О ВЫБОРЕ КЛАССОВ КОРРЕКТНОСТИ

В. А. Галкин
Сургутский филиал федерального государственного автономного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, ✍ *val-gal@yandex.ru*

Аннотация: предложен общий топологический подход для анализа широкого класса обратных задач, возникающих при обработке потоков информации. Типичной проблемой, появляющейся при их решении на основе априорного задания топологий в пространстве множества допустимых решений и исходных данных (информации), является некорректность, связанная с отсутствием непрерывности обратного оператора. В теории методов решения некорректных задач широко применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова. В работе предлагается подход к выделению классов корректности для решения обратных задач, основанный на согласовании топологий множества исходных данных и обобщения понятия пространства решений, обеспечивающий непрерывную зависимость решения от исходных данных. Рассмотрены классы корректности, основанные на принципе выбора Цермело. Предлагаемый подход может быть использован при построении устойчивых искусственных нейронных сетей (ИНС) для задач распознавания образов. Возможно его распространение на технологии построения систем искусственного интеллекта (ИИ).

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, вычислительная неустойчивость, методы регуляризации.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Для цитирования: Галкин В. А. О выборе классов корректности. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):12–15.

Поступила в редакцию: 25.02.2025. *В окончательном варианте: 01.03.2025.*

THE CHOICE OF CORRECTNESS CLASSES

V. A. Galkin
Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute"
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9721-4026, ✍ *val-gal@yandex.ru*

Abstract: we present a general topological approach for analyzing a broad class of inverse problems that arise in processing information flows. These problems often involve the lack of continuity in the inverse operator due to the a priori assignment of topologies in the space of admissible solutions and given data. To address such ill-posed problems, researchers widely use A.N. Tikhonov's regularization method. We propose an approach to identifying correctness classes for inverse problems by aligning the topologies of source data and generalizing the concept of the solution space. This ensures the continuous dependence of the solution on the source data. We also examine correctness classes based on the Zermelo selection principle. The proposed approach can support the development of stable artificial neural networks (ANN) for pattern recognition tasks and may extend to artificial intelligence (AI) system technologies.

Keywords: artificial neural networks, numerical instability, regularization methods.

Acknowledgements: this is a part of the FNEF-2024-0001 Development and Deployment of Trusted AI Systems based on New Mathematical and Algorithmic Approaches and Fast Computing Models Compatible with Domestic Computer Hardware government contract (1023032100070-3-1.2.1) granted to the NRC "Kurchatov Institute" – SRISA.

Cite this article: Galkin V. A. The Choice of Correctness Classes. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):12–15.

Original article submitted: 25.02.2025. *Revision submitted: 01.03.2025.*

Введение

В ряде вычислительных экспериментов по распознаванию образов, относящихся к акустической, видео и текстовой информации, были найдены подходы к созданию программного обеспечения для практического решения задач в соответствующих областях. Эти успехи явились источником интереса к созданию полуэмпирических методов, носящих название искусственные нейронные сети (ИНС). Идейной основой реализации ИНС является принятие гипотезы о возможности создания технического информационного устройства, которое можно обучить на серии заданных примеров распознаванию образа (поиску решения) по информации, вообще говоря, не входящей в обучающий набор.

Указанные замечания относятся к общей фундаментальной проблеме анализа вычислительной устойчивости ИНС при наращивании объемов обучающих наборов и как следствие — границ реализуемости и безопасной применимости систем ИИ, построенных на комплексах ИНС, взаимодействующих между собой путем обмена информацией. Одной из существенных проблем построения технологий ИИ является вычислительная устойчивость ИНС, обеспечивающих надежную интерпретацию входной информации, которая передается между различными ИНС для детализации и уточнения принимаемых решений.

Практическое использование ИНС нацелено на реконструкцию недоступного для непосредственного наблюдения объекта $z \in F$ на основе обработки «сжатой» информации $u \in U$, полученной из входного потока больших объемов данных с целью их классификации и интерпретации.

