

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-11

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ

**Л. А. Прокудина**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, [✉ prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)*

*Аннотация:* представлена нелинейная математическая модель состояния свободной поверхности гравитационно стекающей вязкой жидкой пленки в процессах тепло-массообмена. Это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка содержит как пространственные производные, так и производные по времени. Коэффициенты модели включают параметры поверхностного натяжения, термокапиллярных сил, испарения. Осуществлен переход к разностному уравнению — аналогу исходной математической модели состояния свободной поверхности жидкой пленки. Разработаны вычислительные алгоритмы исследования неустойчивости и состояния свободной поверхности волнового течения жидкой пленки для умеренных чисел Рейнольдса. Проведены вычислительные эксперименты по нелинейному развитию возмущений и выявлению неустойчивых режимов течения жидкой пленки воды, в частности, при неустойчивости Марангони. Найдены области неустойчивости жидкой пленки, в которых выделены режимы с максимальным значением инкремента как при свободном стекании, так и при испарении. Рассчитаны критические значения чисел Марангони, при которых происходит разрушение жидкой пленки. Представлены результаты численного моделирования нелинейного развития возмущений и формирования состояния свободной поверхности испаряющейся жидкой пленки, которые могут быть использованы при конструировании или модернизации существующего пленочного оборудования, а также при разработке технологических процессов в жидких пленках.

*Ключевые слова:* жидкая пленка, испарение, неустойчивость, параметр Марангони.

*Для цитирования:* Прокудина Л. А. Математическое моделирование развития возмущений в испаряющейся жидкой пленке. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):81–87. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-11.

*Поступила в редакцию:* 03.10.2024.

*В окончательном варианте:* 07.11.2024.

## SIMULATION OF THE EVOLUTION OF DISTURBANCES IN AN EVAPORATING LIQUID FILM

**L. A. Prokudina**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0793-7667>, [✉ prokudinala@susu.ru](mailto:prokudinala@susu.ru)*

*Abstract:* we present a nonlinear simulation describing the state of a viscous liquid film's free surface during gravitational flow and heat and mass transfer processes. It is a nonlinear fourth-order partial differential equation that contains both spatial and time derivatives. The model coefficients include surface tension, thermocapillary forces, and evaporation. We converted it to a difference equation, an analog of the initial simulation of the liquid film's free surface. We developed computational algorithms to study the instability and free-surface behavior of a liquid film's wave flow at moderate Reynolds numbers. We conducted computational experiments on the nonlinear evolution of disturbances and identified unstable flow regimes in a liquid water film, particularly those with Marangoni instability. We present the results of numerical simulation of the nonlinear evolution of disturbances and the formation of the evaporating liquid film's free surface state, which can be applied to the design and upgrades of manufacturing equipment and processes.

*Keywords:* liquid film, evaporation, instability, Marangoni number.

*Cite this article:* Prokudina L. A. Simulation of the Evolution of Disturbances in an Evaporating Liquid Film. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(4):81–87. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-11.

*Original article submitted:* 03.10.2024.

*Revision submitted:* 07.11.2024.

## Введение

Широкое применение жидких пленок в промышленности [1–3] обусловлено, в частности, большой поверхностью контакта. Пленочные аппараты используются при работе с веществами, обрабатываемыми в тонких слоях, например, упаривание пищевых продуктов, чувствительных к высоким температурам, нагрев веществ, способных пригорать при длительном контакте с поверхностью нагрева.

При разработке технологических процессов в жидких пленках, а также при проектировании пленочных аппаратов необходимо учитывать влияние различных физико-химических факторов на режимы и характеристики пленочного течения [4–11]. Ввиду распространенности промышленных пленочных аппаратов, в которых реализуется течение жидких пленок (испарители, выпарные аппараты, кипятильники), исследование режимов течения жидких пленок актуально и практически значимо.

Целью данной работы является численное исследование как волновых характеристик, областей неустойчивости, так и состояния свободной поверхности испаряющейся жидкой пленки.

## Математическая модель течения тонкого слоя вязкой жидкости

Рассмотрим течение жидкой пленки воды по вертикальной нагретой поверхности для диапазона чисел Рейнольдса  $1 \leq Re \leq 15$  (рис. 1). Обозначим толщину пленки  $\delta(x, t)$ , а отклонение свободной поверхности жидкой пленки от невозмущенного состояния  $\psi(x, t)$ .

