

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-10

## ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА

**Н. В. Плотникова**

*Южно-Уральский государственный университет (НИУ), г. Челябинск, Российская Федерация*  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>, [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)

*Аннотация:* одной из задач кинематического управления роботом-манипулятором является задача планирования его траектории, т. е. предварительного определения программного движения степеней подвижности на некотором временном отрезке. Ее можно рассматривать как задачу математического программирования. В зависимости от требований, предъявляемых к перемещению схвата (обходные конкретные точки траектории, перемещение из начальной точки в конечную по любой траектории и т. п.), в качестве ограничений могут выступать ограничения на скорости и ускорения обобщенных координат, обеспечивающие плавное движение манипулятора вдоль всей траектории; условия гладкости, предъявляемые к траектории, и др. В качестве целевой функции могут выступать время движения / обхода всех точек траектории, мощности выбираемых приводов и др. Предлагается использовать в качестве такого критерия величину погрешности позиционирования — в одной точке траектории она может принимать различные значения в зоне обслуживания для разных конфигураций манипуляционного механизма. Величину ошибки позиционирования схвата манипулятора в окрестности некоторой точки можно оценить с помощью квадратичной нормы отклонений, зависящей от обобщенных координат, их отклонений и параметров кинематической схемы (длин звеньев), она имеет максимумы и минимумы в области изменения этих параметров. При выборе таких положений, в которых погрешность имеет минимальное значение, траектория может быть построена именно через эти точки.

*Ключевые слова:* планирование траектории, робот-манипулятор, ошибка позиционирования.

*Для цитирования:* Плотникова Н. В. Планирование траектории робота-манипулятора. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):75–80. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-10.

*Поступила в редакцию:* 04.10.2024.

*В окончательном варианте:* 06.11.2024.

## ROBOTIC ARM TRAJECTORY PLANNING

**N. V. Plotnikova**

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russian Federation*  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9164-8723>, [plotnikovanv@susu.ru](mailto:plotnikovanv@susu.ru)

*Abstract:* we addressed the task of trajectory planning, which involves the preliminary determination of the programmed motion of degrees of mobility over a specified time interval as a key aspect of kinematic control for robot manipulators. We framed this problem as a mathematical programming challenge. Depending on the requirements for the gripper's movement, such as bypassing specific trajectory points or transitioning between initial and final points along arbitrary paths, we defined constraints. These constraints include limits on the velocities and accelerations of generalized coordinates to ensure smooth manipulator motion along the trajectory, as well as smoothness conditions imposed on the trajectory itself.

We considered the movement time across all trajectory points, the power of the drives, and other factors as potential target functions. We proposed using the positioning error as the primary criterion, noting that this error varies within the envelope for different configurations of the robotic arm at specific trajectory points. We quantified the positioning error of the gripper near a given point using the quadratic norm of deviations, which depends on the generalized coordinates, their deviations, and the kinematic parameters of the mechanism (e.g., link lengths). This error exhibits maxima and minima within the range of these parameters. By identifying positions where the error reaches its minimum, we demonstrated that the trajectory can be planned precisely through these points, optimizing accuracy.

*Keywords:* trajectory planning, robotic arm, positioning error.

*Cite this article:* Plotnikova N. V. Robotic Arm Trajectory Planning. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(4):75–80. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-10.

*Original article submitted:* 04.10.2024.

*Revision submitted:* 06.11.2024.

Задачи планирования траектории манипуляторов приобретают особое значение как при разработке систем управления промышленных роботов, так и при проектировании автономных манипуляционных механизмов, работающих в различных средах [1–6]. При этом возможны различные подходы к планированию траектории: построение траектории в виде «склейки» из фрагментов — примитивов [7]; оптимизационный подход [8], когда формулируется некий критерий (время прохождения траектории, энергетические затраты приводов и т. д.) с установлением ограничений и др.

Важным вопросом при планировании траектории является точность позиционирования схвата манипулятора.

