

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБЛАКА ТОЧЕК (НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ) С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ БЕЗЬЕ (CURVED POINT-NORMAL TRIANGLES)

А. Л. Леготин^а, Г. К. Виноградов^б

Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация

^а ✉ andrlegotin@yandex.com ^б vinogradovgk@mail.ru

Аннотация: интерполяция из облака точек (данных, расположенных нерегулярным образом) важна для многих аспектов научной деятельности и практического применения. В статье рассматривается алгоритм интерполяции на нерегулярной сетке с помощью параметризованного кубического треугольника Безье. Уделяется внимание проблеме выбора нормалей вершин поверхности.

Ключевые слова: интерполяция, облако точек, нерегулярная сетка, треугольник Безье, нормаль вершин, криволинейный треугольник, PN треугольники.

Благодарности: авторы выражают благодарность К. А. Медникову за предоставленные данные эллипсометрических измерений распределения толщины оксида кремния.

Для цитирования: Леготин А. Л., Виноградов Г. К. Интерполяция облака точек (нерегулярной сетки) с помощью кубических треугольников Безье (curved point-normal triangles). *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):35–46.

Поступила в редакцию: 04.12.2024.

В окончательном варианте: 03.02.2025.

POINT CLOUD (IRREGULAR GRID) INTERPOLATION WITH THE CURVED POINT-NORMAL TRIANGLES

A. L. Legotin^a, G. K. Vinogradov^b

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation

^a ✉ andrlegotin@yandex.com, ^b vinogradovgk@mail.ru

Abstract: we examine interpolation from a point cloud, where data is arranged in an irregular grid, as it plays a crucial role in both scientific research and practical applications. We developed an algorithm for interpolating irregular data using a parameterized curved point-normal triangle. We also address the challenge of selecting vertex normals for the surface.

Keywords: interpolation, point cloud, irregular grid, Bezier triangle, vertex normal, curved point-normal triangles, PN triangles.

Acknowledgements: the authors would like to thank K. A. Mednikov for providing the ellipsometric measurements of the silicon oxide thickness distribution.

Cite this article: Legotin A. L., Vinogradov G. K. Point Cloud (Irregular Grid) Interpolation with the Curved Point-Normal Triangles. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):35–46.

Original article submitted: 04.12.2024.

Revision submitted: 03.02.2025.

Введение

Визуальное представление необходимо для общей оценки данных. Если имеются искажения, то это в свою очередь отразится на интерпретации результатов.

При измерении толщин тонких пленок на круглой подложке формируется набор точек. Программное обеспечение производителя измерительного оборудования на основе этих данных строит поверхность, 2D вид которой представлен на рис. 1.

Было замечено, что карта высот не совпадает во многих точках. Некоторые точки находятся не в своей цветовой зоне и в целом границы цветовых зон сдвинуты относительно ожидаемых.

Для проверки был произведен расчет по точкам, расположенным вдоль диаметров (в плоскостях 0 и 90 градусов в системе координат производителя).

Результат сравнения приведен на рис. 2, где «Текущий» — градиент взят из 2D карты производителя (стрелками показано место), «Расчетный» — градиент, полученный из точек.

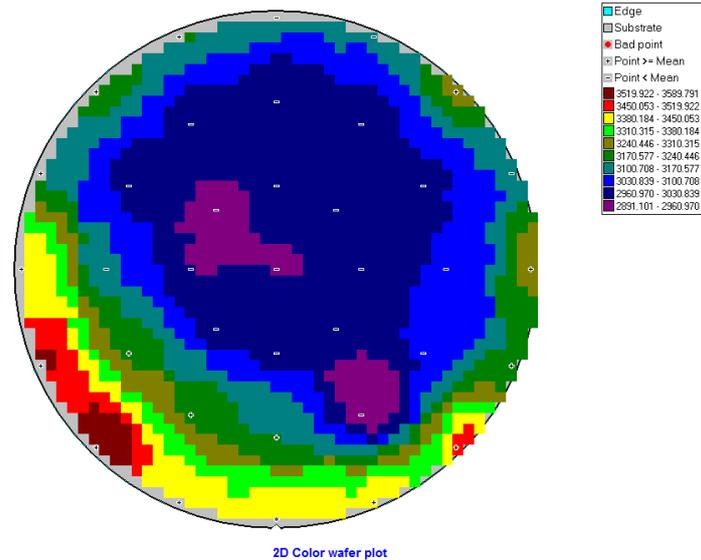


Рис. 1. Карта высот (ПО производителя)

