

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-04

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТРИЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. Калманович^{1,a}, А. А. Картанов^{2,b}

¹ Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского, г. Калуга, Российская Федерация

² ООО «КАМИН-Классик», г. Калуга, Российская Федерация

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0682-353X>, ✉ v572264@yandex.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-2706>, kartanovartem@yandex.ru

Аннотация: в работе описан алгоритм решения стационарной и нестационарной задач теплопроводности с идеальным и неидеальным контактом между слоями. Данный алгоритм основан на совместном применении метода обобщенных степеней Берса, матричного метода и метода разделения переменных (метода Фурье). Предложенный подход позволяет в единой форме получить приближенно-аналитическое решение задачи при произвольном числе слоев в среде с плоскими, цилиндрическими или сферическими слоями. Описана программная реализация данного подхода. Разработанная в среде Maple программа позволяет решить четыре типа задач: это стационарная задача с идеальным или неидеальным контактом и нестационарная задача с идеальным или неидеальным контактом между слоями. Возможно решение краевых задач первого или третьего типов. Полученное решение визуализируется в виде двумерного (для стационарной задачи) или трехмерного (для нестационарной задачи) графика распределения температуры.

Ключевые слова: матричный метод, многослойная среда, уравнение теплопроводности.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069 (<https://rscf.ru/project/23-21-10069/>, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10069/>).

Для цитирования: Калманович В. В., Картанов А. А. Программная реализация матричного метода решения задачи теплопроводности в многослойной среде. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):31–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-04.

Поступила в редакцию: 07.10.2024.

В окончательном варианте: 10.11.2024.

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE MATRIX METHOD FOR SOLVING THE HEAT CONDUCTION PROBLEM IN A MULTILAYER MEDIUM

V. V. Kalmanovich^{1,a}, A. A. Kartanov^{2,b}

¹ Tsiolkovsky Kaluga State University, Kaluga, Russian Federation

² KAMIN-Classic, OOO, Kaluga, Russian Federation

^a ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0682-353X>, ✉ v572264@yandex.ru

^b ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-2706>, kartanovartem@yandex.ru

Abstract: we developed an algorithm to solve stationary and non-stationary heat conduction problems involving ideal and non-ideal contact between layers. This algorithm integrates the Bers generalized power method, matrix method, and the method of separation of variables (Fourier method). Our approach provides a unified framework for deriving approximate analytical solutions for media with an arbitrary number of layers in flat, cylindrical, or spherical configurations.

We also implemented this approach in the Maple environment, which can address four types of problems: stationary heat conduction with ideal or non-ideal contact and non-stationary heat conduction with ideal or non-ideal contact between layers. The algorithm can solve boundary value problems of the first or third type. The results are temperature distribution curves, either 2D for stationary problems, or 3D for non-stationary ones, enabling clear visualization of the results.

Keywords: matrix method, multilayer medium, thermal conductivity equation.

Acknowledgements: The research is supported by the grant of the Russian Science Foundation and the Government of Kaluga Region No. 23-21-10069 (<https://rscf.ru/project/23-21-10069/>, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10069/>).

Cite this article: Kalmanovich V. V., Kartanov A. A. Software Implementation of the Matrix Method for Solving the Heat Conduction Problem in a Multilayer Medium. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(4):31–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-04.

Original article submitted: 07.10.2024.

Revision submitted: 10.11.2024.

Введение

Расчет процесса теплопереноса в многослойных средах в настоящее время является весьма распространенной задачей во многих отраслях производства. Такие вопросы возникают при проектировании и строительстве зданий, при создании композитных материалов, при оптимизации конструкции многослойных светоизлучающих структур и др. В настоящей работе рассмотрен один из возможных подходов к решению этой проблемы и его программная реализация.

