

ВЛИЯНИЕ ПРЕСИНАПТИЧЕСКИХ СИНАПСОВ НА РАСПОЗНАЮЩУЮ СПОСОБНОСТЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Б. В. Крыжановский

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского
центра «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, ✉ kryzhanov@mail.ru

Аннотация: исследованы свойства нейронной сети в случае, когда ранг тензора связей выше двух, т.е. помимо матрицы синаптических связей присутствуют пресинаптические синапсы. Такого рода тензоры связи имеют место при аппаратной реализации нейронной сети на основе кроссбаров. Неотъемлемым свойством кроссбарной схемы является наличие паразитных токов: сигнал с одной шины, идущей на некоторый нейрон, перетекает через ячейки памяти (синапсы) на шины всех других нейронов. Тем самым на входной сигнал нейрона накладывается шум — ослабленные сигналы, идущие на все остальные нейроны. При этом проводимость аналоговой кроссбарной ячейки изменяется пропорционально шумовому сигналу и выходной сигнал ячейки приобретает нелинейный по входу характер. Показано, что при определенном виде тензора связей качество нейросетевого алгоритма значительно улучшается. Анализ проведен на примере сети, подобной сети Хопфилда.

Ключевые слова: тензор связи, искусственные нейронные сети, кроссбар, модель Хопфилда.

Благодарности: работа выполнена в рамках госзадания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, проект FNEF-2024-0001.

Для цитирования: Крыжановский Б. В. Влияние пресинаптических синапсов на распознающую способность нейронной сети. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):16–22.

Поступила в редакцию: 20.01.2025.

В окончательном варианте: 27.01.2025.

EFFECTS OF PRESYNAPTIC SYNAPSES ON THE RECOGNITION RATE OF A NEURAL NETWORK

B. V. Kryzhanovsky

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”,
Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0901-6370>, ✉ kryzhanov@mail.ru

Abstract: we studied the properties of a neural network where the rank of the coupling tensor is greater than two. In this case, in addition to the matrix of synaptic connections, there are presynaptic synapses. Such coupling tensors occur in hardware implementations of neural networks based on crossbar arrays. An inherent property of the crossbar scheme is the presence of parasitic currents: a signal from one wire going to a specific neuron flows through memory cells (synapses) to the wires of all other neurons. As a result, noise is superimposed on the input signal of the neuron, weakening signals going to all other neurons. In this scenario, the conductivity of the analog crossbar cell changes proportionally to the noise signal, causing the output signal of the cell to acquire a nonlinear relationship with the input. We showed that with a specific type of coupling tensor, the quality of the neural network algorithm improved significantly. We used a network similar to the Hopfield network as an example.

Keywords: coupling tensor, artificial neural networks, crossbar, Hopfield model.

Acknowledgements: this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Kurchatov Institute.

Cite this article: Kryzhanovsky B. V. Effects of Presynaptic Synapses on the Recognition Rate of a Neural Network. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):16–22.

Original article submitted: 20.01.2025.

Revision submitted: 27.01.2025.

Введение

Наиболее сложной проблемой при аппаратной реализации искусственной нейронной сети является создание связей (синапсов) между нейронами. В большинстве алгоритмов, используемых в различных приложениях, число связей превышает значение $10^4 - 10^5$. Соответственно, реализация

такого числа связей стандартными методами электроники представляет собой чрезвычайно сложную задачу.

Одним из подходов к решению означенной проблемы является организация связей в виде кроссбаров [1–8], основанных на аналоговых ячейках памяти. Как правило, рассматриваются энергонезависимые ячейки памяти на сегнетоэлектрических [9, 10], магнитных [11], органических [12, 13] и металлооксидных [14–19] материалах, на плавающем затворе транзистора [20–22] и на фазовых переходах [23–25]. Такие кроссбары являются компонентами смешанных сигнальных схем, реализующих векторно-матричное умножение, которое является основной операцией в любой искусственной нейронной сети. Важно, что такие схемы позволяют выполнять вычисления на физическом уровне, используя фундаментальные законы Ома и Кирхгофа. По сравнению с цифровыми решениями это обеспечивает значительно более высокую эффективность использования энергии и площади.