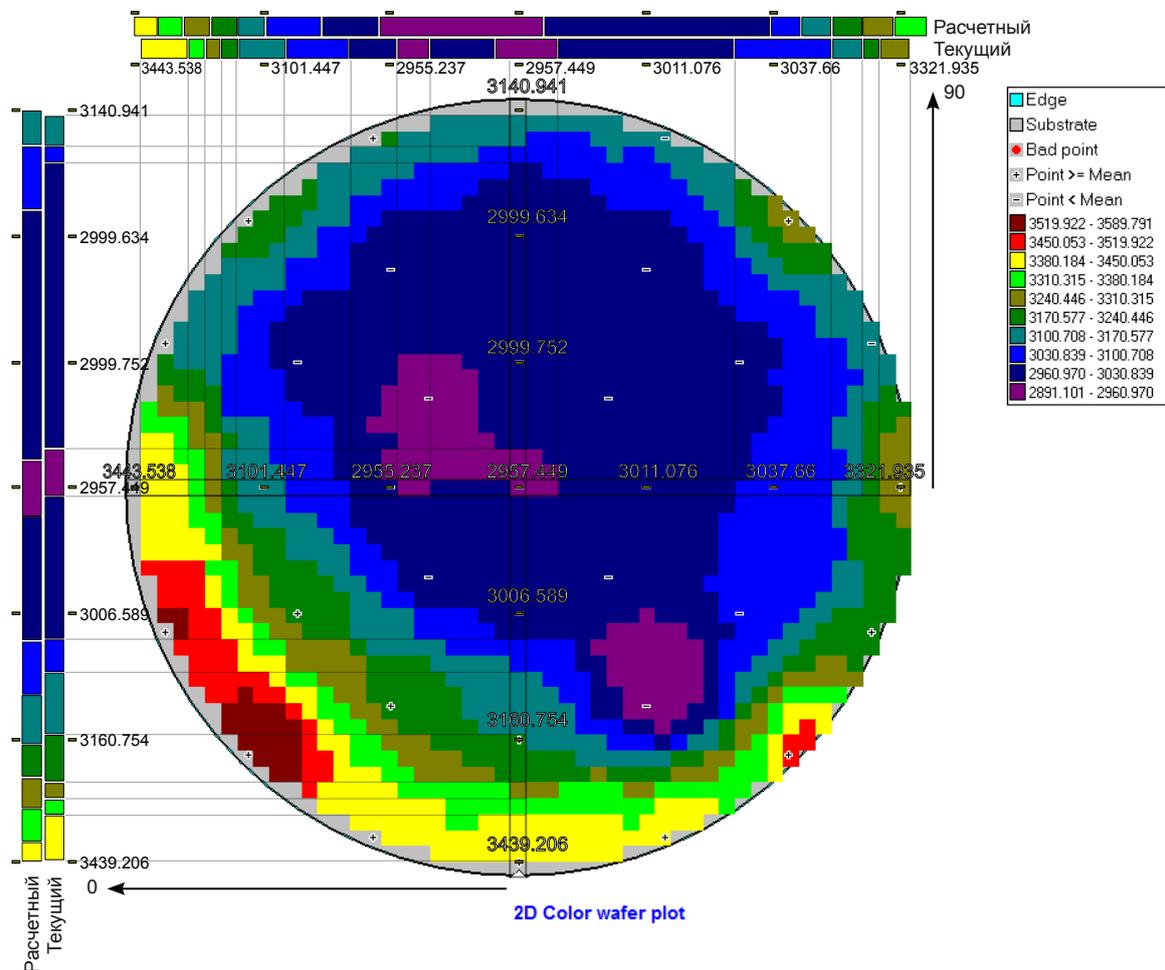


Рис. 2. Сравнение с расчетными градиентами на карте высот

Ожидаемые профили поверхности показаны на рис. 3 (по вертикали — высоты, по горизонтали — координаты в мм).

По всей длине градиентов видны расхождения между расчетным и текущим положением цветных зон. Особо стоит заметить артефакт между точками 2955.237 и 2957.449, где на карте высот наблюдается холм, в то время как по расчету должна быть впадина (на профиле 90 градусов в районе

координат -20 мм) в случае сплайн интерполяции или практически горизонтальная площадка в случае линейной интерполяции.