Цель исследования — предложить методику оценки и сравнения различных кинематических схем манипуляционных роботов с точки зрения точности позиционирования схвата и, на ее основе, планирования траектории манипулятора в смысле определения оптимальных положений звеньев манипулятора из условия минимума погрешности позиционирования.

Для разных конфигураций манипуляционного механизма величина погрешности позиционирования для одной и той же точки позиционирования может принимать различные значения в зоне обслуживания. Погрешность можно оценить как норму отклонений для конкретной конфигурации звеньев исполнительного механизма манипулятора, образующих разомкнутую кинематическую цепь с кинематическими парами пятого класса.

Используя матрицы перехода от  $i$ -й системы координат к  $(i - 1)$ -й, координаты положения схвата манипулятора с вращательными парами в основной системе координат определяются [9]:

$$r = T(q) \cdot L, \quad r^T = L^T \cdot T^T(q), \quad (1)$$

где  $T$  — матрица поворота,  $L$  — вектор переноса начала координат,  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  — вектор обобщенных координат манипулятора.

Величину ошибки позиционирования схвата манипулятора в окрестности некоторой точки  $r^* = T(q^*) \cdot L$  удобно оценить с помощью квадратичной нормы отклонений:

$$\|S_r\| = \sqrt{[(\Delta r)^T(\Delta r)]}. \quad (2)$$

Учитывая, что  $(\Delta r)^T = L^T \cdot T_\delta(q^*) \cdot \Delta q$ , где  $\Delta q = [\Delta q_1 \ \Delta q_2 \ \dots \ \Delta q_n]^T$  — отклонения обобщенных координат,  $\Delta q_i = [diag \ \Delta q_i]$  ( $3 \times 3$ ),  $T_4(q^*) = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n]$ ,  $T_i = \frac{\delta T^T(q)}{\delta q_i} \Big|_{q=q^*}$ , получим:

$$\|S_r\|^2 = L^T \cdot T_\delta \cdot \Delta q \cdot \Delta q^T \cdot T_\delta^T \cdot L. \quad (3)$$

Из этого следует, что норма координатных отклонений является функцией обобщенных координат  $q$ , их отклонений  $\Delta q$  и длин звеньев  $L$  и может иметь максимумы и минимумы в области изменения этих параметров.

Рассмотрим этот метод применительно к роботу, в кинематической схеме которого есть 3 вращательные пары 5-го класса (рис. 1).

Составив матрицы перехода, определим матрицы  $L$  и  $T(q)$ , а также матрицу отклонений обобщенных координат  $\Delta q$ :

$$L(L_0, L_1, L_2, \gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_0 \\ L_1 \sin(\gamma_1) \\ 0 \\ -L_1 \cos(\gamma_1) + L_0 \\ L_2(\cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)) + L_1 \sin(\gamma_1) \\ 0 \\ L_2(\sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) - \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)) - L_1 \cos(\gamma_1) + L_0 \end{bmatrix},$$

$$T(q) = [\tau_1 \mid \tau_1 \cdot \tau_2 \mid \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3],$$