Предлагаемый подход состоит в совместном применении трех методов: 1) метод обобщенных степеней Берса [1–3], позволивший в единой аналитической форме записать алгоритм решения задачи теплопроводности в среде, обладающей сдвиговой, осевой или центральной симметрией; 2) матричный метод, благодаря которому можно получить аналитическое решение уравнения теплопроводности при любом конечном числе слоев среды; 3) метод Фурье (метод разделения переменных). Наиболее раннее упоминание идеи применения матричного метода для решения задачи теплопроводности в многослойной среде (для случая составных пластин, т. е. только для плоской среды) нам удалось найти в [4], но авторы там же отмечали, что, хотя такой подход позволяет получить аналитическое решение, однако уже для двух слоев оно становится очень громоздким. Так как компьютерная алгебра и символьные вычисления тогда (в середине XX в.) только зарождались, численные методы на практике были предпочтительнее. Видимо, этим объясняется, что идея матричного метода не получила дальнейшего развития для решения задач теплопереноса. Однако этот подход для решения проблемы многокомпонентности встречается сейчас в различных научных исследованиях, например, использование матриц перехода и передаточных матриц при решении задачи Штурма–Лиувилля на кривой с условиями разрывов решений [5], использование матриц переноса в задачах деформации в слоистых средах [6], метод матрицы переноса для моделирования оптических свойств слоистых структур [7] и др.

В наших работах мы развиваем применение матричного метода для моделирования процессов теплопроводности [8] и диффузии в многослойных средах [9] и его программную реализацию.

Постановка задачи

Рассмотрим многослойную среду из n слоев, расположенных от начальной координаты x_1 до конечной x_{n+1} , номер слоя совпадает с номером координаты его левой границы. Рассмотрим одномерный процесс теплопроводности в этой среде, задаваемый уравнением:

$$a_2(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1)$$

Поток направлен вдоль оси x перпендикулярно поверхности слоистой среды:

$$J = -a_1(x) \partial T / \partial x.$$

Для дальнейшего удобства введем операторы:

$$D_1 = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = a_2(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Коэффициенты уравнения (1) на каждом слое имеют вид:

$$a_1^{(i)} = p_s \lambda^{(i)} x^s, \quad a_2^{(i)} = \frac{1}{c^{(i)} \rho^{(i)} x^s},$$

где $\lambda^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\rho^{(i)}$ — соответственно коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность среды на i -м слое. Процессу со сдвиговой симметрией (плоские слои) по оси x соответствует показатель $s = 0$, с осевой симметрией (цилиндрические слои) — $s = 1$ и с центральной симметрией (сферические слои) — $s = 2$. Коэффициент p_s для процессов с различными видами симметрии определен формулами $p_0 = 1$, $p_1 = 2\pi$, $p_2 = 4\pi$. Среда с цилиндрическими или сферическими слоями предполагается полый внутри (координата границы меньшего радиуса $x_1 > 0$).

Тогда уравнение (1) перепишем послойно в виде:

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} T^{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$J = -D_1^{(i)} T^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

На границах слоев зададим условия сопряжения, соответствующие неидеальному контакту:

$$\begin{aligned} T^{(i+1)}(x_{i+1}, t) - T^{(i)}(x_{i+1}, t) &= -r^{(i+1)} J^{(i)}(x_{i+1}, t), \\ J^{(i)}(x_{i+1}, t) &= J^{(i+1)}(x_{i+1}, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $r^{(i+1)}$ — коэффициент теплообмена в точке x_{i+1} контакта i -го и $(i+1)$ -го слоев. В случае идеального контакта принимаем условия непрерывности температуры и потока, которые можно считать частным случаем условий (4) при $r^{(i+1)} = 0$, $i = \overline{1, n-1}$.

На границах среды зададим условия третьего типа:

$$T^{(1)}(x_1, t) - T_1 = -r_1 J^{(1)}(x_1, t), \quad T_2 - T^{(n)}(x_{n+1}, t) = -r_2 J^{(n)}(x_{n+1}, t), \quad (5)$$

где r_1 и r_2 — коэффициенты термического сопротивления на границах многослойной среды, T_1 и T_2 — внешние температуры на границах среды.

