

DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-18

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**Н. М. Япарова***Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1821-1159>, [✉ iaparovnm@susu.ru](mailto:iaparovnm@susu.ru)

Аннотация: исследование посвящено разработке численного метода решения обратной задачи теплопроводности с неполными исходными данными, связанной с теплопереносом в объекте, внутри которого отсутствуют источники тепла, а его поверхность подвергается внешнему тепловому воздействию, одинаковому в каждой ее точке. Математическая модель обратной задачи представлена одномерным параболическим уравнением с начальными условиями и одним граничным условием, сформированным на основе информации, которая отражает характер результатов измерения температуры на поверхности объекта. В работе предложена вычислительная конечно-разностная схема решения обратной задачи, построенная с использованием регуляризирующих подходов, обеспечивающих устойчивость вычислительной схемы. Параметром регуляризации в предлагаемом алгоритме являются шаги дискретизации. Разработанная схема послужила основой для проведения вычислительных экспериментов. В экспериментах проводился сравнительный анализ численных решений обратной задачи с тестовыми функциями, сформированными на основе имитационного моделирования, получены оценки погрешности построенных численных решений. Результаты расчетов подтверждают принципиальную возможность численного решения обратных задач при неполных данных и иллюстрируют достаточную надежность предложенной схемы.

Ключевые слова: теплоперенос, численный метод, обратная задача, регуляризация.

Для цитирования: Япарова Н. М. Численный метод решения обратной краевой задачи теплопереноса в условиях неполных исходных данных. *Успехи кибернетики*. 2024;5(4):128–134. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-18.

Поступила в редакцию: 03.10.2024.

В окончательном варианте: 05.11.2024.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE INVERSE HEAT TRANSFER BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INCOMPLETE DATA**N. M. Yaparova***South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1821-1159>, [✉ iaparovnm@susu.ru](mailto:iaparovnm@susu.ru)

Abstract: we proposed a numerical method for solving the inverse heat conduction problem with incomplete data. The problem addresses heat transfer in a homogeneous object whose surface experiences uniform external thermal action. The model is formulated as an inverse heat conduction problem for a one-dimensional parabolic partial differential equation, incorporating an initial condition and a single boundary condition. The boundary condition relies on temperature measurements taken at the object's surface. Our approach utilizes a computational finite-difference scheme to solve the inverse problem, with regularization techniques ensuring numerical stability. The discretization steps serve as the regularization parameter. To assess the reliability of the proposed method and estimate the numerical error, we conducted computational experiments. These experiments included a comparative analysis of the numerical results against test functions. The computational findings demonstrate the feasibility of numerically solving inverse problems with incomplete data and confirm the sufficient reliability of the proposed approach.

Keywords: heat transfer, numerical method, inverse problem, regularization.

Cite this article: Yaparova N. M. Numerical Method for Solving the Inverse Heat Transfer Boundary Value Problem with Incomplete Data. *Russian Journal of Cybernetics*. 2024;5(4):128–134. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-4-18.

Original article submitted: 03.10.2024.

Revision submitted: 05.11.2024.

Введение

С повышением требований к эксплуатационным характеристикам работающих машин и механизмов разработчики систем управления и контроля сталкиваются с проблемой определения внутреннего теплового состояния технического объекта. Суть проблемы состоит в том, что датчики, необходимые для измерения температуры, возможно разместить только на внешней поверхности объекта, а результаты измерения неизбежно содержат шум, искажающий информацию о тепловом состоянии поверхности. Таким образом, источником информации о внутреннем тепловом состоянии служат зашумленные косвенные измерения. Обработка результатов граничных измерений требует создания и совершенствования численных методов, неразрывно связанных с обратными задачами теплопроводности [1–5], а использование современных достижений в области численного анализа и информационных технологий создает основу для успешного решения проблемы обработки зашумленных косвенных измерений [6–11]. Особое место в области создания и исследования методов решения обратных задач занимают разработки, связанные с созданием алгоритмов численного решения обратных задач с неполными исходными данными. В разное время исследованиями в этой области занимались Р. Латтес [12], О. М. Алифанов [13], Дж. Бек [14] и другие ученые [15–17]. В статье предложен подход к построению регуляризирующего метода численного решения обратной задачи с неполными исходными данными, когда в математической модели отсутствует одно из граничных условий. Метод основан на использовании конечно-разностных уравнений. Устойчивость вычислительной схемы обеспечивается регулированием значений шагов дискретизации. В работе представлены результаты вычислительных экспериментов, включающие результаты сравнительного анализа численных решений с тестовыми значениями.