Существенным недостатком кроссбарных схем является наличие паразитных токов и токов утечек. Если с утечками можно бороться тем или иным способом, то паразитные токи являются неотъемлемой частью кроссбарной схемы: сигнал с одной шины, идущей на некоторый (j -й) нейрон, перетекает через ячейки памяти на шины всех других нейронов. Тем самым, на входной сигнал i -го нейрона накладывается шум - ослабленные сигналы, идущие на все остальные нейроны. При этом проводимость аналоговой ячейки изменяется пропорционально шумовому сигналу и выходной сигнал ячейки приобретает нелинейный по входу характер. Такую ситуацию в каком-то виде описывает приведенное ниже выражение (1). Как правило, наличие шума ухудшает работу нейронной сети. Ниже мы покажем, что ухудшение не является обязательным: при определенных условиях наличие такого рода «шума» может существенно улучшить качество нейросетевого алгоритма. Анализ проведен на примере сети, подобной сети Хопфилда [26]. Этот тип нейронной сети наиболее хорошо исследован [27–40], и результаты аппаратной реализации легко проверить, используя многочисленные аналитические результаты.

Описание модели

Рассмотрим сеть Хопфилдова типа, состоящую из N нейронов, в которой входной сигнал на i -й нейрон задается выражением:

$$S_i = S_{0i} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_r} T_{i,j_1, \dots, j_r}^{(r)} y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_r} \quad (1)$$

где y_j - выходной сигнал от j -го нейрона ($i, j = 1, 2, \dots, N$), S_{0i} - некий параметр, не обязательно равный нулю (как в модели Хопфилда), а $T_{i,j_1, \dots, j_r}^{(r)}$ - связи между нейронами.

Будем полагать, что ассоциативная память построена на M случайных бинарных паттернах $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)})$, $x_i^{(m)} = \pm 1$, $m = 1, 2, \dots, M$. Связи, приходящие на i -й нейрон задаются подобно правилу Хэбба [41]:

$$T_{i,j_1, \dots, j_r}^{(r)} = a_r \sum_{m=1}^M x_i^{(m)} x_{j_1}^{(m)} \dots x_{j_r}^{(m)} \quad (2)$$

В стандартной модели Хопфилда отсутствуют нелинейные отклики, т.е. учитывается только линейный член $a_1 = 1$ ($a_r = 0$ при $r \geq 2$). В нейрофизиологических исследованиях известны ситуации [42], когда образуется пресинаптический синапс, т.е. аксон одного нейрона образует синаптическую связь с аксоном другого нейрона. Это соответствует удержанию в сумме (1) только двух первых членов $r = 1, 2$ ($a_r = 0$ при $r \geq 3$).

Для простоты выражений не будем требовать, чтобы диагональные элементы тензора связей были строго равны нулю, как в модели Хопфилда. Основные результаты от этого мало изменятся, и все сведется только к переобозначениям некоторых коэффициентов. В этом случае входной сигнал S_i можно записать в виде:

$$S_i = S_{0i} + \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\infty} a_r x_i^{(m)} (x_m y)^r \quad (3)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ есть вектор текущего состояния сети.

Энергия такой системы имеет вид:

$$E = S_0 y + \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r}{r+1} (x_m y)^{r+1} \quad (4)$$

Распознавание паттернов

В общем случае анализ качества распознавания паттернов не представляется возможным. Ограничимся рассмотрением частного случая, который позволит сделать некоторые общие выводы. В частности, влияние порогового вектора S_{0i} на эффективность распознающей способности сети рассмотрим в последующей работе. Здесь ограничимся случаем $S_{0i} = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда связи определяются следующим выражением:

$$a_r = \frac{\alpha^r}{r!} \quad (5)$$

В этом случае выражение (3) преобразуется к виду:

$$S_i = \sum_m x_i^{(m)} (e^{\alpha x_m y} - 1) \quad (6)$$

С учетом (6) перейдем к вопросу о распознающей способности рассматриваемой нейросети. Пусть на вход сети подается вектор y , представляющий собой искаженный вариант одного из паттернов, например паттерна x_μ : $y_i = -x_i^{(\mu)}$ с вероятностью p , $y_i = x_i^{(\mu)}$ с вероятностью $1 - p$, где Np — доля искаженных компонент. Тогда (6) можно преобразовать к виду:

$$S_i = x_i^{(\mu)} (e^{\alpha x_\mu y} - 1) + \sum_{m \neq \mu} x_i^{(m)} (e^{\alpha x_m y} - 1) \quad (7)$$

Условие правильного распознавания имеет вид $S_i x_i^{(\mu)} > 0$ для всех $i = 1, \dots, N$ одновременно. На языке спиновых систем это условие означает, что всякий спин $x_i^{(\mu)}$ направлен вдоль воздействующего на него локального поля S_i . Выполнение условия правильного распознавания рассмотрим в двух предельных случаях.