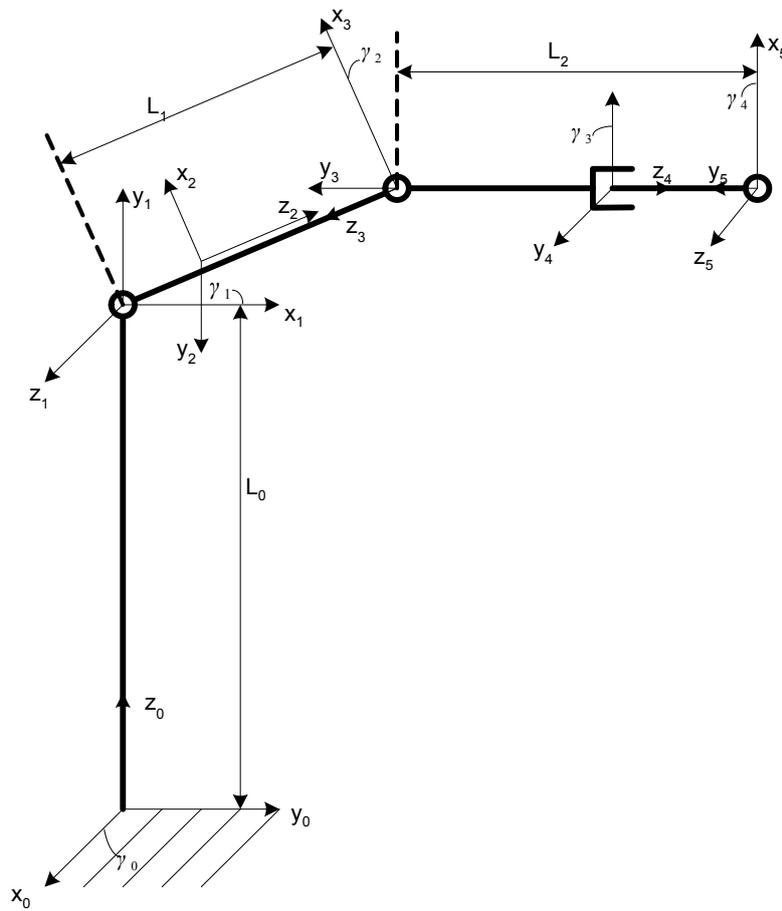


Рис. 1. Кинематическая схема

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1) & 0 & \sin(\gamma_1) \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin(\gamma_1) & 0 & -\cos(\gamma_1) \end{bmatrix},$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) - \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) & 0 & \cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) & 0 & \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) - \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) \end{bmatrix},$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix},$$

$$t_{11} = (\cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) - \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2)) \cdot \cos(\gamma_3),$$

$$t_{12} = (\cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) - \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2)) \cdot \sin(\gamma_3),$$

$$t_{13} = -\cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) - \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2),$$

$$t_{21} = -\sin(\gamma_3),$$

$$t_{22} = \cos(\gamma_3),$$

$$t_{23} = 0,$$

$$t_{31} = (\cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)) \cdot \cos(\gamma_3),$$

$$t_{32} = (\cos(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2)) \cdot \sin(\gamma_3),$$

$$t_{33} = \cos(\gamma_1) \cdot \cos(\gamma_2) - \sin(\gamma_1) \cdot \sin(\gamma_2),$$

$$\Delta(\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \Delta\gamma_3) = \begin{bmatrix} \Delta\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\gamma_1 \\ \Delta\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\gamma_2 \\ \Delta\gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Найдя частные производные и используя формулу (3), получим следующую зависимость:

$$S_r = L(L_i, \gamma_i)^T \cdot T(\gamma_i) \cdot \Delta(\Delta\gamma_i) \cdot \Delta(\Delta\gamma_i)^T \cdot T(\gamma_i)^T \cdot L(L_i, \gamma_i).$$

Определив координаты центра схвата, решим обратную задачу кинематики и получим следующее дерево решений (рис. 2).

Затем построим графики зависимости квадратичной нормы отклонений от обобщенных координат манипулятора  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (рис. 3–5). Для этого по очереди будем полагать один угол известным, а два других — неизвестными аргументами. Для построения был использован пакет MathCad.

По графикам можно определить приближенные значения, в которых функция принимает минимальные значения. Рассмотрим одну из наименьших величин ошибки позиционирования, равной 0,216 мм. Она достигается при следующих значениях обобщенных координат:  $\gamma_1 = 27^\circ, \gamma_2 = 49^\circ, \gamma_3 = 85^\circ$ .