Начальное распределение температуры:

$$T^{(i)}(x, 0) = g(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Алгоритм решения

Решение задачи (2)–(6) будем искать в виде суммы решений стационарной и нестационарной подзадач $T^{(i)}(x, t) = T_{st}^{(i)}(x) + T_{nonst}^{(i)}(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, которые задаются следующими условиями:

1) стационарная подзадача:

$$\begin{aligned} D_2^{(i)} D_1^{(i)} T_{st}^{(i)}(x) &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ T_{st}^{(i+1)}(x_{i+1}, t) - T_{st}^{(i)}(x_{i+1}, t) &= -r^{(i+1)} J_{st}^{(i)}(x_{i+1}, t), \\ J_{st}^{(i)}(x_{i+1}, t) &= J_{st}^{(i+1)}(x_{i+1}, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ T_{st}^{(1)}(x_1) - T_1 &= -r_1 J_{st}^{(1)}(x_1), \quad T_2 - T_{st}^{(n)}(x_{n+1}) = -r_2 J_{st}^{(n)}(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

2) нестационарная подзадача:

$$\begin{aligned} D_2^{(i)} D_1^{(i)} T_{nonst}^{(i)}(x, t) &= \frac{\partial T_{nonst}^{(i)}(x, t)}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \\ T_{nonst}^{(i+1)}(x_{i+1}, t) - T_{nonst}^{(i)}(x_{i+1}, t) &= -r^{(i+1)} J_{nonst}^{(i)}(x_{i+1}, t), \\ J_{nonst}^{(i)}(x_{i+1}, t) &= J_{nonst}^{(i+1)}(x_{i+1}, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ T_{nonst}^{(1)}(x_1, t) &= -r_1 J_{nonst}^{(1)}(x_1, t), \quad T_{nonst}^{(n)}(x_{n+1}, t) = r_2 J_{nonst}^{(n)}(x_{n+1}, t), \\ T_{nonst}^{(i)}(x, 0) &= g(x) - T_{st}^{(i)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Стационарную задачу решаем с помощью сочетания метода обобщенных степеней Берса и матричного метода, суть которого можно описать как последовательное умножение матриц, характеризующих теплофизические и геометрические параметры слоев.

На сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ поставим задачу Коши:

$$T_{st}|_{x_i} = T^{(i)}(x_i), \quad J_{st}|_{x_i} = J^{(i)}(x_i).$$

Решение задачи Коши для сегмента $[x_i, x_{i+1}]$ запишем в формализме Берса:

$$\begin{aligned} T_{st}^{(i)}(x) &= T^{(i)}(x_i) - X_i(x, x_i) J^{(i)}(x_i), \\ J_{st}^{(i)}(x) &= J^{(i)}(x_i). \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$X_i(x, x_i) = \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{a_1^{(i)}(\xi)} = \begin{cases} \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{\lambda^{(i)}} = \frac{x - x_i}{\lambda^{(i)}} & \text{для плоских слоев,} \\ \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{\lambda^{(i)} x} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} \ln \frac{x}{x_i} & \text{для осесимметричных слоев,} \\ \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{\lambda^{(i)} x^2} = \frac{x - x_i}{\lambda^{(i)} x x_i} & \text{для слоев с центральной симметрией,} \end{cases}$$

$$D_1^{(i)} X_i(x, x_i) = a_1^{(i)}(x) \frac{d}{dx} \int_{x_i}^x \frac{d\xi}{a_1^{(i)}(\xi)} = 1.$$