Процедура сжатия больших объемов данных может быть рассмотрена как действие вполне непрерывного оператора A на заданной паре метрических пространств F, U, т.е. $A : F \to U$ (это отображение трактуется как математическая модель аппаратуры, при помощи которой получают информацию $u \in U$ при наблюдении за объектом $z \in F$).

$$A(z) = u. \tag{1}$$

Соответственно, процедуру «сжатия» входной информации под действием оператора A можно трактовать как то, что ограниченные множества входных данных Big Data zпреобразуются в предкомпактные подмножества выходных данных (почти конечные множества, т.е. хорошо аппроксимируемые конечными ε-сетями). Задачи распознавания образов, задачи их классификации на основе ИНС можно сформулировать как построение обратного оператора $R = A^{-1} \quad : U \to F$

$$R(u) = z \tag{2}$$

на основе полученных данных, лежащих в предкомпактном множестве.

Центральной проблемой для отыскания (1) с компактным непрерывным оператором A является либо отсутствие решения уравнения (1) (т.е. не при всех значениях $u \in U$ существует решение уравнения (1)), либо отсутствие свойства непрерывности у обратного оператора R на множестве значений $A(F) \subset U$ — принципиальная вычислительная неустойчивость ИНС, основанной на формуле (2), см. [1, 2].

Природа отмеченной некорректности задачи (1) связана с произволом в выборе топологий, задаваемых пользователем на множествах F, U. Ниже рассматриваются согласованные топологии на этой паре множеств, позволяющих обеспечить построение классов корректности для широкого класса задач (1).

Таким образом, классы задач, основанные на применении ИНС как средства аппроксимации отображений и построения решений обратных задач с компактным оператором, обнаруживают общее математическое свойство — вычислительную неустойчивость при обработке больших массивов данных. Эти проблемы аналогичны также для задач «восстановления» образов по «цифровым двойникам», поскольку имеют ту же математическую природу.

Вспомогательные построения

Для заданного отображения (1), являющегося математической моделью получения информации $u \in U$, выделим классы корректности задачи об отыскании неизвестной $z \in F$ посредством задания метрики ρ_U на множестве допустимых значений информации U, которую ниже согласованным образом перенесем на множество F.

Определение 1. Назовем классом корректности для уравнения (1) на заданном информационном пространстве (U, ρ_U) такое метрическое подпространство (F_1, ρ_{F_1}), где $F_1 \subset F$, ρ_{F_1} — метрика на множестве F_1, что сужение отображения A на множество F_1

$$A|_{F_1} : (F_1, \rho_{F_1}) \to (U, \rho_U)$$

является гомеоморфизмом.

В общем случае для задания класса корректности считаем заранее определенной метрику ρ_U. Для каждого заданного $u \in A(F) \subset U$ рассмотрим полный прообраз $A^{-1}(u)$, который, очевидно, задает все множество решений уравнения (1) для указанных исходных данных.

Определим на множестве F отношение эквивалентности $\sim$, полагая $z' \sim z''$, если $A(z') = A(z'')$. Обозначим

$$F^* = \{A^{-1}(u), \quad u \in A(F)\}.$$

На множестве классов F^* определим метрику

$$\rho^*(A^{-1}(u'), A^{-1}(u'') \stackrel{def}{=} \rho_U(u', u''). \tag{3}$$

Отметим, что отображение $A : F \to U$ естественным образом продолжается до отображения $A^* : F^* \to U$ по формуле

$$A^*(z^*) = u \qquad\qquad \forall z^* \in F^*, \tag{4}$$

так как $\forall z \in z^* : \quad A(z) = u$.

Определение 2. Элемент множества $z^* \in F^*$ назовем обобщенным решением уравнения (1), если для него выполнено равенство (4).

Лемма 1. *Отображение $A^* : (F^*, \rho^*) \to (A(F), \rho_U)$ является изометрическим гомеоморфизмом.*

Доказательство. Утверждение леммы 1 является прямым следствием формулы (3). Действительно, в силу (3) для любых элементов $z_1 \in z_1^*$ и $z_2 \in z_2^*$ таких, что $A(z_1) \stackrel{def}{=} u_1$ и $A(z_2) \stackrel{def}{=} u_2$, имеет место равенство

$$\rho^*(z_1^*, z_2^*) \stackrel{def}{=} \rho^*(A^{-1}(u_1), A^{-1}(u_2)) = \rho_U(u_1, u_2).$$

Следовательно, отображение $A^* : (F^*, \rho^*) \leftrightarrow (A(F), \rho_U)$ сохраняет расстояние, т.е. является изоморфизмом. Лемма доказана.