Математическая модель теплопереноса

Основные предпосылки математической модели теплопереноса заключаются в следующем. Технический объект с известным начальным тепловым состоянием не содержит внутренних источников тепла. Поверхность объекта покрыта защитным слоем толщиной L . Объект подвергается внешнему тепловому воздействию продолжительностью T , одинаковому в каждой точке его поверхности. Датчики контроля температуры расположены на поверхности объекта. Требуется, основываясь на результатах граничных измерений, определить температурные поля во внутренних точках приграничного слоя. В простейшем приближении поставленная задача сводится к задаче определения теплового состояния линейного объекта с постоянными теплофизическими характеристиками, протяженностью L , с известной начальной температурой, левый конец которого подвергается внешнему тепловому воздействию. Математическая модель задачи имеет следующий вид. Пусть x – расстояние от внешней границы слоя до текущей точки, $x \in [0, L]$, t – текущий момент времени, $t \in [0, T]$, изменению температуры в текущей точке в текущий момент времени соответствует функция $u(x, t)$. Изменение температурных полей внутри слоя представлено следующим уравнением теплопроводности:

$$u_t = au_{xx} + bu_x + \gamma u, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (1)$$

где a, b, γ – приведенные коэффициенты. Информация о начальном тепловом состоянии представлена условием:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (2)$$

а результаты измерений температуры на поверхности объекта служат основой для формирования граничного условия:

$$u(0, t) = p(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Так как результаты температурных измерений содержат шум, а доступной для пользователя информацией о характере шума является только информация о его максимальном уровне, то при численном решении задачи (1)–(3) необходимо учитывать, что вместо действительных граничных значений $p(t)$ известны $p_\delta(t)$ и уровень шума δ , характеризующий наибольшее возможное отклонение значений $p_\delta(t)$ от $p(t)$. Таким образом, для определения текущего теплового состояния слоя необходимо, основываясь на известных значениях $f(x)$ и $p_\delta(t)$, найти численное решение $u_\delta(x, t)$ задачи (1)–(3) в области $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ вплоть до значений $u_\delta(L, t) = \varphi_\delta(t)$. Поставленная задача относится к классу обратных задач, при численном решении которых для уменьшения негативного влияния шумов на точность конечного результата необходимо использовать регуляризирующие подходы.

Вычислительная схема метода решения обратной краевой задачи теплопереноса

Для построения вычислительной схемы метода введем конечно-разностную сетку:

$$V = \left\{ (x_i, t_j) \mid x_i = (i-1)h, \quad t_j = (j-1)\tau, \quad h = \frac{L}{N}, \quad \tau = \frac{T}{M}, \quad i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, M+1} \right\}.$$

Конечно-разностный аналог задачи (1)–(3) в узле (x_i, t_j) имеет вид:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + b \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \gamma u_{i,j}, \quad i = \overline{2, N+1}, \quad j = \overline{2, M+1}. \quad (4)$$

Решая уравнение (4) относительно значений $u_{i,j+1}$, получаем основную формулу для определения значений функции $u_\delta(x, t)$ во внутренних точках. Таким образом, в регулярных узлах сетки имеем:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{a\tau}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{b\tau}{h} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \gamma u_{i,j}.$$

Используя начальные и граничные условия, находим следующие значения $u_\delta(x, t)$ в нерегулярных узлах:

$$u_{i,1} = f(x_i), \quad u_{1,j} = p_\delta(t_j).$$

Отметим, что основная проблема разработки численного метода решения поставленной обратной задачи (1)–(3) с неизвестными граничными условиями заключается в том, что из уравнения (4) невозможно найти $u_{N+1, j}$, соответствующее граничным значениям $u_\delta(L, t) = \varphi_\delta(t)$. С этой проблемой сталкивались многие исследователи [14, 16–18]. В данной работе для решения проблемы граничных точек предлагается использовать конечно-разностное уравнение, правая часть которого является комбинацией разностных аналогов производных в узлах (x_{N+1}, t_j) , (x_N, t_j) и (x_{N-1}, t_j) .

