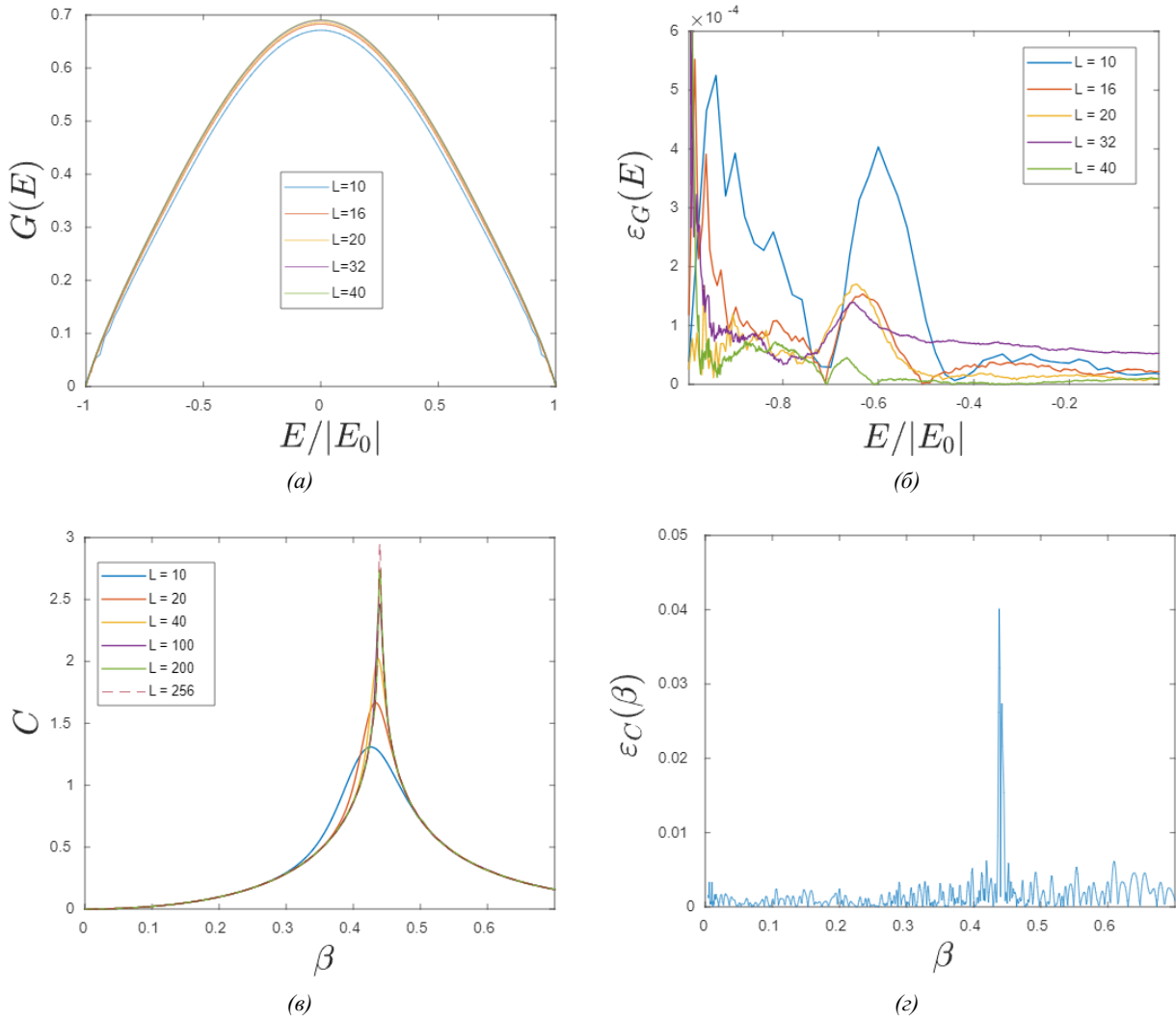


Рис. 1. Результаты расчета одномерной плотности состояний $g(E)$. (а) Зависимости логарифма плотности состояний $G(E)$, полученные в результате моделирования. (б) Относительная ошибка $G(E)$ по сравнению с точным значением. (в) Температурные зависимости теплоемкости $C(\beta)$, рассчитанные по результатам моделирования. (г) Относительная ошибка рассчитанной теплоемкости для решетки $L = 256$