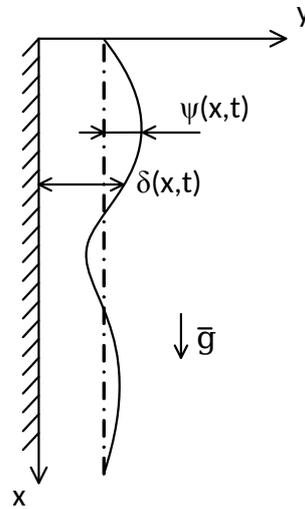


Рис. 1. Гравитационно стекающая жидкая пленка

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:  $Re$  — число Рейнольдса,  $M$  — число Марангони,  $F_x$  — число Фруда,  $Ku$  — число Кутателадзе,  $Pr$  — число Прандтля. Уравнение для отклонения свободной поверхности жидкой пленки от невозмущенного состояния имеет следующий вид [12]:

$$\frac{C}{RePrKu}(1 - \psi) + b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + b_4 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_5 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_6 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + b_7 \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( b_8 \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $b_1 = -ReF_x$ ,  $b_2 = -\frac{1}{2}ReM + \frac{3}{40}Re^3F_x^2 + \frac{2}{3}\text{sign} \Delta T \frac{Re}{(RePrKu)^2}$ ,  $b_3 = -\frac{1}{3}\sigma Re$ ,  $b_4 = -2ReF_x$ ,  $b_5 = b_6 = -ReM + \frac{9}{20}Re^3F_x^2$ ,  $b_7 = -ReM + \frac{9}{4}Re^3F_x^2$ ,  $b_8 = \frac{5}{24}Re^2F_x$ ,  $\text{sign} \Delta T = 0$  и  $C = 0$  соответствует свободному стеканию пленки, а неизотермические процессы, например, испарение  $\text{sign} \Delta T = -1$  и  $C = 1$ .

Для неизотермических процессов, к которым относятся процессы испарения, конденсации жидкой пленки, высокие градиенты температуры могут привести к разрыву пленки и образованию на поверхности пленочного аппарата так называемого «сухого пятна». Критические значения числа Марангони, при которых происходит разрушение пленки, вычисляются по формуле [13]:

$$M_k = \frac{3}{20}Re^2F_x^2 - \frac{2}{Rek^2} \left( a_0 - \frac{a_1}{a_2} \right) + \frac{4\text{sign} \Delta T}{3(RePrKu)^2},$$

где  $a_0 = b_3k^4$ ,  $a_1 = -b_1k$ ,  $a_2 = b_8k$ .

**Волновые характеристики**

Рассмотрев линейную часть уравнения (1), получим дисперсионное уравнение вида:

$$-\frac{C}{RePrKu} + \omega(b_8k + i) + b_3k^4 - b_2k^2 + b_1ik = 0, \tag{2}$$

где  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ,  $\omega_r$  – частота,  $\omega_i$  – инкремент,  $k$  – волновое число.

Из уравнения (2) выведены формулы для частоты, инкремента и фазовой скорости:

$$\omega_r = \frac{Y - XZ}{1 + Z^2},$$

$$\omega_i = X + \omega_r Z,$$

$$c_r = \frac{\omega_r}{k},$$

где  $X = b_3k^4 - b_2k^2 - \frac{C}{RePrKu}$ ,  $Y = -b_1k$ ,  $Z = b_8k$ .

Вычислительные эксперименты проведены для чисел Рейнольдса в диапазоне  $1 \leq Re \leq 15$  и волновых чисел  $0 \leq k \leq 0,5$ . Рассчитаны волновые характеристики, области неустойчивости жидких пленок воды для режимов свободного стекания и испарения.

Для расчета значений волновых характеристик на языке Python реализован следующий алгоритм.

Шаг 1. Выбрать значения параметров  $Re$ ,  $\text{sign } \Delta T$ ,  $M$ ,  $Pr$ ,  $Ku$ ,  $C$ , диапазон волновых чисел  $k$  и шаг  $\Delta k$ .

Шаг 2. Рассчитать значения коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  и  $b_8$ .

Шаг 3. Для каждого значения волнового числа  $k$  в выбранном диапазоне вычислить значения инкремента  $\omega_i$ , частоты  $\omega_r$  и фазовой скорости  $c_r$ .

Шаг 4. Найти значение волнового числа, при котором инкремент  $\omega_i$  достигает своего максимального значения, такой режим течения называется оптимальным.

В таблице 1 показаны области неустойчивости пленочного течения, это диапазоны волновых чисел, при которых инкремент принимает положительные значения. В режиме испарения течение жидкой пленки воды устойчиво до числа Рейнольдса, равного восьми.