Другая существенная проблема разработки конечно-разностных схем заключается в том, что при наличии малых отклонений в исходных данных использование явных схем приводит к существенному искажению конечного результата. Эта проблема решается регуляризацией вычислительных алгоритмов [6, 18].

Устойчивость предлагаемой схемы обеспечивается регулированием шагов дискретизации и соблюдением определенных условий, накладываемых на их соотношение. Такой подход согласуется с результатами, приведенными в работе [18]. Отметим, что подобный подход в недавнем времени использовался для решения обратных задач динамики измерений [19]. С целью исследования устойчивости разработанной схемы и получения экспериментальных оценок точности построенных численных решений проводился вычислительный эксперимент на основе имитационного моделирования. В эксперименте проводился сравнительный анализ получаемых решений обратной задачи с тестовыми функциями, отражающими возможные варианты формирования температурных полей внутри технического объекта при различных граничных температурных режимах.

Численное моделирование

Численное моделирование осуществлялось в два этапа. Первый включал формирование тестовых функций $u(x, t)$, имитирующих основные типы распределения тепла внутри объекта. С этой целью находили численное решение $u(x, t)$ прямой задачи:

$$\begin{aligned} u_t &= au_{xx} + bu_x + \gamma u, & (x, t) &\in (0, L) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= f(x), & x &\in [0, L], \\ u(0, t) &= p(t), \quad u(L, t) = \varphi(t), & t &\in [0, T] \end{aligned}$$

для известных значений $f(x)$, $p(t)$, $\varphi(t)$. Далее формировали значения $p_\delta(t)$, добавляя к значениям $p(t)$ аддитивный шум различного уровня δ по формуле:

$$p_\delta(t) = p(t) + \mu \cdot p(t),$$

где μ – значение случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[-\delta, \delta]$.

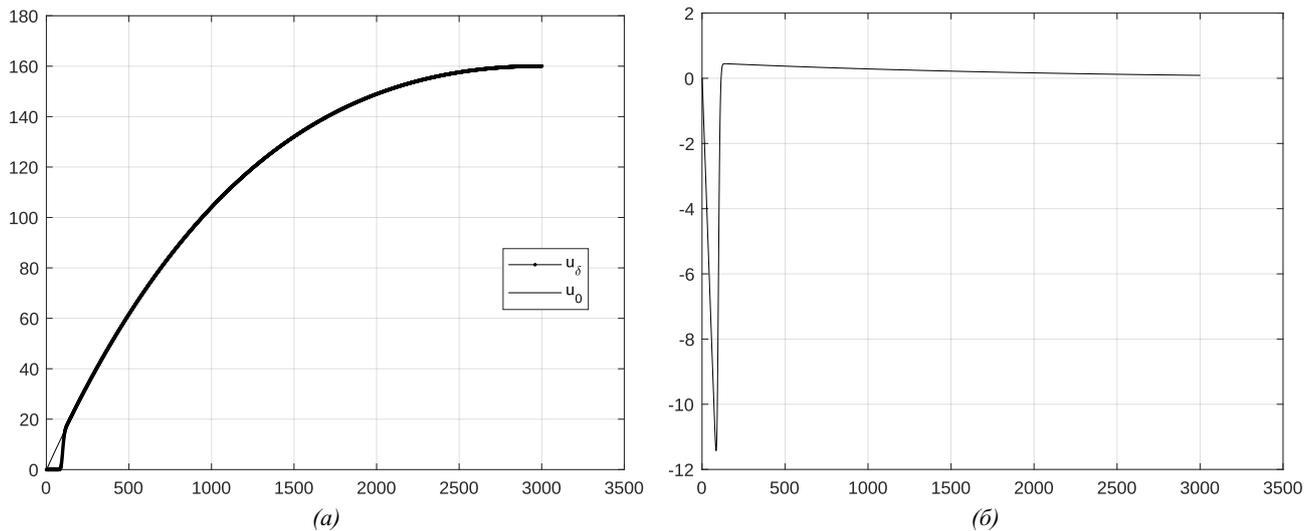


Рис. 1. Результаты эксперимента, полученные для теста 1 при $\delta = 5\%$.
(а) графики граничных функций, (б) график функции погрешности $\Delta(t)$