а) В пределе $\alpha N \ll 1$ мы переходим к стандартной модели Хопфилда. Действительно, оставляя в (7) только члены первого порядка по α , получим, что условие $S_i x_i^{(\mu)} > 0$ преобразуется в известное соотношение:

$$N(1 - 2p) + \sum_{m \neq \mu} \sum_{j \neq i} x_i^{(\mu)} x_i^{(m)} x_j^{(m)} y_j > 0 \quad (8)$$

Второй из членов в левой части (9) — это внутренний шум: случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и дисперсией равной $\sigma_M^2 = NM$. Применяя теоретико-вероятностный подход [29–31], получим: условие $S_i x_i^{(\mu)} > 0$ на одном нейроне выполняется с вероятностью $Q = 1 - 0.5 \cdot \text{erf } z$, где:

$$z = \frac{N(1 - 2p)}{\sqrt{2}\sigma_M} = \sqrt{\frac{N}{2M}}(1 - 2p) \quad (9)$$

Соответственно, вероятность правильного распознавания паттерна в целом равна Q^N , а вероятность ошибки распознавания Pr имеет вид:

$$\text{Pr} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \text{erf } z\right)^N \quad (10)$$

Правильное распознавание имеется в случае $z \rightarrow 0$. В этом случае вероятность ошибки с точностью до несущественных коэффициентов принимает вид:

$$\text{Pr} \sim N \exp \left[\frac{N(1 - 2p)^2}{2M} \right] \quad (11)$$

Отсюда на величину ассоциативной памяти из условия $P_g \ll 1$ вытекает известное ограничение $M < M_{\max}$, где:

$$M_{\max} = \frac{N}{2 \ln N} (1 - 2p)^2 \quad (12)$$

Отметим, что в пределе $N \rightarrow \infty$ более корректное выражение $M_{\max} \simeq 0.138N$ получено в [27] на основе статфизического подхода к описанию модели Хопфилда с хэббовской матрицей связи. В работе [28] проведено обобщение этого результата на случай взвешенной хэббовской матрицы.

б) В противоположном пределе $\alpha N \gg 1$ пренебрежем в (7) единицами по сравнению с экспонентами. Тогда это выражение примет вид:

$$S_i \approx x_i^{(\mu)} e^{\alpha x_\mu y} \left[1 + \sum_{m \neq \mu} x_i^{(\mu)} x_i^{(m)} e^{\alpha (x_m - x_\mu) y} \right] \quad (13)$$

Сумма в квадратных скобках (13) играет роль шума, т.е.

$$Noise \approx \sum_{m \neq \mu} x_i^{(\mu)} x_i^{(m)} e^{\alpha (x_m - x_\mu) y} \quad (14)$$

Соответственно, условие правильного распознавания $S_i x_i^{(\mu)} > 0$ выполняется при $Noise < 1$. Нетрудно заметить, что величина $Noise$ — это случайная нормально распределенная величина с нулевым средним. Дисперсию этой величины трудно оценить в общем случае, однако этого и не требуется — ниже мы поступим проще.

Для простоты рассмотрим случай распознавания паттерна без искажений, т.е. $y = x_\mu$. Обозначим через γN максимальную меру сходства между различными паттернами. Тогда, с учетом соотношений $x_m x_\mu < \gamma N$ и $y x_\mu \equiv N$ из (14) получим:

$$Noise = \sum_{m \neq \mu} x_i^{(\mu)} x_i^{(m)} e^{\alpha x_m x_\mu - \alpha N} < \sum_{m \neq \mu} x_i^{(\mu)} x_i^{(m)} e^{-\alpha N(1-\gamma)} \quad (15)$$

Отсюда следует:

$$Noise < M e^{-\alpha N(1-\gamma)} \quad (16)$$

Если положить

$$\alpha > \frac{\ln M}{(1-\gamma)N} \quad (17)$$

то для любого $i \in \overline{1, N}$ шум всегда будет меньше сигнала ($Noise < 1$). Соответственно, размер памяти ($M \leq M_{\max}$) будет ограничиваться величиной:

$$M_{\max} = e^{\alpha N(1-\gamma)} \quad (18)$$

Как видим, в рассматриваемом пределе $\alpha N \gg 1$ размер ассоциативной памяти M может быть значительно больше числа нейронов N .