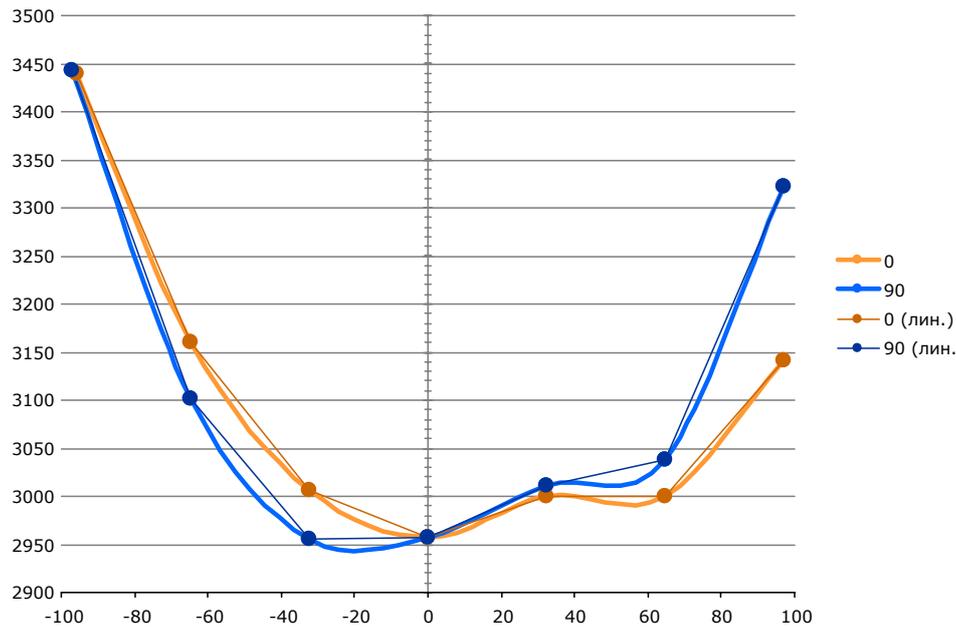


Рис. 3. Расчетные профили поверхности

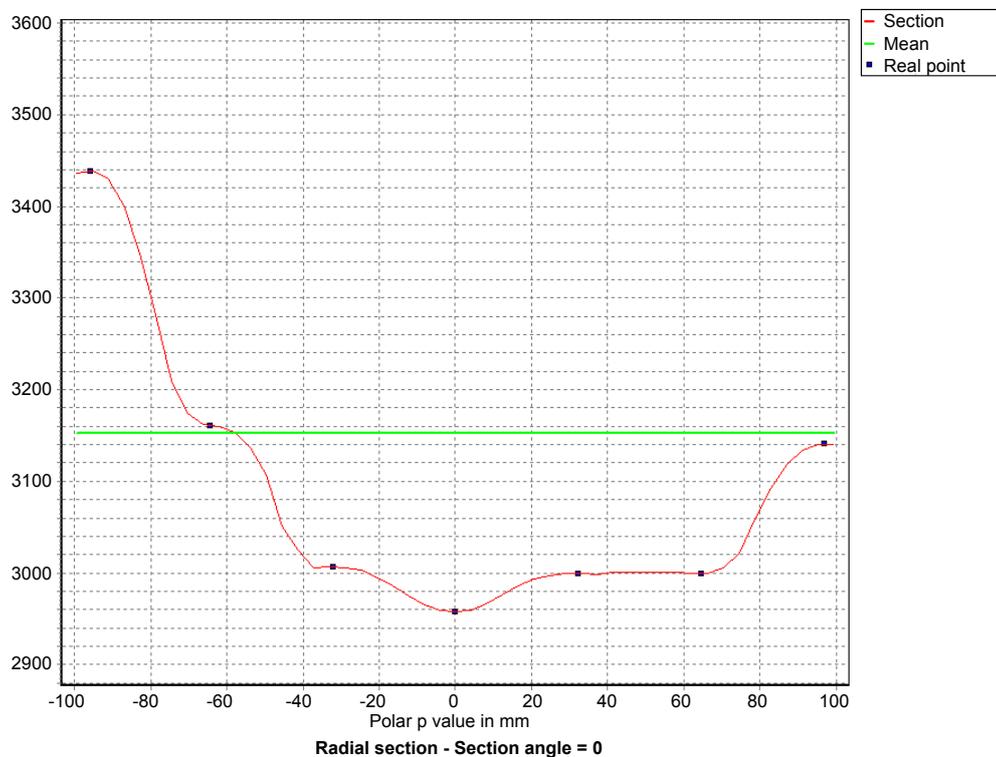


Рис. 4. Профиль поверхности в сечении 0 градусов (ПО производителя)

Алгоритм построения поверхности, применяемый производителем, неизвестен, но многое можно понять из дополнительных данных. Таковым может стать профиль поверхности в сечении 0 градусов, который показан на рис. 4 (профиль сгенерирован ПО производителя измерительного оборудования).

В каждой точке наблюдается «ступенька», вход и выход кривой у каждой точки всегда строго горизонтален несмотря на ярко выраженные области наклона.

То есть поверхность формируется из плоских площадок вблизи точек и сглаженных переходов от точки к точке, как следствие, наклон между точками ближе к средней зоне оказывается более крутым. Из-за подобного расчета поверхности происходят сдвиги градиентов. Наблюдаемые ореолы вокруг точек (круговые выступы особенно заметны в верхней половине на границе синей и темно-синей областей, см. рис. 2) появляются в силу этих же причин. Кроме этого, в районе координат -40 (рис. 4) есть излом с небольшим уклоном вниз. Все это говорит о том, что применяемые алгоритмы работают не должным образом.

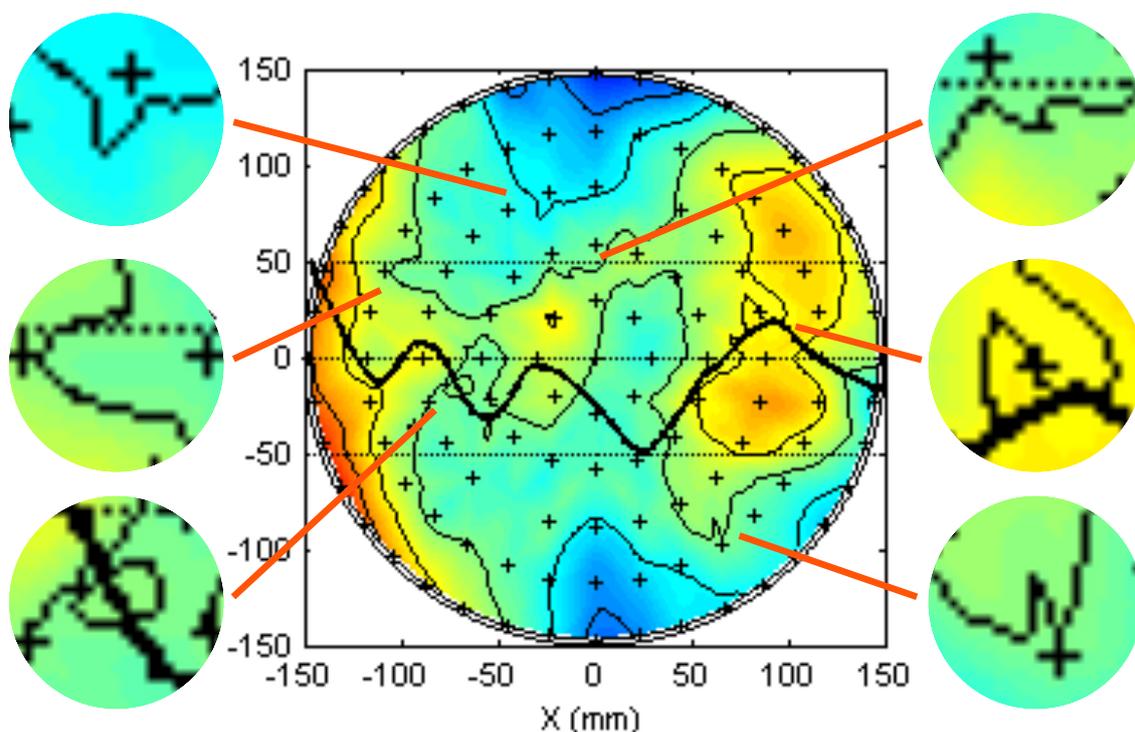


Рис. 5. Карта высот (сторонняя программа) и проблемы в реализации алгоритмов

Имеется также сторонняя программа по визуализации подобных распределений. К сожалению, и там присутствуют проблемы в реализации алгоритмов. На рис. 5 показаны увеличенные области с артефактами. Градиент в этих местах слабый, ожидается довольно ровная поверхность, на изолиниях между тем присутствуют острые углы и узкие выступы, которых быть не должно при интерполяции редких точек (в том числе и в случае больших перепадов высот).

Такие результаты визуализации искажают полученные данные, поэтому возникла необходимость улучшить графическое представление.

Набор данных имеет вид вложенных концентрических колец с центральной точкой. Например, рассмотренные выше данные имеют от центральной точки кольцо из 8 точек, затем из 12 и 16 (см. рис. 6). Количество точек может быть разным в зависимости от требуемой плотности измерений.