на рисунке 1а. Для оценки точности результатов моделирования было проведено сравнение с аналитическими зависимостями для двумерной модели Изинга, рассчитанными по методу из работы [8]. Также было проведено сравнение температурных зависимостей теплоемкости $C(\beta)$ ($\beta = 1/k_B T$ — обратная температура), рассчитанных по результатам моделирования (рис. 1в), с точными зависимостями, полученными из статсуммы Кауфман [9]. Определим относительную ошибку логарифма плотности состояний и теплоемкости следующим образом:

$$\epsilon_G(E) = \left| \frac{G(E) - G_{ex}(E)}{G(E) + G_{ex}(E)} \right|, \quad \epsilon_C(\beta) = \left| \frac{C(\beta) - C_{ex}(\beta)}{C(\beta) + C_{ex}(\beta)} \right|, \quad (3)$$

где $G_{ex}(E)$ и $C_{ex}(\beta)$ — точные значения логарифма плотности состояний и теплоемкости.

Графики относительной ошибки логарифма плотности состояний $\epsilon_G(E)$ показаны на рисунке 1б, а средние $\langle \epsilon_G(E) \rangle$ и максимальные значения ошибки $\max(\epsilon_G(E))$ представлены в таблице 1. Метод из работы [8] не позволяет рассчитать плотность состояний для решеток с $L > 40$, поэтому для больших решеток нельзя оценить точность непосредственно самой плотности состояний. Из рисунка 1б видно, что ошибка в основном имеет систематический характер со сравнительно небольшими флуктуациями. Для всех зависимостей можно выделить две точки, где ошибка имеет максимум. Первая точка

находится вблизи основного состояния, а вторая — вблизи критического значения внутренней энергии. При этом с ростом размера решетки ошибка в целом уменьшается. Исключение составляют результаты для решетки $L = 32$, однако в данном случае необычно большое значение ошибки обусловлено неудачным выбором нормировки. Отметим, что мы пробовали нормировать плотность состояний по общему числу конфигураций, но такая нормировка, как правило, имела худшее согласие с точными значениями. Среднее значение ошибки $\langle \epsilon_G(E) \rangle$ для большинства решеток имеет порядок 10^{-5} , а максимальное значение $\max(\epsilon_G(E)) - 10^{-4}$ (см. табл. 1). При этом в целом $\langle \epsilon_G(E) \rangle$ уменьшается с ростом размера решетки L , а $\max(\epsilon_G(E))$ — увеличивается.

Используя полученную в результате моделирования плотность состояний $g(E)$, мы рассчитали температурные зависимости теплоемкости $C(\beta)$ в интервале β от 0.001 до 0.7 с шагом 0.001 (см. рис. 1в). На рисунке 1г показана ошибка $\epsilon_C(\beta)$ для решетки с $L = 256$. Видно, что ошибка носит флуктуационный характер и имеет максимум в критической точке. Среднее значение ошибки $\langle \epsilon_C(\beta) \rangle$ имеет порядок 10^{-4} – 10^{-3} , а максимальное значение $\max(\epsilon_C(\beta)) - 10^{-3}$ – 10^{-2} (см. табл. 1). И среднее, и максимальное значение ошибки увеличиваются с ростом размера решетки.

Отметим также особенности выполнения схемы $1/t$ при расчете одномерной плотности состояний $g(E)$. Обозначим за t_0 значение t , при котором изменяется процесс моделирования, то есть происходит переход от стандартной схемы алгоритма к схеме $1/t$. Из таблицы 1 видно, что значение t_0 увеличивается с ростом размера решетки L , то есть переход на новую схему происходит позднее. Для решетки $L = 256$ переход на схему $1/t$ не происходит вообще, так как все время моделирования выполняется условие $\ln f > 1/t$. Вследствие этого для решеток размера $L \geq 256$ невозможно заранее оценить длительность выполнения алгоритма Ванга–Ландау при выбранном конечном значении модификационного множителя $f_{final} = \exp(5 \cdot 10^{-8})$.