Выражение (18) получено для случая, когда на вход сети поступает неискаженный паттерн ($p = 0$). Это выражение легко обобщается и на случай распознавания искаженного паттерна:

$$M_{\max} = e^{\alpha N(1-2p-\gamma)} \quad (19)$$

Как видим, для эффективного распознавания достаточно условия $1 - 2p > \gamma$, которое означает, что искажения не слишком велики: противоположное условие $\gamma > 1 - 2p$ означает, что паттерн x_μ в результате сильного искажения стал ближе к одному из паттернов $x_m (m \neq \mu)$ памяти. Естественно, что в этом случае паттерн x_μ распознан не будет, а будет распознан паттерн x_m .

Обсуждение результатов

Проведенный выше анализ показал, что наличие в сети нелинейных связей с коэффициентами типа (5) приводит к существенному повышению эффективности распознавания. В частности, при $\alpha N \rightarrow \infty$ нейросеть может уверенно распознавать паттерны с искажениями $p \rightarrow 0.5$. Причем объем ассоциативной памяти сети возрастает экспоненциально с ростом N в соответствии с (19). На самом деле в этом нет ничего удивительного, поскольку и память нейросети и ее распознающая способность определяются не числом нейронов, а числом связей: в пределе $\alpha N \rightarrow \infty$ число связей также стремится к бесконечности.

Модель, описываемая выше выражениями (1)–(4), скорее всего далека от того, чтобы корректно описывать аппаратную реализацию нейронной сети на базе мемристорных кроссбаров. Однако, она дает некоторое представление о влиянии паразитных токов на эффективность распознавания. Скорее всего, для описания этого влияния достаточно учесть в сумме (1) только первые два члена, т.е. представить (1) в виде:

$$S_i = \sum_{j \neq i} T_{ij}^{(1)} y_j + \sum_{j,k \neq i} T_{ijk}^{(2)} y_j y_k \quad (20)$$

где первый член в правой части — описывает стандартную модель Хопфилда, а второй — кубическую нелинейность, обусловленную наличием шумовых сигналов:

$$T_{ij}^{(1)} = \sum_{m=1}^M x_i^{(m)} x_j^{(m)}, T_{ijk}^{(2)} = a \sum_{m=1}^M x_i^{(m)} x_j^{(m)} x_k^{(m)} \quad (21)$$

Чтобы проверить влияние второго члена на эффективность распознавания мы провели численное моделирование для сети небольшого размера $N = 100$. Для каждого значения параметра a , величины искажений входного паттерна p и параметра загрузки M/N генерировалось по 10^3 хэббовских матриц и вычислялись усредненные величины Pr . Результаты моделирования приведены на рисунках 1, 2.

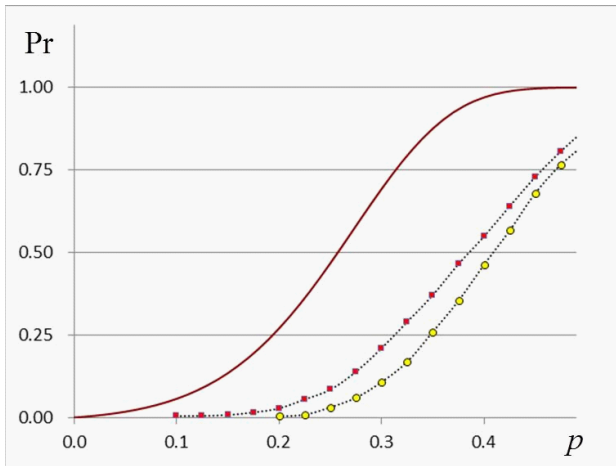


Рис. 1. Зависимость ошибки распознавания Pr от величины искажений p . Кривые слева направо соответствуют $a = 0, 0.01, 0.1$. Загрузка фиксирована $M = 0.13N, N = 100$

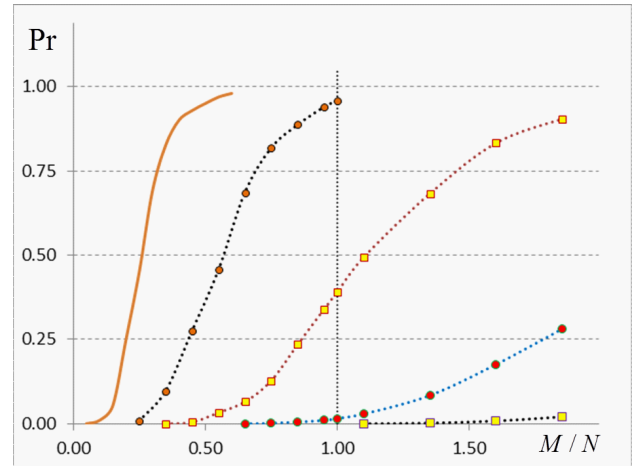


Рис. 2. Зависимость ошибки распознавания Pr от величины загрузки M/N . Кривые слева направо соответствуют $a = 0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$