Из-за того, что точки расположены подобным образом, нельзя воспользоваться методами построения поверхности на основе прямоугольной сетки. Так как кольца имеют разное кол-во точек, затруднительно и применение методов с полярными координатами.

В этой статье представлен способ построения сглаженной поверхности (интерполяции) для более общего случая — для нерегулярно распределенных данных (облака точек), что будет применимо и здесь.

Описанный ниже алгоритм относится к методам локальной интерполяции. Локальные методы интерполяции опираются на ближайшие точки, при этом в зависимости от метода выбор и количество точек разнится. В данном алгоритме используется сетка на основе треугольников, интерполянт служит параметризованный кубический треугольник Безье.

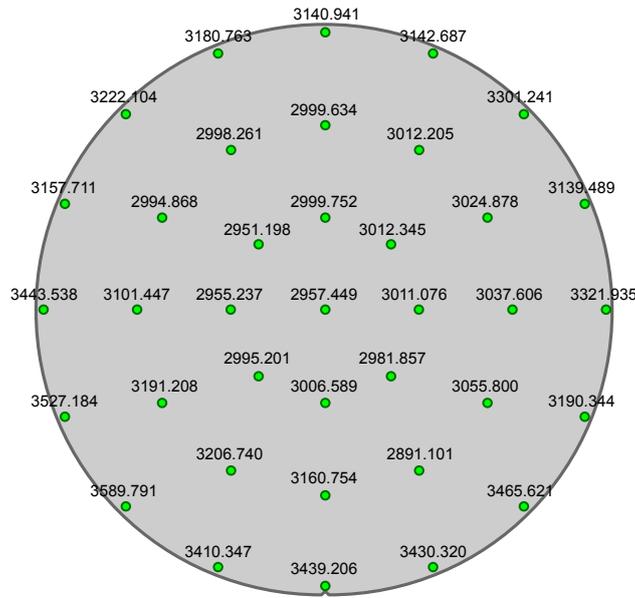


Рис. 6. Карта точек

Поверхность Безье

Уравнение поверхности Безье порядка (n, m) в общем виде описывается следующим образом [1, 2]:

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j} \tag{1}$$

где u, v – параметрические координаты, P – контрольные точки, B – многочлены Бернштейна.

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \tag{2}$$

Поверхность Безье порядка (n, m) потребует задания $(n + 1) \cdot (m + 1)$ контрольных точек. Частный вид этой поверхности – треугольник Безье [2, 3] порядка n :

$$b(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k a^i b^j c^k \tag{3}$$

где u, v, w – параметрические (барицентрические) координаты ($u, v, w \geq 0$; $u + v + w = 1$); $a^i b^j c^k$ – контрольные точки.

Для треугольника Безье n -го порядка необходимо задание $(n + 1) \cdot (n + 2)/2$ контрольных точек.

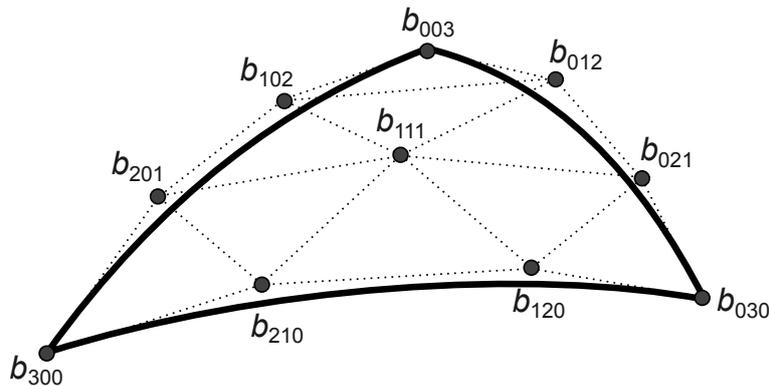


Рис. 7. Контрольные точки кубического треугольника Безье

Кубический треугольник Безье

Для кубического треугольника $n = 3$. Уравнение поверхности в этом случае можно представить, как:

$$b(u, v) = \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} \frac{3!}{i!j!k!} u^i v^j \omega^k \quad (4)$$

где b_{ijk} — коэффициенты.

Для построения такого треугольника нужно задать 10 контрольных точек. Из них 3 относятся к вершинам, 6 — к касательным и 1 — к центральной точке (см. рис. 7).

Поверхность из треугольников Безье

С целью обеспечения неразрывности и гладкости поверхности, составленной из треугольников Безье, коэффициенты касательных смежных сторон двух соседних треугольников должны быть равны и все касательные всех треугольников, проведенных от общей вершины, должны лежать в одной плоскости [4].

То есть необходимо:

- 1) найти для каждой вершины общие треугольники;
- 2) вычислить касательные и свести их для каждой вершины в одну плоскость.

Если п. 1 алгоритмически легко реализуем, то в п. 2 встает проблема вычисления касательных и выбора их общей плоскости, так как поверхность мы еще строим и как раз хотим получить направление изгиба поверхности в соответствующих точках.

Эта проблема решается следующим образом. Приняв замечание, что нормаль общей плоскости касательных должна совпадать с нормалью искомой поверхности в этой точке, можно прийти к выводу, что п. 2 сводится к нахождению нормалей вершин искомой поверхности и соответственно коэффициенты касательных и центральной точки в конечном итоге должны зависеть от нормалей вершин.

Для наших целей удобна параметризация, приведенная в статье [5]. Данный тип параметризации был разработан для графического применения, стал широко использоваться в этой среде, для обработки информации практически не применялся, между тем подходит для интерполяции и тем важнее опробовать его в этом качестве.

Для построения криволинейного треугольника в этой параметризации достаточно задать расположение точек треугольника в пространстве и векторов нормалей в этих точках.