Таблица 1

Результаты расчета одномерной плотности состояний $g(E)$. L — линейный размер решетки, N_E — число возможных значений энергии, $\langle \epsilon_G(E) \rangle$ и $\max(\epsilon_G(E))$ — средняя и максимальная ошибка логарифма плотности состояний, $\langle \epsilon_C(\beta) \rangle$ и $\max(\epsilon_C(\beta))$ — средняя и максимальная ошибка теплоемкости, t_0 — шаг моделирования, на котором происходит переход алгоритма в режим $1/t$

L	N_E	$\langle \epsilon_G(E) \rangle$	$\max(\epsilon_G(E))$	$\langle \epsilon_C(\beta) \rangle$	$\max(\epsilon_C(\beta))$	t_0
10	99	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^3$
12	143	$9.7 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$6.5 \cdot 10^3$
14	195	$8.2 \cdot 10^{-5}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^4$
16	255	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^4$
18	323	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^4$
20	399	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$9.7 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^4$
32	1023	$8.2 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^5$
40	1599	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^5$
100	9999	-	-	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^6$
150	22499	-	-	$2.4 \cdot 10^{-3}$	0.0146	$9.8 \cdot 10^6$
200	39999	-	-	$1.9 \cdot 10^{-3}$	0.0569	$1.2 \cdot 10^7$
256	65535	-	-	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.0401	-

Таким образом, с ростом размера решетки L эффективность алгоритма Ванга–Ландау значительно уменьшается. Хотя средняя ошибка оценки плотности состояний уменьшается, ошибка теплоемкости, рассчитанной с помощью этой плотности, увеличивается. При этом для больших решеток становится невозможно заранее оценить время выполнения алгоритма.

Расчет совместной плотности состояний $g(E, M)$

Теперь рассмотрим вычисление совместной плотности состояний $g(E, M)$ по энергии E и намагниченности M с использованием схемы $1/t$. Время моделирования теперь определяется как $t = n/N_{E,M}$, где $N_{E,M}$ — общее число возможных комбинаций энергии и намагниченности. Число $N_{E,M}$ (см. табл. 2) определялось по результатам предварительного моделирования по алгоритму Ванга–Ландау без обновления значения модификационного множителя. Мы смогли рассчитать плотность состояний $g(E, M)$ только для решеток небольшого размера, так как число $N_{E,M}$ достаточно большое и требуется

большое количество, чтобы достичь конечного значения модификационного множителя. На рисунке 2а показан график $G(E, M) = \ln g(E, M)$ для наибольшей из рассмотренных нами решеток ($L = 28$). Нормировка $g(E, M)$ также выполнялась по основному состоянию.

Таблица 2

Результаты расчета совместной плотности состояний $g(E, M)$. $N_{E, M}$ — общее число возможных комбинаций энергии и намагниченности. Для расшифровки остальных условных обозначений см.

подпись к таблице 1

L	$N_{E, M}$	$\langle \epsilon_G(E) \rangle$	$\max(\epsilon_G(E))$	$\langle \epsilon_l(\beta) \rangle$	$\max(\epsilon_l(\beta))$	t_0
10	4200	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^3$
12	8972	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^4$
14	16982	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^4$
16	29430	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^4$
18	47724	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^4$
20	73448	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^4$
24	154530	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^5$
28	289252	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^5$