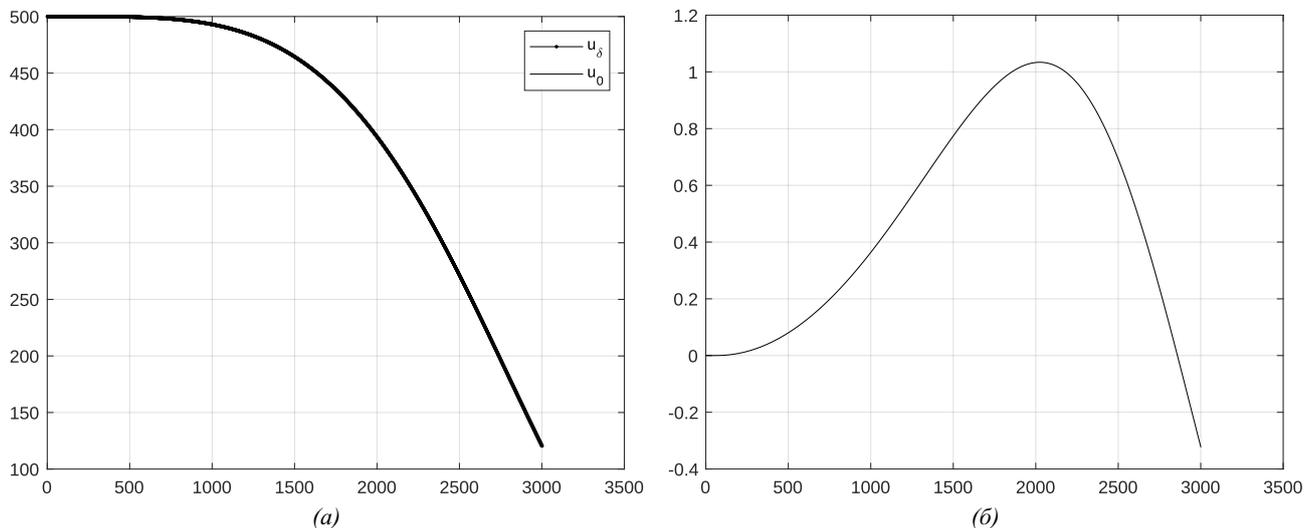


Рис. 2. Результаты эксперимента, полученные для теста 2 при $\delta = 5\%$.
(а) графики граничных функций, (б) график функции погрешности $\Delta(t)$

На втором этапе находили численное решение $u_\delta(x,t)$ обратной задачи (1)–(3) по известным значениям $f(x)$ и $p_\delta(t)$. Затем проводили сравнительный анализ $u_\delta(x,t)$, включающий сравнение полученных граничных значений $u_\delta(L,t) = \varphi_\delta(t)$, с тестовыми функциями $\varphi(t)$. Выбор граничных значений для сравнения обусловлен тем, что точки с координатами $x = L$ соответствуют внутренним точкам приграничного слоя, наиболее удаленным от поверхности объекта, и значения функции $u_\delta(x,t)$ в этих точках на каждом шаге итерационного процесса определяют последними. Таким образом, отклонение получаемых значений $\varphi_\delta(t)$ от тестовых $\varphi(t)$ будет наибольшим. Для проведения сравнительного анализа и получения оценок точности построенных решений использовалась функция погрешности $\Delta(t) = |\varphi_\delta(t) - \varphi(t)|$.