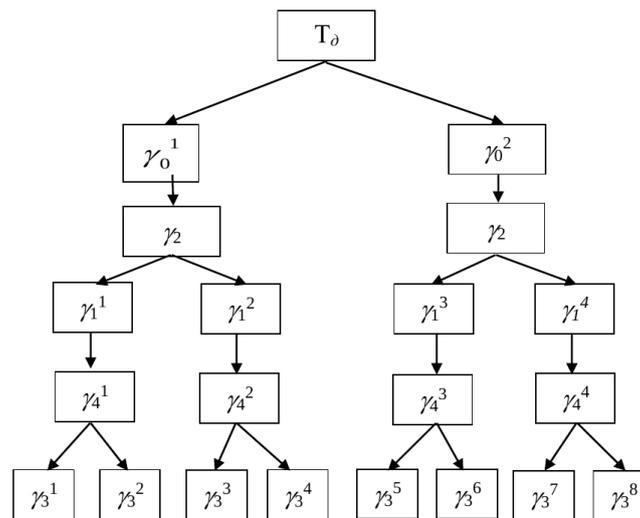


Рис. 2. Дерево возможных решений

Составим ряд значений обобщенных координат (табл. 1), при которых ошибка позиционирования не превышает 2 мм.

Таблица 1

Ошибка позиционирования						
$\gamma_1, \circ$	20	20	20	20	30	40
$\gamma_2, \circ$	50	70	40	60	50	50
$\gamma_3, \circ$	70	70	80	100	80	90
$S_r, \text{ мм}$	1,191	1,558	1,601	1,895	0,706	1,18

Составим из этих координат траекторию и определим положения схвата манипулятора, решая прямую задачу кинематики. Для облегчения расчетов и наглядности примем два угла равными нулю, а именно  $\gamma_0 = \gamma_4 = 0^\circ$ . Тогда при таком упрощении робот будет двигаться только в плоскости  $XOZ$ . Соответственно, получим следующие координаты схвата манипулятора (табл. 2).

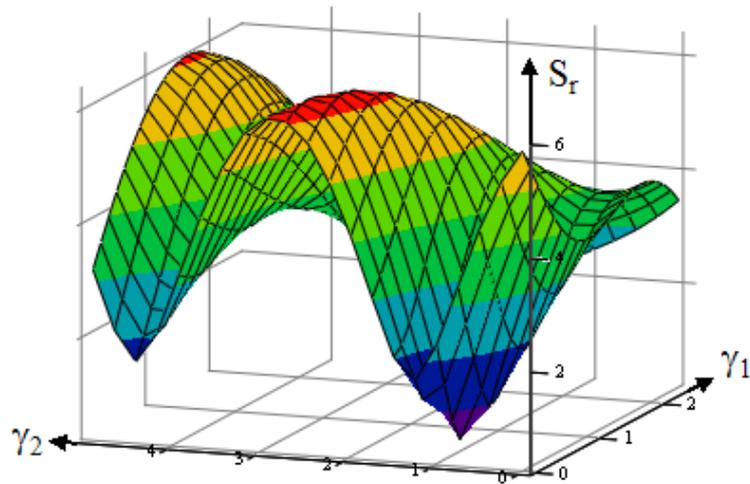
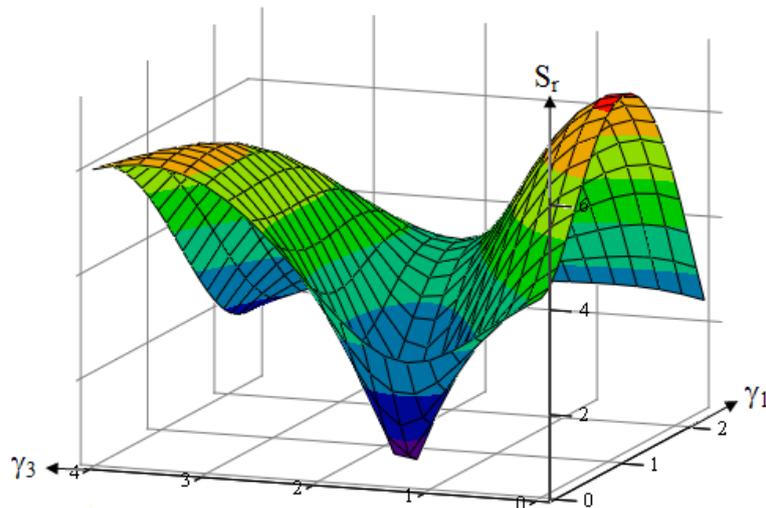
Рис. 3. График функции  $S_r(\gamma_1, \gamma_2)$ Рис. 4. График функции  $S_r(\gamma_1, \gamma_3)$ 

Таблица 2

Координаты схвата манипулятора

X, мм	1148	1223	1268	1284	1395	1524
Z, мм	63,246	222,806	392,861	586,246	451,795	707,164

Сформулируем алгоритм планирования траектории.