Таблица 1

Области неустойчивости

Re	k	
	Свободное стекание	Испарение
1	[0; 0,028]	–
2	[0; 0,049]	–
3	[0; 0,068]	–
4	[0; 0,087]	–
5	[0; 0,104]	–
6	[0; 0,121]	–
7	[0; 0,138]	–
8	[0; 0,154]	–
9	[0; 0,170]	[0,082; 0,149]
10	[0; 0,185]	[0,070; 0,172]
11	[0; 0,201]	[0,062; 0,191]
12	[0; 0,216]	[0,056; 0,209]
13	[0; 0,231]	[0,051; 0,225]
14	[0; 0,245]	[0,047; 0,241]
15	[0; 0,260]	[0,044; 0,256]

В таблице 2 представлены максимальные значения инкремента и соответствующие им значения волнового числа и фазовой скорости для различных значений числа Рейнольдса. Максимальные

значения инкремента соответствуют оптимальным режимам течения, наблюдаемым в натуральных экспериментах [1], и параметры таких течений необходимы для разработки технологических процессов в жидких пленках. При испарении наблюдается уменьшение максимальных значений инкремента и увеличение соответствующих им значений фазовой скорости по сравнению с режимом свободного стекания.

Таблица 2

## Режимы максимального инкремента

$Re$	Свободное стекание			Испарение		
	$k$	$\omega_i \max$	$c_r$	$k$	$\omega_i \max$	$c_r$
1	0,019	0,000221	2,999862	0,022	-	3,312266
2	0,034	0,001401	2,998249	0,037	-	3,309991
3	0,048	0,004104	2,992305	0,052	-	3,301833
4	0,061	0,008707	2,978232	0,066	-	3,282743
5	0,072	0,015355	2,952016	0,078	-	3,247527
6	0,083	0,023874	2,910471	0,090	-	3,192421
7	0,093	0,033762	2,852293	0,100	-	3,116433
8	0,102	0,044279	2,778603	0,109	-	3,021902
9	0,110	0,054639	2,692657	0,117	0,015343	2,913697
10	0,116	0,064188	2,598827	0,124	0,032359	2,797757
11	0,122	0,072502	2,501552	0,129	0,046600	2,679622
12	0,126	0,079386	2,404601	0,134	0,058181	2,563644
13	0,130	0,084838	2,310695	0,138	0,067345	2,452824
14	0,133	0,088954	2,221651	0,141	0,074413	2,348889
15	0,136	0,091903	2,138410	0,143	0,079713	2,252690

Критические значения числа Марангони, рассчитанные для режима максимального значения инкремента, приведены в таблице 3. Можно отметить, что для испарения характерны меньшие критические значения числа Марангони.

Таблица 3

## Критические значения числа Марангони

$Re$	Свободное стекание		Испарение	
	$k$	$M_k$	$k$	$M_k$
1	0,019	26595,32	0,022	19837,3
2	0,034	2078,66	0,037	1755,78
3	0,048	465,52	0,052	397,2
4	0,061	163,8	0,066	140,48
5	0,072	76,58	0,078	65,81
6	0,083	41,19	0,090	35,59
7	0,093	25,1	0,100	22,21
8	0,102	16,83	0,109	15,18
9	0,110	12,16	0,117	11,15
10	0,116	9,43	0,124	8,67
11	0,122	7,57	0,129	7,11
12	0,126	6,37	0,134	5,99
13	0,130	5,48	0,138	5,19
14	0,133	4,83	0,141	4,61
15	0,136	4,32	0,143	4,17

При испарении возникающая неоднородность поверхностного натяжения приводит к появлению термокапиллярных сил (эффект Марангони). В этом случае поверхностный слой жидкой пленки вовлекает в свое движение близлежащие приповерхностные слои. В этих слоях идет формирование диссипативных структур (ячейки, валы, вихревые потоки) [14–16]. Также при исследовании жидкой

пленки идея о циркуляции потоков жидкости во впадинах и под гребнями высказывалась П. Л. Капицей [17].