Введем обозначения:

$$V_{st}^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} T_{st}^{(i)}(x) \\ J_{st}^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \quad K_{st}^{(i)}(x, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & -X_i(x, x_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{st}^{(i)}(x_i) = \begin{pmatrix} T^{(i)}(x_i) \\ J^{(i)}(x_i) \end{pmatrix}, \quad R^{(i+1)} = \begin{pmatrix} 1 & r^{(i+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и запишем в матричной форме решение (9) для i -го слоя:

$$V_{st}^{(i)}(x) = K_{st}^{(i)}(x, x_i) V_{st}^{(i)}(x_i)$$

и условия сопряжения в точке контакта слоев:

$$V_{st}^{(i)}(x_{i+1}) = R^{(i+1)} V_{st}^{(i+1)}(x_{i+1}).$$

Тогда решение для $(i+1)$ слоя с учетом условий неидеального контакта:

$$V_{st}^{(i+1)}(x) = K_{st}^{(i+1)}(x, x_{i+1}) V_{st}^{(i)}(x_{i+1}) = K_{st}^{(i+1)}(x, x_{i+1}) \left[R^{(i+1)} K_{st}^{(i)}(x_{i+1}, x_i) V_{st}^{(i)}(x_i) \right]. \quad (10)$$

Тогда решение для всей системы слоев строим, выполняя последовательно подстановку условий согласования (10) в точках контакта слоев, начиная с первого слоя. Получим общий результат для i -го слоя:

$$V_{st}^{(i)}(x) = K_{st}^{(i)}(x, x_i) R^{(i)} K_{st}^{(i-1)} \dots R^{(2)} K_{st}^{(1)}(x_2, x_1) V_{st}^{(1)}(x_1) = K_{st}^{(i,1)}(x, x_1) V_{st}^{(1)}(x_1), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (11)$$

В конечной точке x_{n+1} системы слоев получим:

$$V_{st}^{(n)}(x_{n+1}) = K_{st}^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1) V_{st}^{(1)}(x_1),$$

откуда, используя краевые условия, находим $T^{(1)}(x_1)$ и $J^{(1)}(x_1)$, подставляем в (11) и получаем решение стационарной подзадачи (7).

Нестационарную подзадачу (8) решаем с помощью сочетания метода Фурье, метода обобщенных степеней Берса и матричного метода.

Частное решение уравнений на слое ищем в виде:

$$T_{nonst}^{(i)}(x, t) = u^{(i)}(x) e^{-\mu^2 t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$D_2^{(i)} D_1^{(i)} u^{(i)}(x) + \mu^2 u^{(i)}(x) = 0$$

и условиям неидеального контакта слоев:

$$u^{(i)}(x_{i+1}) = r^{(i+1)} u^{(i+1)}(x_{i+1}), \quad j^{(i)}(x_{i+1}) = j^{(i+1)}(x_{i+1}), \quad i = \overline{1, n},$$

где $j^{(i)}(x) = -D_1^{(i)} u^{(i)}(x)$, а также граничным условиям:

$$u^{(1)}(x_1) = -r_1 j^{(1)}(x_1), \quad u^{(n)}(x_{n+1}) = r_2 j^{(n)}(x_{n+1}).$$

Решение задачи Коши для каждого слоя запишем в формализме Берса:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x) &= u^{(i)}(x_i) \cos \mu X_i(x, x_i) - \frac{1}{\mu} j^{(i)}(x_i) \sin \mu X(x, x_i), \\ j^{(i)}(x) &= u^{(i)}(x_i) \mu \sin \mu \tilde{X}_i(x, x_i) + j^{(i)}(x_i) \cos \mu \tilde{X}(x, x_i). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} K^{(i)}(x, x_i) &= \begin{pmatrix} \cos \mu X_i(x, x_i) & -\frac{1}{\mu} \sin \mu X_i(x, x_i) \\ \mu \sin \mu \tilde{X}_i(x, x_i) & \cos \mu \tilde{X}_i(x, x_i) \end{pmatrix} \\ K^{(i)}(x, x_i) &= \begin{pmatrix} \cos \mu X_i(x, x_i) & -\frac{1}{\mu} \sin \mu X_i(x, x_i) \\ \mu \sin \mu \tilde{X}_i(x, x_i) & \cos \mu \tilde{X}_i(x, x_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и запишем решение задачи Коши (12) на i -м слое в матричной форме:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i) V^{(i)}(x_i).$$

Выражения для элементов матрицы $K^{(i)}(x, x_i)$ для рассматриваемых видов геометрии слоев можно найти в [8].