В работе приведены результаты эксперимента для тестовых функций, соответствующих следующим изменениям теплового состояния приграничного слоя: непрерывный нагрев (тест 1), постепенное охлаждение (тест 2), резкий нагрев и последующее охлаждение (тест 3), плавный нагрев и охлаждение (тест 4). Рисунки 1–4 иллюстрируют результаты экспериментов, полученных при уровне погрешности 5% при оптимальном соотношении шагов дискретизации для тестов 1–4 соответственно. На рисунках представлены графики найденных граничных значений $\varphi_\delta(t)$ и тестовых значений $\varphi(t)$,

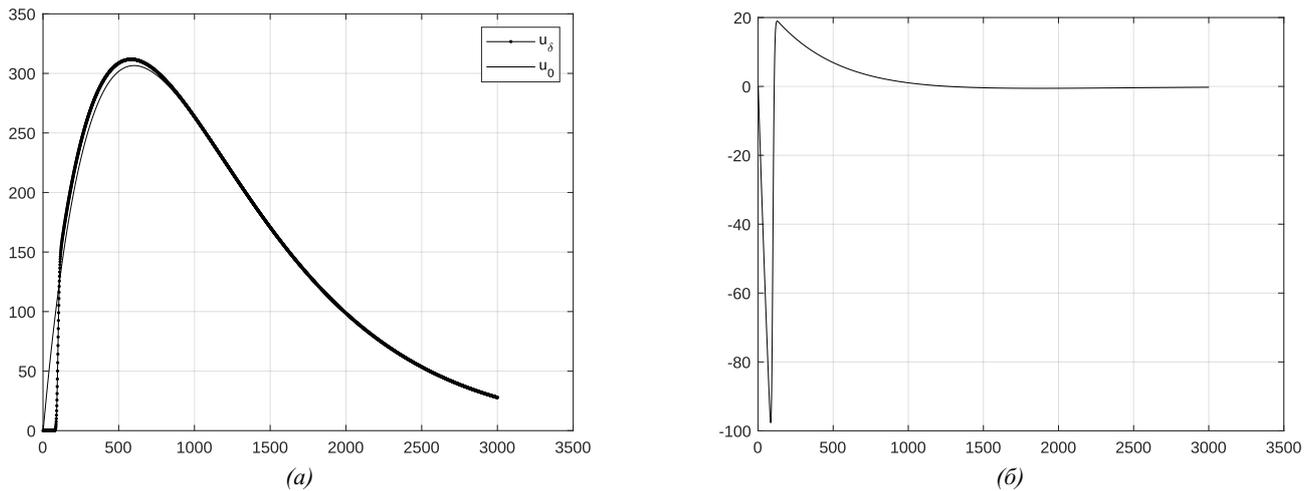


Рис. 3. Результаты эксперимента, полученные для теста 3 при $\delta = 5\%$.
(а) графики граничных функций, (б) график функции погрешности $\Delta(t)$