### Состояния свободной поверхности жидкой пленки

Для расчета состояния свободной поверхности жидкой пленки запишем уравнение (1) в следующем виде [18]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{C(1-\psi)}{RePrKu} + b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + b_4 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_5 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_6 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + b_7 \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

Рассмотрим следующие граничные условия:

$$\psi(x,0) = f(x) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = g_1(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0,t) = g_2(t) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_{max},t) = g_3(t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_{max},t) = g_4(t) \quad (8)$$

Осуществим переход от (3)–(8) к уравнениям в конечных разностях. Разобьем область пространства и времени путем построения конечно-разностной сетки:

$$G = \{(x_i, t_j) : x_i = i\Delta x, \quad t_j = j\Delta t, \quad i = \overline{0, L_x}, \quad j = \overline{0, L_t}\}.$$

Произведем следующую замену:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_i^j &= \frac{-\psi_{i+2}^j + 8\psi_{i+1}^j - 8\psi_{i-1}^j + \psi_{i-2}^j}{12\Delta x} \\ \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_i^j &= \frac{-\psi_{i+2}^j + 16\psi_{i+1}^j - 30\psi_i^j + 16\psi_{i-1}^j - \psi_{i-2}^j}{12\Delta x^2} \\ \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right|_i^j &= \frac{\psi_{i+2}^j - 2\psi_{i+1}^j + 2\psi_{i-1}^j - \psi_{i-2}^j}{2\Delta x^3} \\ \left. \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right|_i^j &= \frac{\psi_{i+2}^j - 4\psi_{i+1}^j + 6\psi_i^j - 4\psi_{i-1}^j + \psi_{i-2}^j}{\Delta x^4} \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_i^j &= \frac{\psi_i^{j+1} - \psi_i^j}{\Delta t} \end{aligned}$$

Для расчета нелинейного развития возмущений на свободной поверхности жидкой пленки на языке Python реализован следующий алгоритм.

Шаг 1. Выбрать значения параметров  $Re$ ,  $\text{sign } \Delta T$ ,  $M$ ,  $Pr$ ,  $Ku$ ,  $C$  и шаги по времени и пространству  $\Delta t$  и  $\Delta x$ . Задать граничные условия  $f(x)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ ,  $g_3(t)$ ,  $g_4(t)$ .

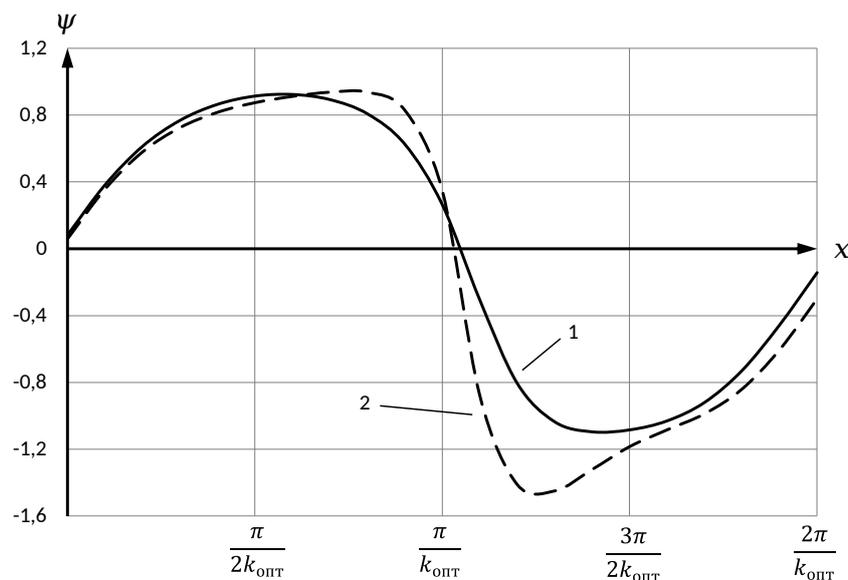
Шаг 2. Рассчитать значения коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$ ,  $b_6$  и  $b_7$ .

Шаг 3. Задать  $j = 0$ .

Шаг 4. Вычислить значения  $\psi_i^j$  для всех  $i = \overline{-2, L_x + 2}$  и фиксированного  $j$ .

Шаг 5. Если  $j < L_t$ , увеличить значение  $j$  на 1 и перейти к шагу 4, иначе завершить алгоритм.

В ходе вычислительных экспериментов рассчитано состояние свободной поверхности жидкой пленки как для режима свободного стекания пленки, так и для режима испарения. Вычислительные эксперименты проведены для значений параметров  $Re = 10$ ,  $t_{max} = 0,4$ ,  $x_{max} = 2\pi/k_{opt}$  и граничных условий  $f(x) = \sin(xk_{opt})$ ,  $g_1(t) = k_{opt}$ ,  $g_2(t) = 0$ ,  $g_3(t) = k_{opt}$ ,  $g_4(t) = 0$ , где  $k_{opt} = 0,124$  – волновое число в оптимальном режиме течения.