Условия сопряжения на границах между слоями в матричной форме имеет вид:

$$V^{(i)}(x_{i+1}) = R^{(i+1)} V^{(i+1)}(x_{i+1}).$$

Как и при решении стационарной подзадачи, начиная с первого слоя и выполняя последовательную подстановку, получим:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i,1)}(x, x_1) V^{(1)}(x_1), \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где $K^{(i,1)}(x, x_1) = K^{(i)}(x, x_i) R^{(i)} K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1}) \dots R^{(2)} K^{(1)}(x_2, x_1)$.

В конечной точке системы слоев получим:

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1) V^{(1)}(x_1).$$

Получив из (12) значения $u^{(n)}(x_{n+1})$ и $j^{(n)}(x_{n+1})$, выраженные через $u^{(1)}(x_1)$ и $j^{(1)}(x_1)$, подставим их в краевые условия и потребуем равенства нулю определителя этой системы. Таким образом, получаем условие определения собственных значений μ_k , доказанное в [8]:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ k_{11}^{(n,1)} - r_2 k_{21}^{(n,1)} & k_{12}^{(n,1)} - r_2 k_{22}^{(n,1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Далее определяем нормированные собственные функции:

$$f_k^{(i)}(x) = \frac{u_k^{(i)}(x)}{N_k},$$

где $u_k^{(i)}(x)$ — базисная функция, соответствующая собственному значению μ_k , и норма определяется из условия:

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a_2^{(i)}(x)} \left(u_k^{(i)}(x) \right)^2 dx.$$

Находим коэффициенты в разложении Фурье:

$$c_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(g(x) - T_{st}^{(i)}(x) \right) \frac{u_k^{(i)}(x)}{a_2^{(i)}(x)} dx$$

и получаем решение нестационарной подзадачи (8):

$$T_{nonst}^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k^{(i)}(x) e^{-\mu_k^2 t}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, имеем решение поставленной задачи (2)–(6):

$$T^{(i)}(x,t) = T_{st}^{(i)}(x) + T_{nonst}^{(i)}(x,t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Описание программной реализации метода

Изложенный алгоритм решения нетрудно программируется в системе компьютерной математики. Нами был разработан программный комплекс в вычислительной среде Maple, который на данный момент позволяет решить и визуализировать в виде трехмерного графика распределения температуры четыре вида задач: стационарную задачу теплопроводности с идеальным или неидеальным контактом между слоями и нестационарную задачу теплопроводности, также с идеальным или неидеальным контактом между слоями. Решение возможно получить при краевых условиях первого или третьего типа.