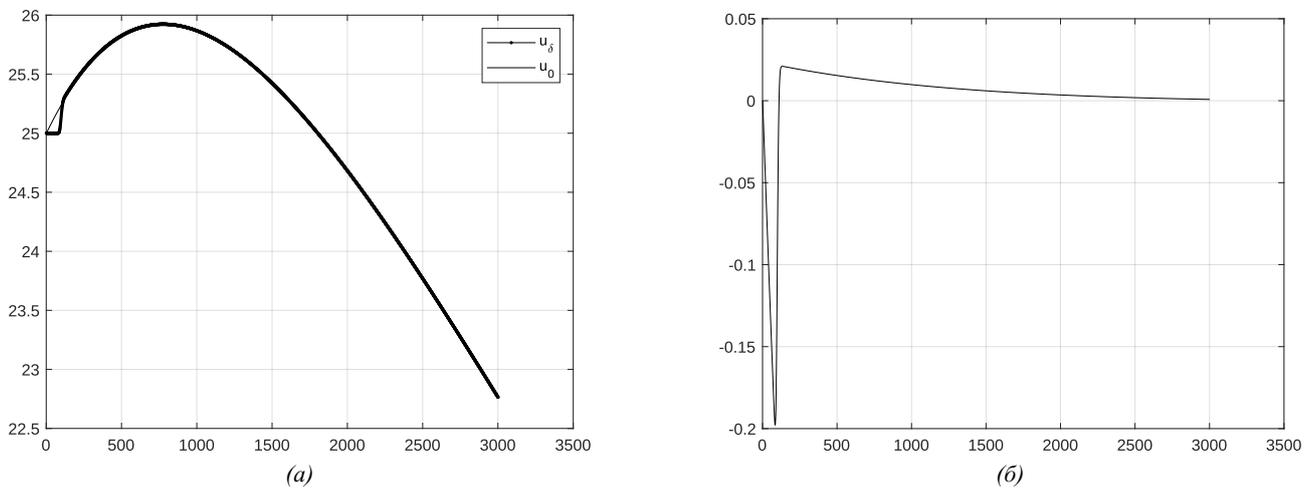


Рис. 4. Результаты эксперимента, полученные для теста 4 при $\delta = 5\%$.
(а) графики граничных функций, (б) график функции погрешности $\Delta(t)$

а также график функции погрешности $\Delta(t)$. На всех рисунках используются одинаковые обозначения: u_0 тестовая граничная функция $\varphi(t)$, u_δ численное решение обратной задачи $\varphi_\delta(t)$.

В эксперименте проводилось исследование взаимосвязи шагов дискретизации по пространству и времени. В результате выявлены соотношения шагов, обеспечивающие устойчивость вычислительной схемы. Графики граничных функций $u_\delta(L, t) = \varphi_\delta(t)$, полученные при шагах дискретизации, нарушающих эти условия, приведены на рисунке 5. Для иллюстраций выбраны результаты тестов, для которых значение величины $\Delta = \max_{t \in [0, T]} |\Delta(t)|$, полученное при соблюдении соотношения шагов дискретизации, было наименьшим.

Экспериментальные исследования включали получение экспериментальных оценок точности построенных решений. Значения величины $\Delta = \max_{t \in [0, T]} |\varphi_\delta(t) - \varphi(t)|$, полученные для каждого типа тестовых функций при различных уровнях погрешности исходных данных δ , приведены в таблице.

Заключение

В статье представлена вычислительная конечно-разностная схема решения обратной задачи с неполными исходными данными, построенная с использованием регуляризирующих подходов. Получены экспериментальные оценки точности построенных численных решений и установлено, что устойчивость схемы обеспечивается соблюдением соотношений шагов дискретизации, а присутствие погрешности в исходных данных не оказывает существенного влияния на точность получаемых решений.