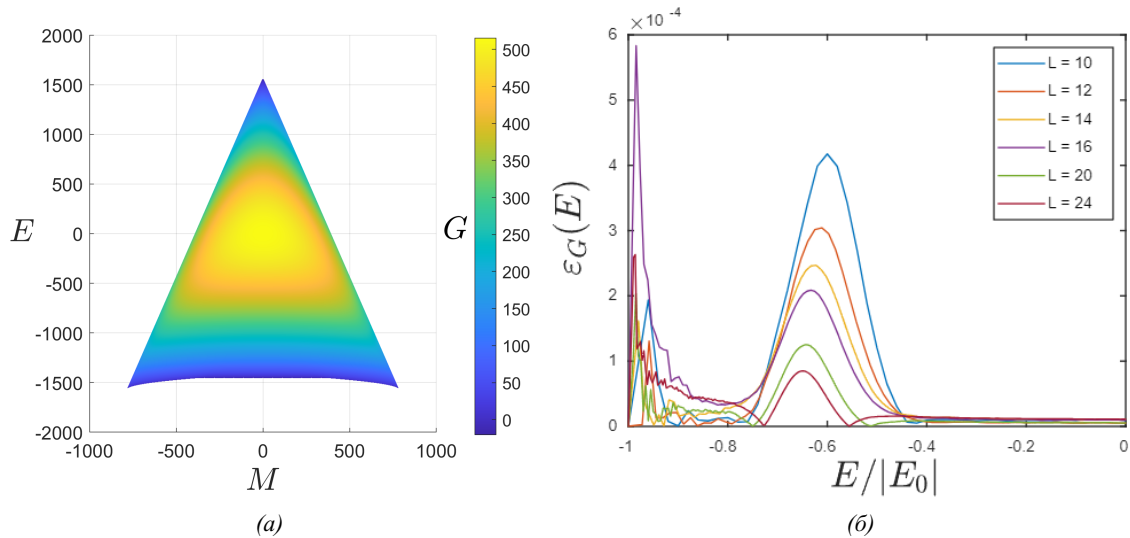


Рис. 2. (а) Логарифм совместной плотности состояний $G(E, M)$. Данные получены в результате моделирования для решетки $L = 28$. (б) Относительная ошибка $G(E)$, полученного из $g(E, M)$ в результате суммирования, по сравнению с точным значением

Используя совместную плотность состояний $g(E, M)$ путем суммирования по M , мы получили плотность состояний по энергии $g(E) = \sum_M g(E, M)$. Графики относительной ошибки этой плотности $\epsilon_G(E)$ (см. рис. 2б) являются гораздо более гладкими по сравнению с результатами непосредственного расчета одномерной плотности состояний. Флуктуации на этих зависимостях присутствуют только вблизи энергии основного состояния. Средняя относительная ошибка $\langle \epsilon_G(E) \rangle$ уменьшилась приблизительно в два раза для большинства решеток (см. табл. 2). Точность оценки температурных зависимостей теплоемкости также увеличилась почти на порядок (табл. 2).

Точные значения совместной плотности состояний $g(E, M)$ для двумерной модели Изинга неизвестны, однако можно рассчитать среднюю энергию $\bar{E}$, дисперсию энергии D и последующие статистические моменты при заданном значении намагниченности M [11]. В случае двумерной модели Изинга средняя энергия и дисперсия энергии определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{ex}(M) &= E_0 \frac{(N - 2n)^2 - N}{N(N - 1)}, \\ D_{ex}(M) &= 2N \frac{(1 - m^2)(1 - m^2 - 4\delta + 4\delta^2)}{(1 - \delta)(1 - 2\delta)(1 - 3\delta)} \left(1 - \frac{4}{N - 1}\right),\end{aligned}\quad (4)$$

где $N = L^2$, $\delta = 1/N$, $m = M/N$, $n = (1 - m)/2$.

Аналогично выражению (3) определим относительную ошибку средней энергии и дисперсию энергии при заданном значении M :

$$\epsilon_{\bar{E}}(M) = \left| \frac{\bar{E}(M) - \bar{E}_{ex}(M)}{\bar{E}(M) + \bar{E}_{ex}(M)} \right|, \quad \epsilon_D(M) = \left| \frac{D(M) - D_{ex}(M)}{D(M) + D_{ex}(M)} \right|, \quad (5)$$

где $\bar{E}(M)$ и $D(M)$ — значения средней энергии и дисперсии энергии, рассчитанные через совместную плотность состояний $g(E, M)$. Величины средней ошибки $\langle \epsilon_{\bar{E}}(M) \rangle$ и $\langle \epsilon_D(M) \rangle$ для различных решеток представлены в таблице 3. Видно, что для всех решеток средняя величина ошибки порядка 10^{-4} , то есть результаты моделирования хорошо совпадают с точными значениями.