Уравнение поверхности:

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \sum_{i+j+k=3} b_{ijk} \frac{3!}{i!j!k!} u^i v^j \omega^k = \\ &= b_{300}\omega^3 + b_{030}u^3 + b_{003}v^3 + b_{210}3\omega^2u + b_{120}3\omega u^2 + b_{201}3\omega^2v + b_{021}3u^2v + b_{102}3\omega v^2 + \\ &\quad + b_{012}3uv^2 + b_{111}6\omega uv \quad (5) \end{aligned}$$

где u, v, ω — барицентрические координаты ($u, v, \omega \geq 0$; $u + v + \omega = 1$).

Коэффициенты треугольника Безье:

$$\begin{aligned} b_{300} &= P_1 \\ b_{030} &= P_2 \\ b_{003} &= P_3 \\ \omega_{ij} &= (P_j - P_i) \cdot N_i \\ b_{210} &= (2P_1 + P_2 - \omega_{12}N_1)/3 \\ b_{120} &= (2P_2 + P_1 - \omega_{21}N_2)/3 \\ b_{021} &= (2P_2 + P_3 - \omega_{23}N_2)/3 \\ b_{012} &= (2P_3 + P_2 - \omega_{32}N_3)/3 \\ b_{102} &= (2P_3 + P_1 - \omega_{31}N_3)/3 \\ b_{201} &= (2P_1 + P_3 - \omega_{13}N_1)/3 \\ E &= (b_{210} + b_{120} + b_{021} + b_{012} + b_{102} + b_{201})/6 \\ V &= (P_1 + P_2 + P_3)/3 \\ b_{111} &= E + (E - V)/2 \end{aligned}$$

где P_1, P_2, P_3 — координаты точек треугольника; N_1, N_2, N_3 — нормализованные векторы нормали (т.е. $\|N_i\| = 1$); $b_{300}, b_{030}, b_{003}$ — коэффициенты вершин; $b_{210}, b_{120}, b_{021}, b_{012}, b_{102}, b_{201}$ — коэффициенты касательных; b_{111} — коэффициент центральной точки.

Алгоритм построения поверхности (интерполяция облака точек)

Входными данными для построения поверхности из треугольников Безье данным способом служат вершины и нормали вершин. Нормали вершин можно вычислять в ходе построения, так и задавать, если, например, известно, как должна пройти поверхность через конкретные вершины, для граничных условий и т.д.

Основные шаги:

- 1) создание линейно-интерполированной поверхности из облака точек (триангуляция Делоне);
- 2) вычисление нормалей для каждой вершины поверхности;
- 3) замена каждого плоского треугольника криволинейным треугольником Безье.

Построение линейной интерполяции из облака точек, а также определение нормалей вершин зависит от характера данных. Остановимся на некоторых аспектах подробнее.

1. Триангуляция Делоне может быть проведена различными методами. Достаточно большое количество алгоритмов и видов триангуляций описано в [6]. В зависимости от структуры данных может стать более предпочтителен тот или иной алгоритм.

Далее в качестве примера мы будем рассматривать нерегулярную сетку, которая не имеет элементов поверхности с отрицательным наклоном (Z координата нормали каждой точки поверхности положительна). В этом случае можно применить триангуляцию Делоне для двумерного случая (временно игнорируется координата Z) и получить трехмерную поверхность, состоящую из плоских треугольников (для иллюстрации см. рис. 9, слева — режим каркаса, справа — визуализация).

2. Нормаль вершины можно вычислить как среднее взвешенное одной из характеристик близлежащих элементов. Например, сумма нормалей соседних плоских треугольников с весами в виде углов [7], длин ребер, их комбинаций, например, площадь и т.п. Нормаль вершины можно так же найти по методу наименьших квадратов из ближайших соседних вершин, построить в локальной области полином и т.д.

В зависимости от задач тот или иной алгоритм может стать более или менее предпочтительным.

Сравнение некоторых алгоритмов вычисления нормалей вершин проведено в [8]. К сожалению, не все результаты сравнительного анализа алгоритмов авторами включены в суммарную таблицу, есть вопросы и по критериям выводов, как проявили себя те или иные алгоритмы. Например, если на Sphere TP и Torus TP алгоритм MWA явно показывает себя с не лучшей стороны, то на других графиках разница не значительна (особенно Perlin MT и turbulence MT, где кривые практически совпадают), но в таблице некоторые алгоритмы все равно получили оценки «хорошо» и «плохо».

Стоит отметить некоторые особенности подобных алгоритмов.

Если за весовой коэффициент взят угол, то треугольник, имеющий больший угол раствора ребер у данной вершины, будет иметь соответственно и больший вес вне зависимости от его размеров. То есть, если к вершине примыкает подобный треугольник с короткими ребрами (компактный), нормаль его будет иметь более сильное влияние по сравнению с нормалью других возможно более крупных треугольников с меньшими углами раствора у данной вершины. Не всегда это может быть приемлемо.

В общем виде весовой коэффициент должен зависеть и от угла, и от длин ребер в некой их комбинации. Коэффициент, зависящий от площади, этому условию удовлетворяет, но существует геометрия, когда и такой весовой коэффициент будет не лучшим выбором.

Рассмотрим на примере куба, грани которого разбиты на плоские треугольники как на рис. 8. К центральной вершине (по рисунку) от левой грани прилегает два треугольника, поэтому нормаль левой стороны будет иметь вдвое больший вес, чем нормаль правой (или верхней). Алгоритм с весовым коэффициентом, зависящим только от угла, в этом случае будет точным.

Куб для иллюстрации, где это проявляется максимально. Такая ситуация вполне возможна на практике. Триангуляция квадрата (прямоугольника) неопределенна — есть два равнозначных варианта, грани могут быть разбиты на треугольники различным образом. В общем случае, если некоторые точки данных составляют четырехугольник и чем ближе их расположение к прямоугольнику, тем сильнее особенности подобных алгоритмов.