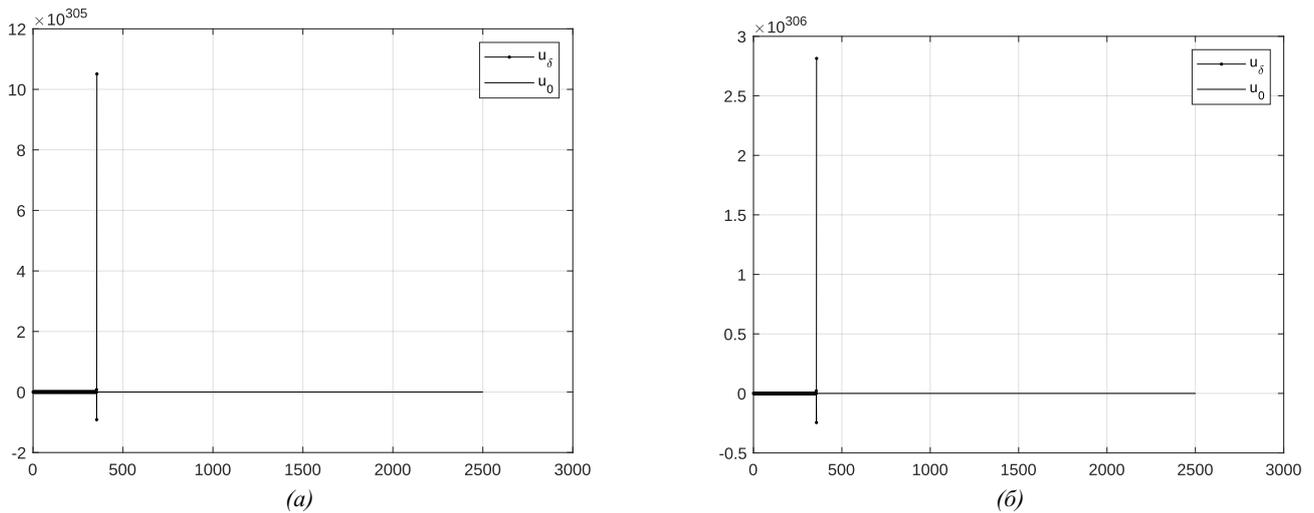


Рис. 5. Графики граничной функции $u_\delta(L, t) = \varphi_\delta(t)$, полученные с нарушением соотношения шагов дискретизации. (а) для теста 2, (б) для теста 4

Таблица

Оценка погрешности численных решений

Тестовая функция	δ (%)	$\Delta = \max_{t \in [0, T]} \varphi_\delta(t) - \varphi(t) $
непрерывный нагрев (тест 1)	4,8 (3%)	10,21
	8,0 (5%)	11,23
	16,0 (10%)	15,11
постепенное охлаждение (тест 2)	15,0 (3%)	1,13
	25,0 (5%)	1,21
	50,0 (10%)	1,32
резкий нагрев и последующее охлаждение (тест 3)	10,5 (3%)	88,22
	17,5 (5%)	89,41
	35 (10%)	90,30
плавный нагрев и охлаждение (тест 4)	7,8 (3%)	0,17
	13,0 (5%)	0,17
	26,0 (10%)	0,17

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука; 1986. 288 с.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*. М.: Наука; 1978. 208 с.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. М.: Наука; 1980. 286 с.
4. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство; 2009. 457 с.
5. Ягола А. Г., Степанова И. Э., Титаренко В. Н., Ван Я. *Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике*. М.: Бинوم; 2014. 216 с.
6. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Berlin: Walter de Gruyter; 2007. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110205794>.
7. Vasyliov V., Vasilyeva M. An Accurate Approximation of the Two-Phase Stefan Problem with Coefficient Smoothing. *Mathematics*. 2020;8:19224. DOI: 10.3390/math8111924.
8. Lukyanenko D. V., Borzunov A. A., Shishlenin M. A. Solving Coefficient Inverse Problems for Nonlinear Singularly Perturbed Equations of the Reaction-Diffusion-Advection Type with Data on the Position of a Reaction Front. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021;20(4):727–737. DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.105824.

9. Дилигенская А. Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической оптимизации. *Теплофизика высоких температур*. 2018;56(3):399–406. DOI: 10.7868/S0040364418030110.
10. Procudina L. A., Yaparov D., Numerical Modeling of the Mass of the Flowing Liquid at Transverse Oscillations of the Straight Tube. *AIP Conference Proceedings Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences: 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*, AMiTaNS. 2019;2164:120011. DOI: 10.1063/1.5130871.
11. Япарова Н. М., Гаврилова Т. П. Интегральная модель и численный метод определения температуры при линейном теплопереносе. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2019;19(4):60–71. DOI: 10.14529/ctcr190406.
12. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. *Метод квазиобращения*. М.: Мир; 1970. 336 с.
13. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена*. М.: Машиностроение; 1988. 280 с.
14. Beck J. V., Blackwell B., St. Clair C. R. Jr. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York: Wiley-Interscience; 1985. 308 p.
15. Uhlmann G. Electrical Impedance Tomography and Calderón's Problem. *Inverse Problems*. 2009;25:123011. DOI: 10.1088/0266-5611/25/12/123011.
16. Yaparova N. M. Numerical Method for Solving an Inverse Boundary Problem with Unknown Initial Conditions for Parabolic PDE Using Discrete Regularization. *Lecture Notes in Computer Science*. 2017;10187:752–759. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0_87.
17. Япарова Н. М. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015;15(2):97–108. DOI: 10.14529/ctcr150211.
18. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука; 1995. 512 с.
19. Япаров Д. Д., Шестаков А. Л. Саморегуляризирующий метод динамических измерений. *Автоматика и телемеханика*. 2024;4:112–124. DOI: 10.31857/S0005231024040073.