На рисунке 1 показана зависимость ошибки распознавания Pr от величины искажения входного паттерна p . Как видим, при заданной загрузке $M/N = 0.13$ стандартная сеть Хопфилда (сплошная кривая, $a = 0$) начинает выдавать ошибку уже при очень малых искажениях $p \sim 0.05$. В то же время, небольшая примесь нелинейности существенно улучшает картину: в случае $a = 0.01$ сеть начинает ошибаться при $p \geq 0.1$, а в случае $a = 0.1$ отличная от нуля ошибка появляется только при $p \geq 0.2$.

На рисунке 2 показана зависимость ошибки распознавания Pr неискаженных паттернов ($p = 0$) от величины загрузки M/N . Как видим, стандартная сеть Хопфилда (сплошная кривая, $a = 0$)

перестает распознавать неискаженный паттерн уже при малых загрузках ($M/N \geq 0.07$). В то же время, наличие даже небольшой примеси нелинейности $a = 0.01$ гарантирует безошибочное распознавание при объеме памяти $M \leq 0.25N$. С ростом параметра a величина памяти резко возрастает: так при $a = 0.1$ отличная от нуля ошибка появляется только при $M > 1.2N$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pershin Y., Di Ventra M. Experimental Demonstration of Associative Memory with Memristive Neural Networks. *Neural Networks*. 2010;23(7):881–886.
2. Jo S. H., Chang T., Ebong I. et al. Nanoscale Memristor Device as Synapse in Neuromorphic Systems. *Nanoletters*. 2010;10(4):1297–1301.
3. Truong S. N., Ham S. J., Min K. S. Neuromorphic Crossbar Circuit with Nanoscale Filamentary-Switching Binary Memristors for Speech Recognition. *Nanoscale Res. Lett.* 2014;9:629–629.
4. Zhu X., Yang X., Wu C. et al. Hamming Network Circuits Based on CMOS/Memristor Hybrid Design. *IEICE Electronics Express*. 2013;10(12):20130404-20130404.
5. Palagushkin A. N., Roshchupkin D. V., Yudkin F. A. et al. Aspects of the a-TiOx Memristor Active Medium Technology. *J. Appl. Phys.* 2018;124(20):205109.
6. Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л., Абгарян К. К. Известия вузов. Вопросы реализации нейросетевых алгоритмов на мемристорных кроссбарах. *Материалы электронной техники*. 2019;22(4):272–278.
7. Kim H., Mahmoodi M. R., Nili H., Strukov D. B. 4K-memristor Analog-Grade Passive Crossbar Circuit. *Nat. Commun.* 2021;12(1):5198.
8. Liu X., Zeng Z. Memristor Crossbar Architectures for Implementing Deep Neural Networks. *Complex & Intelligent System*. 2022;8:787–802.
9. Kaneko Y., Nishitani Y., Ueda M. Ferroelectric Artificial Synapses for Recognition of a Multishaded Image. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2014;61:2827–2833.
10. Boyn S. et al. Learning Through Ferroelectric Domain Dynamics in Solid-State Synapses. *Nat. Commun.* 2017;8(1):14736.
11. Romera M. et al. Vowel Recognition with Four Coupled Spin-Torque Nanooscillators. *Nature*. 2018;563:230–234.
12. Fuller E. J. et al. Parallel Programming of an Ionic Floating-Gate Memory Array for Scalable Neuromorphic Computing. *Science*. 2019;364:570–574.
13. Goswami S. et al. Robust Resistive Memory Devices Using Solution-Processable Metal-Coordinated Azo Aromatics. *Nat. Mater.* 2017;16:1216–1224.
14. Indiveri G. et al. Integration of Nanoscale Memristor Synapses in Neuromorphic Computing Architectures. *Nanotechnology*. 2013;24:384010.
15. Prezioso M. et al. Training and Operation of an Integrated Neuromorphic Network Based on Metal-Oxide Memristors. *Nature*. 2015;521:61–64.
16. Ambrogio S. et al. Neuromorphic Learning and Recognition with One-Transistor-One-Resistor Synapses and Bistable Metal Oxide RRAM. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2016;63:1508–1515.
17. Adam G. C. et al. 3-D Memristor Crossbars for Analog and Neuromorphic Computing Applications. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2017;64:312–318.
18. Hu M. et al. Memristor-Based Analog Computation and Neural Network Classification with a Dot Product Engine. *Adv. Mater.* 2018;30:1705914.
19. Merrikh B. F. et al. Implementation of Multilayer Perceptron Network with Highly Uniform Passive Memristive Crossbar Circuits. *Nat. Commun.* 2018;9(1).
20. Chakrabartty S., Cauwenberghs G. Sub-Microwatt Analog VLSI Trainable Pattern Classifier. *IEEE J. Solid-State Circuits*. 2007;42:1169–1179.
21. Ramakrishnan S., Hasler J. Vector-Matrix Multiply and Winner-Take-All as an Analog Classifier. *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. Syst.* 2014;22:353–361.
22. Merrikh B. F. et al. High-Performance Mixed-Signal Neurocomputing with Nanoscale Floating-Gate Memory Cells. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2018;29:4782–4790.
23. Eryilmaz S. B. et al. Brain-Like Associative Learning Using a Nanoscale Nonvolatile Phase Change Synaptic Device Array. *Front. Neurosci.* 2014;8:205.