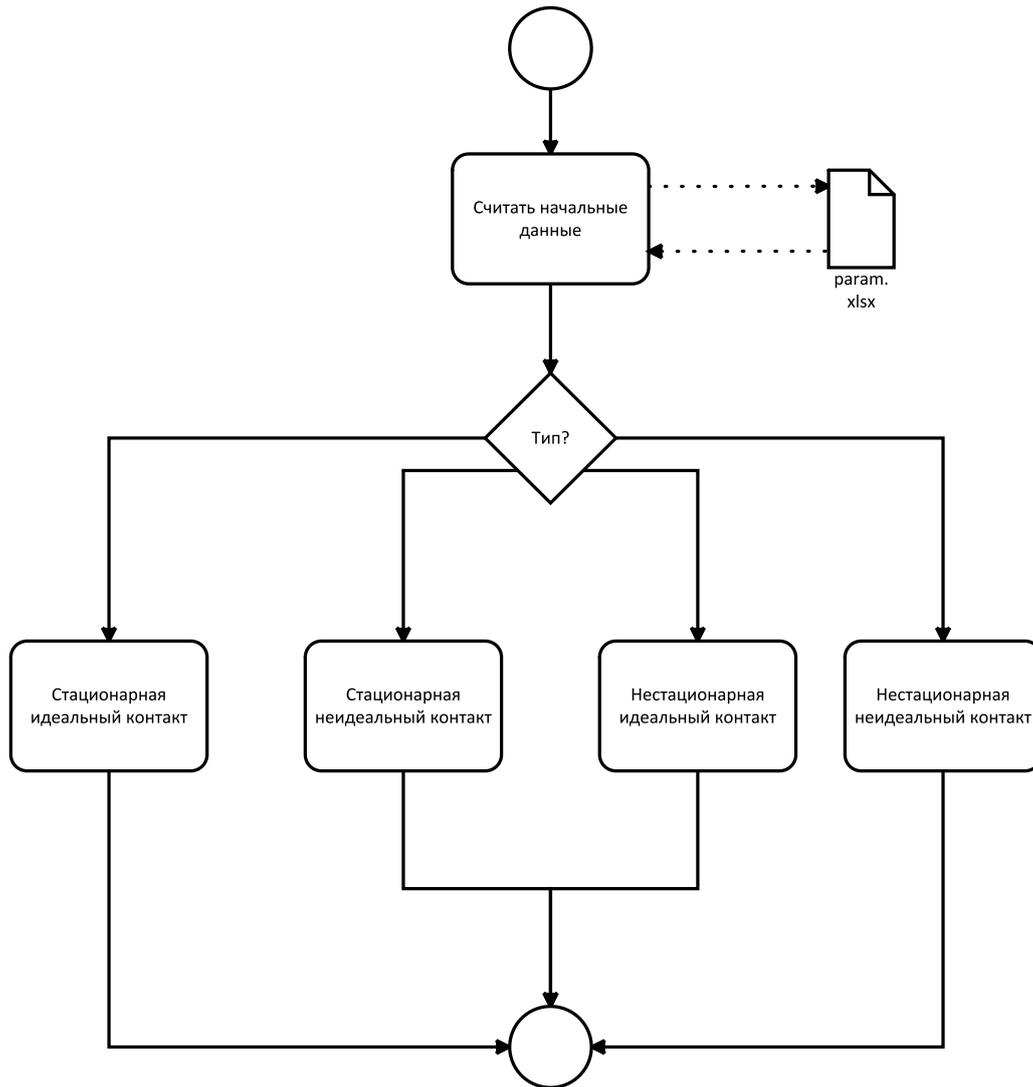


Рис. 1. Схема работы программы решения задачи теплопроводности

Пользователь вводит в файл данных в формате MS Excel исходные параметры. К ним относятся тип краевой задачи (первая или третья), стационарная задача или нет, идеальный контакт между слоями или нет, тип геометрии среды (сдвиговая, осевая или центральная симметрия), количество слоев, теплофизические параметры каждого слоя и координаты их границ, коэффициенты теплового сопротивления на границах (если задача с неидеальным контактом между слоями), количество собственных значений и время окончания процесса (для нестационарной задачи), начальная функция распределения температуры (для нестационарной задачи) и внешние температуры. Все значения параметров указываются в единицах измерения СИ. Затем программа считывает данные и передает их на выполнение

соответствующему модулю. Схема программы показана на рисунке 1. Каждый модуль программы реализует по описанному выше алгоритму решение соответствующей задачи. Например, на рисунке 2 представлен алгоритм выполнения решения нестационарной задачи теплопроводности с неидеальным контактом между слоями. Другие модули имеют схожую структуру. Затем выводится результат в виде графика решения.



Рис. 2. Схема работы расчетного модуля «Нестационарная неидеальный контакт»

На рисунке 3 показан пример визуализации решения нагрева 5-слойной плоской среды с неидеальным тепловым контактом между слоями и при условиях третьего типа на границах. Внешние температуры $T_1 = 50^\circ\text{C}$ и $T_2 = 10^\circ\text{C}$. Параметры слоев соответствуют теплофизическим параметрам материалов: сталь (первый и пятый слой), алюминий (третий слой), кирпич (второй и четвертый слой).