**Рис. 2.** Отклонение свободной поверхности испаряющейся жидкой пленки

На рисунке 2 представлены результаты расчета нелинейного развития возмущений и формирования состояния свободной поверхности испаряющейся жидкой пленки в моменты времени 1 —  $t = 0,2$  и 2 —  $t = 0,4$ .

### Заключение

Представлена математическая модель состояния свободной поверхности неизотермической жидкой пленки. Коэффициенты модели включают параметры поверхностного натяжения, термокапиллярных сил, испарения.

Осуществлен переход к разностному уравнению для состояния свободной поверхности жидкой пленки.

Разработаны вычислительные алгоритмы как для исследования неустойчивости течения жидкой пленки, так и для формирования состояния ее свободной поверхности. Проведены вычислительные эксперименты для неустойчивых режимов течения испаряющейся жидкой пленки воды, а также неустойчивости Марангони.

Рассчитаны области неустойчивости испаряющейся жидкой пленки, ее волновые характеристики для умеренных чисел Рейнольдса. Представлены результаты численного исследования формирования волн на свободной поверхности испаряющейся жидкой пленки.

Неустойчивость Марангони проявляется как в изменении волновых характеристик пленки, так и в формировании в приповерхностных слоях диссипативных структур. Результаты моделирования могут быть использованы при конструировании или модернизации существующего оборудования, а также при разработке технологических процессов в жидких пленках.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. *Волновое течение пленок жидкости*. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма; 1992. 256 с.
2. Воронцов Е. Г., Тананайко Ю. М. *Теплообмен в жидкостных пленках*. Киев: Техника; 1972. 196 с.
3. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. *Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела*. М.: Наука; 1990. 271 с.
4. Shkadov V. Ya. Wave Flow Regimes of a Thin Layer of Viscous Fluid Subject to Gravity. *Fluid Dynamics*. 1967;2(1):29–34.
5. Demekhin E. A., Kaplan M. A., Shkadov V. Ya. Mathematical Models of the Theory of Viscous Liquid Films. *Fluid Dynamics*. 1987;22(6):885–893.

6. Актершев С. П., Алексеенко С. В. Волновое течение пленки конденсата. *Теплофизика высоких температур*. 2014;1:84–92.
7. Актершев С. П., Алексеенко С. В. Волновое течение испаряющейся пленки жидкости. *Известия Томского политехнического университета*. 2014;324(4):6–14.
8. Бурмистрова О. А. Устойчивость вертикальной пленки жидкости с учетом эффекта Марангони и теплообмена с окружающей средой. *Прикладная механика и техническая физика*. 2014;3:17–25.
9. Subramaniam V., Garimella S. Numerical Study of Heat and Mass Transfer in Lithium Bromide-Water Falling Films and Droplets. *International Journal of Refrigeration*. 2014;40:211–226.
10. Rahimzadeh A., Ahmadian-Yazdi M.-R., Eslamian M. Experimental Study on the Characteristics of Capillary Surface Waves on a Liquid Film on an Ultrasonically Vibrated Substrate. *Fluid Dynamics Research*. 2018;6:065510.
11. Prokudina L. A. Numerical Simulation of Effect of Temperature Gradients on Flow of Liquid Film in Heat and Mass Transfer Devices. *Global Smart Industry Conference*. Chelyabinsk; 2018. DOI: 10.1109/GloSIC.2018.8570098.
12. Prokudina L. A. Influence of Surface Tension Inhomogeneity on the Wave Flow of a Liquid Film. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2014;87(1):165–173.
13. Prokudina L. A., Vyatkin G. P. Instability of a Nonisothermal Liquid Film. *Doklady Physics*. 1998;43(10):652–654.
14. Berg J. C., Acrivos A. The Effect of Surface Active Agents on Convection Cells Induced by Surface Tension. *Chemical Engineering Science*. 1965;20(8):737–745.
15. Linde H., Schwarz P., Wilke H. Dissipative Structures and Nonlinear Kinetics of the Marangoni-Instability. *Lecture Notes in Physics*. 1979;105:75–120.
16. Schwarz P., Bielcki J., Linde H. Origin and Behavior of a Dissipative Structure of the Marangoni Instability. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*. 1985;266(4):731–739.
17. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1948;18:3–28.
18. Прокудина Л. А. Моделирование влияния градиентов температуры на состояние свободной поверхности жидкой пленки. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2014;2:118–123.