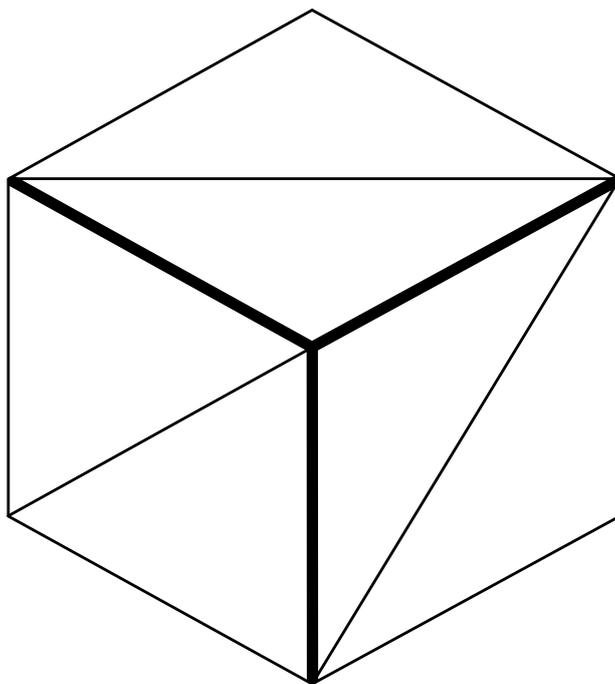


Рис. 8. Пример разбиения граней на треугольники

В других алгоритмах, основанных на весовых коэффициентах, те или иные эффекты так же могут проявляться в зависимости от метода (комбинации характеристик) и геометрии (исходных данных).

На случайном наборе лучшие результаты, если судить по графикам в [8], показывает алгоритм MWAAT, где весовой коэффициент — площадь. В качестве примера рассмотрим его.

Направление нормали треугольника ABC можно вычислить векторным произведением двух его ребер (например, $N = AB \times AC$).

Замечание: векторное произведение некоммутативно, необходимо следить за порядком выбора ребер, чтобы не получить в каких-то случаях инвертированную нормаль.

Принимая во внимание, что модуль векторного произведения ребер треугольника пропорционален площади, можно увидеть, что (ненормализованный, вычисленный через векторное произведение) вектор нормали уже включает в себя нужный весовой коэффициент. В силу этого, суммируя такие вектора нормалей всех прилежащих к вершине треугольников, получим средневзвешенную нормаль вершины (которую затем необходимо нормализовать).

Кратко данный способ вычисления нормали вершин выглядит так:

- 1) посчитать нормали всех треугольников;
- 2) для каждой вершины вычислить средневзвешенную нормаль от всех прилежащих к вершине треугольников.

3. На этом шаге каждый плоский треугольник заменяется на криволинейный треугольник Безье и с учетом уже известных нормалей, используя (5), производится вычисление значений в нужных точках.

Результат интерполяции по вышеприведенному алгоритму см. на рис. 10.

В данном алгоритме удобно производить оптимизацию вычислений. На основе нормалей и вершин считаются коэффициенты и далее для нужной точки внутри треугольника все необходимые точки можно вычислить быстрее. Часть коэффициентов будут общими для смежных треугольников, в оптимизации можно учесть и это.

Визуальное представление

Требуемого уровня детализации можно достичь разбиением поверхности Безье и вычислением каждой точки разбиения.

Разбиение криволинейного треугольника на простейшие плоские элементы (тесселяция) можно