24. Burr G. W. et al. Experimental Demonstration and Tolerancing of a Large-Scale Neural Network (165 000 Synapses) Using Phase-Change Memory as the Synaptic Weight Element. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2015;62:3498–3507.
25. Boybat I. et al. Neuromorphic Computing with Multi-Memristive Synapses. *Nat. Commun.* 2018;9(1).
26. Hopfield J. J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1982;79:2554-2558.
27. Amit D. J., Gutfreund H., Sompolinsky H. Storing Infinite Numbers of Patterns in a Spin-Glass Model of Neural Networks. *Physical Review Letters*. 1985;55(14):1530–1533.
28. Karandashev I., Kryzhanovsky B., Litinskii L. Weighted Patterns as a Tool to Improve the Hopfield Model. *Physical Review E*. 2012;85:041925.
29. Kryzhanovsky B. V., Kryzhanovsky V. M., Mikaelian A. L. et al. Parametric Dynamic Neural Network Recognition Power. *Optical Memory & Neural Network*. 2001;10(4):211-218.
30. Kryzhanovsky B. V., Mikaelian A. L. On the Recognition Ability of a Neural Network on Neurons with Parametric Transformation of Frequencies. *Doklady Mathematics*. 2002;65(2):286-288.
31. Kryzhanovsky B., Litinskii L., Fonarev A. An Effective Associative Memory for Pattern Recognition. *Lecture Notes in Computer Science*. 2003;2810:179-186.
32. Kryzhanovsky B. V., Kryzhanovsky V. M. Modified q-state Potts Model with Binarized Synaptic Coefficients. *Lecture Notes in Computer Science*. 2008;5164:72-80.
33. Karandashev I., Kryzhanovsky B., Litinskii L. Properties of the Hopfield Model with Weighted Patterns. *Lecture Notes in Computer Science*. 2012;7552:41-48.
34. Agliari E., Albanese L., Alemanno F. et al. Dense Hebbian Neural Networks: A Replica Symmetric Picture of Supervised Learning. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2023;626:129076.
35. Barra A., Bernacchia A., Santucci E., Contucci P. On the Equivalence of Hopfield Networks and Boltzmann Machines. *Neural Networks*. 2012;34:1–9.
36. Bertram R., Rubin J. E. Multi-Timescale Systems and Fast-Slow Analysis. *Mathematical Biosciences*. 2017;287:105–121.
37. Fanaskov V., Oseledets I. *Associative Memory and Dead Neurons*. arXiv:2410.13866.
38. Hinton G. E. A Practical Guide to Training Restricted Boltzmann Machines. *Neural Networks: Tricks of the Trade*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 2012:599–619.
39. Hoover B., Chau D. H., Strobelt H. et al. A Universal Abstraction for Hierarchical Hopfield Networks. *The Symbiosis of Deep Learning and Differential Equations II*. NeurIPS; 2022.
40. Krotov D., Hopfield J. Dense Associative Memory is Robust to Adversarial Inputs. *Neural Computation*. 2018;30(12):3151–3167.
41. Hebb D. O. *The Organization of Behavior. A Neuropsychological Theory*. NY: Wiley; 1949.
42. Экклс Д. К. *Физиология нервных клеток*. М.: ИЛ; 1959.