Для того, чтобы построить траекторию для конкретного манипулятора, необходимо выполнить следующие действия.

1. Составить кинематическую схему манипулятора и получить матрицы относительного положения звеньев.
2. Решить обратную задачу кинематики для заданных точек и получить дерево возможных решений.
3. Определить ошибки позиционирования для всех возможных конфигураций, определяющих заданное положение схвата манипулятора, по формуле:

$$S_r = \sqrt{L^T \cdot T \cdot \Delta q \cdot \Delta q^T \cdot T^T \cdot L}.$$

4. Выбрать такие положения (значения обобщенных координат), в которых погрешность имеет минимальные значения.

5. Решить прямую задачу кинематики, получив значения координат центра схвата.
6. Построить траекторию через заданные точки.

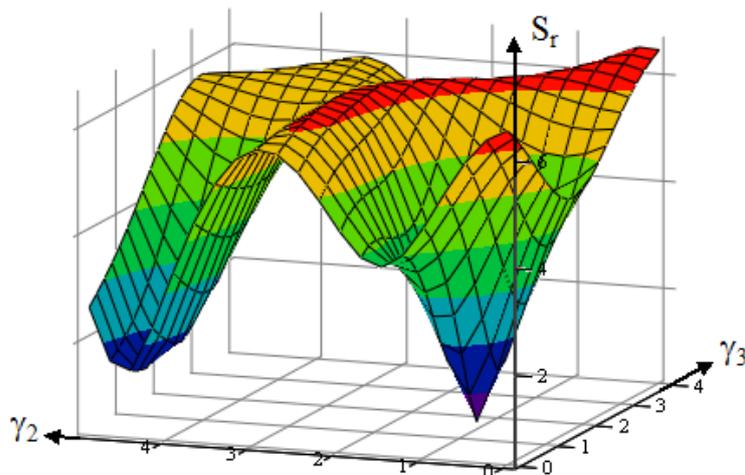


Рис. 5. График функции  $S_r(\gamma_2, \gamma_3)$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пол Р. *Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора*. Пер. с англ. А. Ф. Верещагина, В. Л. Генерозова; под ред. Е. П. Попова. М.: Наука; 1976. 103 с.
2. Балабанов А. Н., Безуглая А. Е., Шушляпин Е. А. Управление манипулятором подводного робота. *Информатика и автоматизация*. 2021;20(6):1307–1332. DOI: 10.15622/ia.20.6.5.
3. Pshikhov V., Medvedev M. Trajectory Planning Algorithms in Two-Dimensional Environment with Obstacles. *Информатика и автоматизация*. 2022;3:459–492. DOI: 10.15622/ia.21.3.1.
4. Corke P. *Robotics, Vision and Control*. Springer Cham; 2023. 570 p. DOI: 10.1007/978-3-031-07262-8.
5. Spong M. W., Hutchinson S., Vidyasagar M. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons; 2020. 608 p.
6. Михайлов М. И. Моделирование кинематики мобильного колесного робота. *Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого*. 2023;2:14–21.
7. Головин В. А., Яковлев К. С. Примитивы движения робота в задаче планирования траектории с кинематическими ограничениями. *Информатика и автоматизация*. 2023;6:1354–1386. doi: 10.15622/ia.22.6.4.
8. Плотникова Н. В. Математическое программирование в задачах планирования траектории робота. *Актуальные проблемы современной науки: Материалы 10-й Международной конференции*. Самара: Самарский государственный университет; 2009.
9. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. *Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы*. М.: Наука; 1978. 398 с.