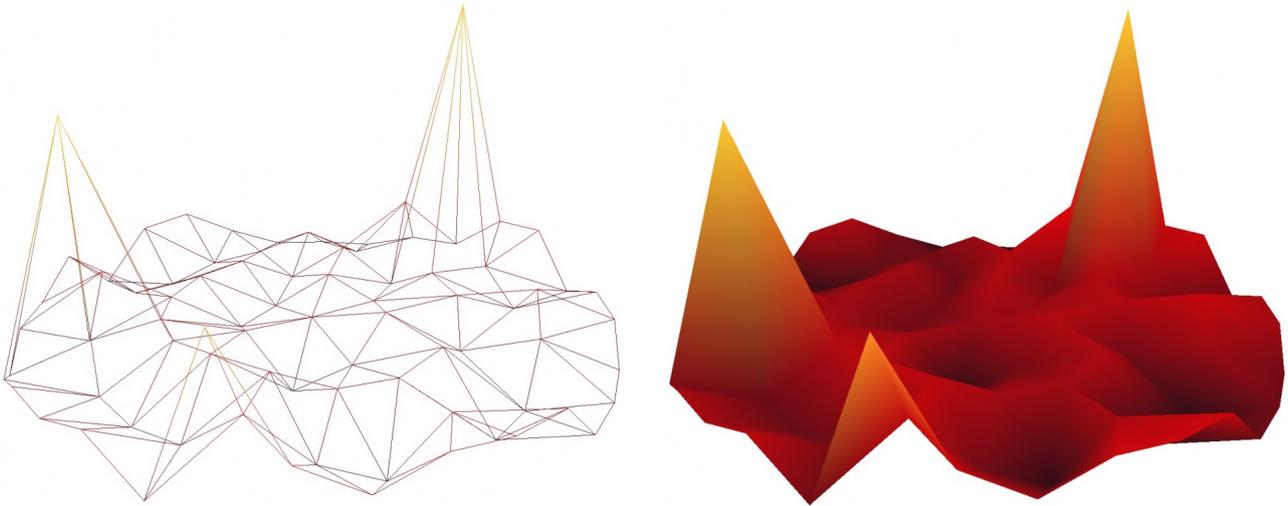


Рис. 9. *Линейная интерполяция поверхности*

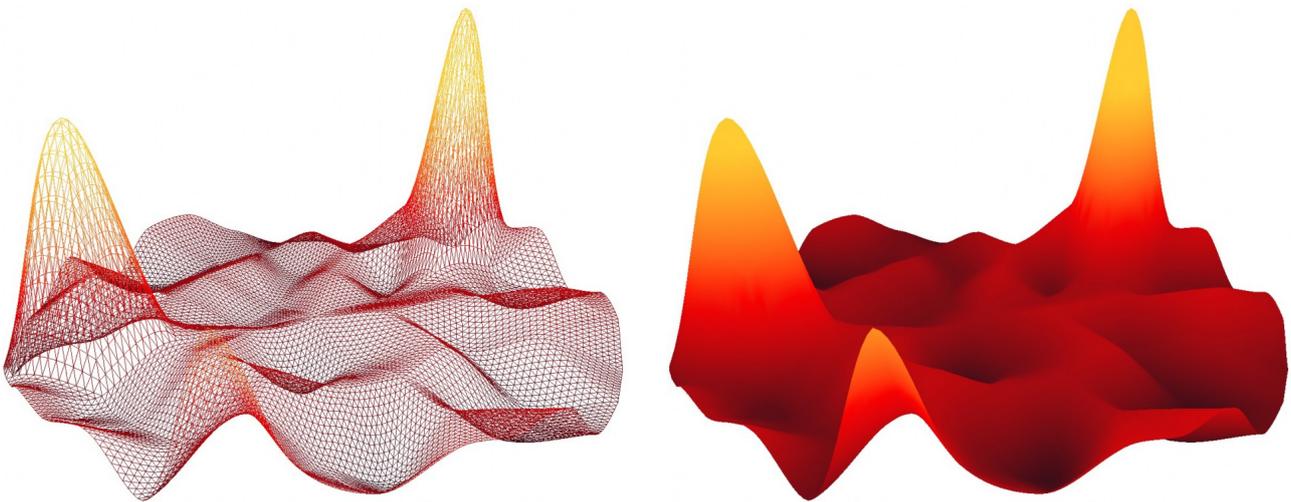


Рис. 10. *Интерполяция треугольниками Безье*

производить разными методами. Чаще применяют сетку из треугольников, возможно разбиение на четырехугольники и т.д.

В соответствии с выбранным методом формируется набор точек на поверхности криволинейного треугольника и вычисляются координаты каждого из новых элементов поверхности.

Так как уравнение использует параметрические координаты, поверхность Безье легко разделяется на нужную сетку (например, заданием шага $u/k, v/k$, где $k = 2, 3, 4$ и т. д.). Сделав так для каждого треугольника Безье, в результате получится состоящая из плоских фигур поверхность с необходимым уровнем детализации.

Результаты

На рис. 11 показаны сечения интерполяционной поверхности в тех же плоскостях, что и ранее (0 и 90 градусов).

Идеального совпадения профилей сечения с расчетными кривыми не ожидалось, так как на профиль поверхности оказывают влияние другие ближайшие точки в пространстве, а расчетные кривые строились только по находящимся в плоскости сечения точкам. Вдобавок к этому механизмы сглаживания разные, тем не менее профили сечения довольно точно совпали с расчетными кривыми.

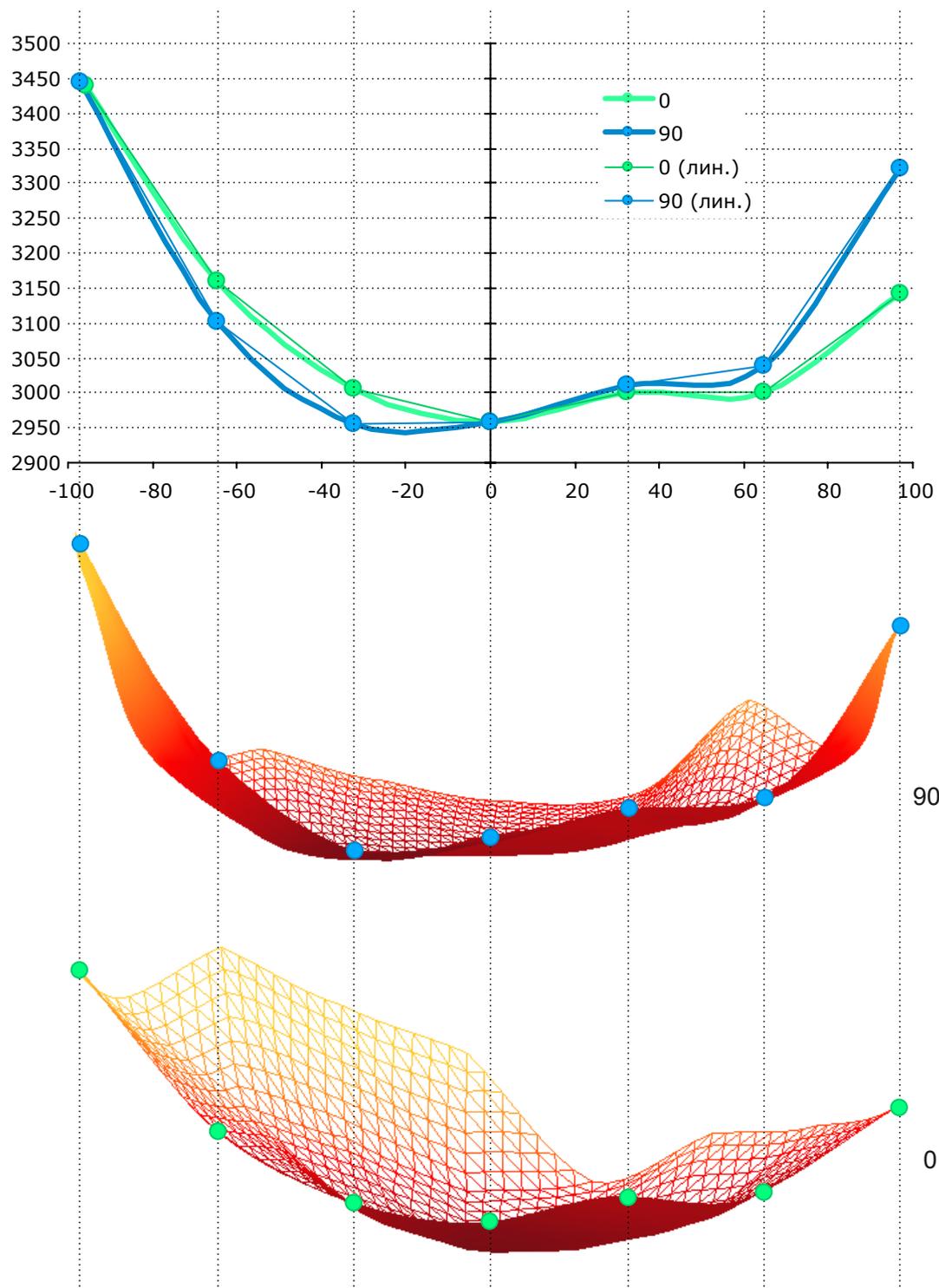


Рис. 11. Профили и сечения поверхности в плоскостях 0 и 90 градусов

Алгоритм был протестирован и на других наборах данных.