Решение выполняется достаточно быстро, например, представленное на рисунке 3 решение получено за 16 с на персональном компьютере. В случае усложнения геометрии среды, увеличения числа собственных значений (например, до 20–30) и количества слоев (до 7–8) время расчета увеличивается до нескольких минут.

Заключение

В работе приведен алгоритм решения задачи теплопроводности с неидеальным тепловым контактом между слоями и описана его программная реализация, приведен пример расчетов. В полученную программу в дальнейшем могут быть включены дополнительные расчетные функции, например, может быть добавлено сравнение погрешностей решений при различном количестве найденных собственных значений для одних и тех же исходных данных.

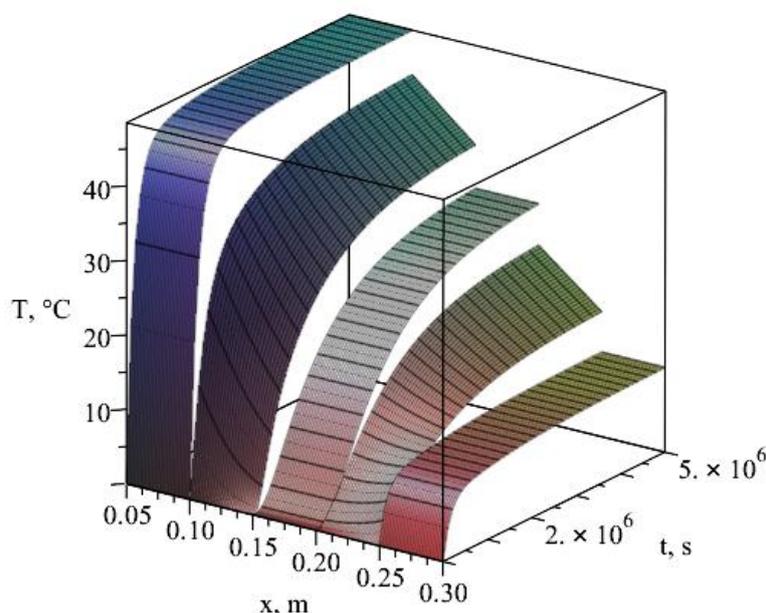


Рис. 3. Пример результата решения нестационарной задачи теплопроводности с неидеальным контактом

ЛИТЕРАТУРА

1. Bers L., Gelbart A. On a Class of Functions Defined by Partial Differential Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1944;56(1):67–93.
2. Гладышев Ю. А. О последовательности обобщенных степеней Берса с внутренней структурой. *Математические заметки*. 1994;55(3):21–34.
3. Гладышев Ю. А. О методе построения обобщенных степеней Берса в комплексном пространстве. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2021;200:36–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-200-36-44.
4. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. М.: Наука; 1964. 488 с.
5. Golubkov A. A. Inverse Problem for the Sturm–Liouville Equation with Piecewise Entire Potential and Piecewise Constant Weight on a Curve. *Сибирские электронные математические известия*. 2021;18(2):951–974. DOI: /10.33048/semi.2021.18.072.
6. Беляев Ю. Н. Методы вычислений матриц переноса упругих деформаций. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2013;3:63–110.
7. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М.: Наука; 1970. 720 с.

8. Калманович В. В. О построении решения задачи теплопроводности в многослойной среде с неидеальным тепловым контактом между слоями. *Таврический вестник информатики и математики*. 2021;2:43–52. DOI: 10.37279/1729-3901-2021-20-2-43-52.
9. Kalmanovich V. V., Stepovich M. A., Seregina E. V. Comparison of Analytical and Numerical Modeling of Distributions of Nonequilibrium Minority Charge Carriers Generated by a Wide Beam of Medium-Energy Electrons in a Two-Layer Semiconductor Structure. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1479:012116. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012116.