Следствие. Задача (4) является корректной на паре метрических пространств (F^*, ρ^*) $(A(F), \rho_U)$.

В силу множественности элементов, составляющих обобщенное решение $z^* \in F^*$, практическую значимость имеет принцип отбора точек $z \in z^*$. В частности, для этой цели может быть использована аксиома выбора Цермело (Zermelo) [1], постулирующая существование отображения $\tilde{Z} : F^* \to F$ такого, что $\tilde{Z}(z^*) = z(z^*) \in z^*$. Положим $F_1 \stackrel{def}{=} \tilde{Z}(F^*)$. Зададим на этом множестве структуру метрического пространства посредством метрики

$$\rho_{F_1}(z_1, z_2) \stackrel{def}{=} \rho^*(z_1^*, z_2^*). \tag{5}$$

Теорема существования классов корректности

Теорема. *Сужение отображения $A|_{F_1} : (F_1, \rho_{F_1}) \to (A(F_1), \rho_U)$ является изометрическим гомеоморфизмом, а соответствующая пара метрических пространств (F_1, ρ_{F_1}), $(A(F_1), \rho_U)$ задает класс корректности уравнения (1), который назовем $\tilde{Z}$-классом корректности Цермело.*

Замечание. Точность «распознавания образа» z на основе решения задачи (1) в классе корректности Цермело полностью совпадает с точностью получения исходных данных в информационном пространстве (U, ρ_U).

Доказательство теоремы. Действительно, поскольку выполнены равенства

$$A(z_1) = A^*(z_1^*) = u_1,$$
$$A(z_2) = A^*(z_2^*) = u_2,$$

то отображение $A|_{F_1} : F_1 \to A(F_1)$ является взаимно однозначным. Таким образом, справедливы следующие равенства: $\rho_{F_1}(z_1, z_2) = \rho^*(z_1^*, z_2^*) = \rho_U(u_1, u_2)$. Следовательно, $\rho_{F_1}(A^{-1}(u_1), A^{-1}(u_2)) = \rho_U(u_1, u_2)$ и, значит, отображение A является изометрическим гомеоморфизмом на паре пространств $F_1, A(F_1)$.

Теорема доказана.

Практическую значимость имеет вопрос построения отображения выбора Цермело $\tilde{Z}$. Например, задание структуры вполне упорядоченного пространства на множестве F, что гарантируется теоремой Цермело [3] о вполне упорядоченных пространствах, индуцирует соответствующий полный порядок на подмножестве $z^* \subset F$. В этом случае в качестве значения отображения Цермело $\tilde{Z}$ можно взять минимальный элемент на z^*, то есть

$$\tilde{Z}(z^*) = \min\{z \in z^*\}. \quad (6)$$

Таким образом, построение классов корректности, указанных в теореме 1, по формуле (6) порождается всеми возможными способами полного упорядочивания множества неизвестных величин F. Отметим, что для счетных множеств F полный порядок определяется заданием взаимно однозначного его отображения на натуральный числовой ряд.

Замечание

Задание функций выбора Цермело на иерархических обобщенных последовательностях в смысле Мура [3] параметризованных ИНС можно трактовать как технологии построения ИИ, детализирующие подходы из работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука; 1986.
2. Бетелин В. Б., Галкин В. А. Математические задачи, связанные с искусственным интеллектом и искусственными нейронными сетями. *Успехи кибернетики*. 2021;2(4):6–14. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-4-1.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Общая теория*. Т. 1. М: Издательство иностранной литературы; 1962.
4. Гавриленко Т. В., Галкин В. А. Интуитивные логические системы и их приложения в технологиях искусственного интеллекта. *Успехи кибернетики*. 2024;5(1):8–16. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-01.