При более плотных измерениях можно получить довольно детальную поверхность (см. рис. 12).

На сильно зашумленных данных, где в том числе присутствуют одиночные выбросы, алгоритм интерполяции на основе криволинейных треугольников Безье тоже показал себя хорошо (рис. 9, 10, 13).

В некоторых случаях (в дополнение к рассмотренным ранее на шаге 2 алгоритма) может стать особо важен выбор методики расчета нормалей. Например, если имеются высокие выбросы и если нормаль вычисляется по средневзвешенной площади соседних элементов, то весовой коэффициент одной



Рис. 12. «Лунный рельеф» (данные измерений)

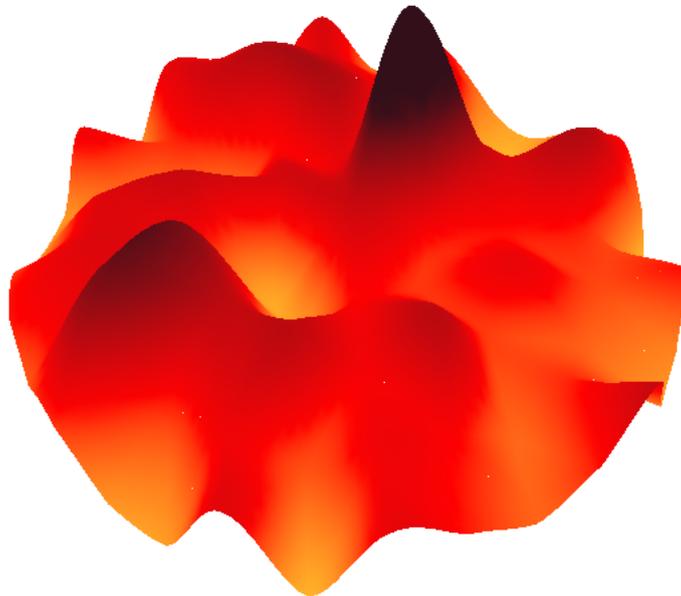


Рис. 13. Интерполяция зашумленных данных

из граней может чрезмерно возрасти и возникнет перекося нормали в эту сторону. Неустойчивое поведение алгоритма нормалей с коэффициентом по площади может произойти, когда перепад высот между точками становится больше расстояния между ними (в горизонтальной плоскости). Для таких наборов данных нужно сменить алгоритм вычисления нормалей или как вариант задать статичную вертикальную нормаль. Возможен и следующий прием: перед вычислением нормалей можно отмасштабировать данные по оси Z (уменьшить высоты), рассчитать нормали, затем произвести обратное масштабирование, включая и сами нормали. Таким образом временно нивелируется негативное отношение высоты и размера сетки.

Заключение

Описанный выше алгоритм обеспечивает автоматическую сшивку ребер криволинейных треугольников (касательные смежных треугольников согласованы), не требует итеративных операций по увеличению детализации (она задается сразу), возможность задания нормали для каждой точки исходных данных обеспечивает контроль формирования рельефа, применение разных методов определения нормали для тех или иных случаев увеличивает гибкость алгоритма.

Нормали использовать и проще, и нагляднее (что повышает предсказуемость результата), чем напрямую контрольные точки, которые необходимо связывать между собой как внутри треугольника, так и между соседними треугольниками.

При этом стоит заметить, что можно и не вычислять нормали, а задать вертикальную нормаль для каждой вершины, например, для первичного просмотра данных, при оценке поверхности для выбора алгоритма вычисления нормалей, или использовать такой вид как вариант сглаженной пространственной гистограммы. В том числе этот вариант может подойти для сильно зашумленных данных или с определенной структурой, чтобы не вносить дополнительные искажения, когда проявляются особенности того или иного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Д., Адамс Дж. *Математические основы машинной графики*: Пер. с англ. М.: Мир; 2001. 604 с., ил. ISBN: 5-03-002143-4.
2. Farin G. *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide (5th Edition)*. Morgan-Kaufmann; 2002. ISBN: 1-55860-737-4.
3. Farin G. Triangular Bernstein-Bézier Patches. *Computer Aided Geometric Design*. 1986;3(2):83–127. DOI: 10.1016/0167-8396(86)90016-6.
4. Liu Y. *Triangular Bezier Surfaces with Approximate Continuity*. University of Waterloo Computer Science Dept. University Avenue Waterloo; Canada. ISBN: 978-0-494-43305-8.
5. Vlachos A., Peters J., Boyd C., Mitchell J. L. Curved PN Triangles. *Proceedings of the 2001 Symposium on Interactive 3D Graphics (I3D '01)*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA; 2001:159–166. DOI: 10.1145/364338.364387.
6. Скворцов А. В., Мирза Н. С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*. Томск: Изд-во Том. ун-та; 2006. ISBN: 5-7511-2028-5.
7. Leth N. W., Petersen H. G. A New Method for Generating Work Piece Surface Representations for Robotic Machining. *2021 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Prague, Czech Republic; 2021:7607–7614. DOI: 10.1109/IROS51168.2021.9636774.
8. Jin S., Lewis R., West D. A Comparison of Algorithms for Vertex Normal Computation. *Vis Comput.* 2005;21(1-2):71–82. DOI: 10.1007/s00371-004-0271-1.