Таблица 3

Средняя ошибка энергии и дисперсии энергии при фиксированном значении намагниченности M

L	$\langle \epsilon_{\bar{E}}(M) \rangle$	$\langle \epsilon_D(M) \rangle$
10	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$
12	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$
14	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$
16	$8.4 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$
18	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$
20	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$1.26 \cdot 10^{-4}$
24	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
28	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$

В заключение параграфа отметим, что величина t_0 , то есть номер шага, при котором происходит переход в режим $1/t$, растет с увеличением размера решетки (табл. 2). То есть при расчете совместной плотности состояний для больших решеток могут возникать проблемы с оценкой времени выполнения алгоритма, так же, как и при расчете одномерной плотности состояний.

Обсуждение результатов

Был проведен анализ эффективности и точности алгоритма Ванга–Ландау по схеме $1/t$ при вычислении одномерной и совместной плотности состояний для двумерной модели Изинга. Показано, что вычисление плотности состояний одновременно по энергии и намагниченности способствует увеличению точности расчета статистических моментов энергии (в частности, дисперсии). Обнаружено, что алгоритм Ванга–Ландау при вычислении плотности состояний дает систематическую ошибку, величина которой уменьшается с ростом размера решетки. Однако производительность алгоритма при этом значительно уменьшается, и для больших решеток становится невозможным предварительно оценить время выполнения вычислений.

Предложенный алгоритм естественным образом использует разбиение конфигурационного пространства состояний системы на непересекающиеся области, что позволяет вычислять их характеристики независимо и параллельно. При этом время работы алгоритма уменьшается пропорционально линейному размеру решетки; появляется дополнительная возможность учета распределения намагниченностей; повышается точность вычислений; в отличие от классического алгоритма Ванга–Ландау, разработанный алгоритм позволяет описывать систему в присутствии магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang F., Landau D. P. Efficient, Multiple-Range Random Walk Algorithm to Calculate the Density of States. *Physical Review Letters*. 2001;86(10):2050.

2. Belardinelli R. E., Pereyra V. D. Wang–Landau Algorithm: A Theoretical Analysis of the Saturation of the Error. *The Journal of Chemical Physics*. 2007;127:18.
3. Bhar S., Roy S. K. A Comparison of the Performance of Wang–Landau–Transition–Matrix Algorithm with Wang–Landau Algorithm for the Determination of the Joint Density of States for Continuous Spin Models. *Computer Physics Communications*. 2013;184(5):1387–1394.
4. Petrov P., Averkiev N., Bogoslovskiy N. Analytical and Numerical Calculations of the Magnetic Properties of a System of Disordered Spins in the Ising Model. *St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 2023;65(1):7–13.
5. Bogoslovskiy N. A., Petrov P. V., Averkiev N. S. Phase Diagram of a Ferromagnetic Semiconductor: Origin of Superparamagnetism. *Physical Review B*. 2024;109(2):024436.
6. Vogel T., Li Y. W., Wüst T., Landau D. P. Generic, Hierarchical Framework for Massively Parallel Wang–Landau Sampling. *Physical Review Letters*. 2013;110:210603.
7. Vogel T., Li Y. W., Wüst T., Landau D. P. Scalable Replica-Exchange Framework for Wang–Landau Sampling. *Physical Review E*. 2014;90(2):023302.
8. Beale P. D. Exact Distribution of Energies in the Two-Dimensional Ising Model. *Physical Review Letters*. 1996;76(1):78.
9. Ferdinand A. E., Fisher M. E. Bounded and Inhomogeneous Ising Models. I. Specific-Heat Anomaly of a Finite Lattice. *Physical Review*. 1969;185(6):832.
10. Kryzhanovsky B., Litinskii L. Generalized Approach to Description of Energy Distribution of Spin System. *Optical Memory and Neural Networks*. 2015;24:165–185.
11. Крыжановский Б. В., Литинский Л. Б. Обобщенное уравнение Брегга–Вильямса для систем с произвольным дальним действием. *Доклады АН*. 2014;459(6):680–684.