ЭФФЕКТ УСИЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ ГЕОДИНАМО

И. В. Бычин[1,2,а], **А. В. Гореликов**[1,2,б]
[1] *Сургутский филиал федерального государственного автономного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*
[2] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*
[а] ✍ *bychin_iv@surgu.ru*, [б]*gorelikov_av@surgu.ru*

Аннотация: в гидромагнитном динамо магнитное поле генерируется механизмом самовозбуждения, который заключается в том, что определенные конфигурации течений проводящей жидкости могут усиливать слабое начальное магнитное поле, а затем поддерживать его в стационарном или квазистационарном состоянии, препятствуя затуханию. Представляется важным продемострировать эффект усиления магнитного поля методами вычислительной магнитной гидродинамики. В данной работе рассматривается модель геодинамо с вакуумными граничными условиями для магнитного поля на внешней границе сферического слоя. Определяющими задачу безразмерными параметрами являются: Pr — число Прандтля, Pm — магнитное число Прандтля, E — число Экмана и Ra^* — модифицированное число Релея. Начальный уровень магнитного поля определяется параметром Λ, числом Эльзассера. Вычислительные эксперименты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода, адаптированного для работы на гибридных вычислительных системах с графическими процессорами. В коде реализован конечно-объемный метод решения задач резистивной магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. В качестве начального магнитного поля рассматривалось слабое ($\Lambda = 10^{-2}$) однородное магнитное поле, направленное вдоль оси вращения сферического слоя. При проведении вычислительных экспериментов для значений, определяющих задачу параметров $Pr = 1$, $Pm = 5$, $E = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ra^* = 200$, получено квазистационарное решение, в котором начальный уровень энергии магнитного поля в процессе генерации возрастает на три порядка. В полученном решении поля температуры и скорости симметричны относительно экваториальной плоскости, а во внешнем магнитном поле преобладает дипольная составляющая.

Ключевые слова: вычислительная магнитная гидродинамика, геодинамо, слабое однородное начальное магнитное поле.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Для цитирования: Бычин И. В., Гореликов А. В. Эффект усиления начального магнитного поля в модели геодинамо. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):76–83.

Поступила в редакцию: 01.12.2024. *В окончательном варианте: 16.12.2024.*

INITIAL MAGNETIC FIELD AMPLIFICATION IN THE GEODYNAMO MODEL

I. V. Bychin[1,2,a], **A. V. Gorelikov**[1,2,b]
[1] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation*
[2] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*
[a] ✍ *bychin_iv@surgu.ru*, [b]*gorelikov_av@surgu.ru*

Abstract: in a hydromagnetic dynamo, the self-excitation mechanism generates the magnetic field by amplifying a weak initial field through specific configurations of conductive fluid flows. These flows sustain the field in a stationary or quasi-stationary state, preventing its attenuation. Demonstrating this amplification effect requires computational magnetohydrodynamics methods. In this paper, we analyze a geodynamo model with vacuum boundary conditions for the magnetic field at the outer boundary of a spherical layer. The dimensionless parameters that determine the problem are: Pr is the Prandtl number, Pm is the magnetic Prandtl number, E is the Ekman number, and Ra^* is the modified Rayleigh number. The initial level of the magnetic field depends on the parameter Λ, the Elsasser number. We conducted computational experiments using our MHD code, which we adapted for hybrid computing systems with graphics processors. Our code employs a finite-volume method to solve resistive magnetohydrodynamics problems for a viscous incompressible fluid. A weak ($\Lambda = 10^{-2}$) homogeneous magnetic field directed along the axis of rotation of the spherical layer was considered as the initial magnetic field. When conducting computational experiments, for the values of the parameters defining the problem $Pr = 1$, $Pm = 5$, $E = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ra^* = 200$, we obtained a quasi-stationary solution in which the initial level of the magnetic field energy increases by three orders of magnitude during the generation process. In the obtained solution, the temperature and velocity fields are symmetrical relative to the equatorial plane, and the dipole component predominates in the external magnetic field.

Keywords: computational magnetohydrodynamics, geodynamo, weak uniform initial magnetic field.

Acknowledgements: this study is a part of the government contract No. FNEF-2024-0001 Development and Implementation of Trusted AI Systems Using New Mathematical and Algorithmic Methods; Fast Computing Models on Domestic Hardware with the Kurchatov Institute (1023032100070-3-1.2.1).

Cite this article: Bychin I. V., Gorelikov A. V. Initial Magnetic Field Amplification in the Geodynamo Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):76–83.

Original article submitted: 01.12.2024. *Revision submitted: 16.12.2024.*

Введение

В теории геодинамо предполагается, что при достаточно развитой конвекции начальное (затравочное) магнитное поле может быть произвольным и сколь угодно слабым, и оно должно существенно усиливаться в процессе генерации механизмом магнитного гидродинамо. Однако, стоит заметить, что во многих работах по численному исследованию геодинамо начальное магнитное поле имеет специальный вид, который предполагает наличие тороидальной составляющей [1–4], или вопрос о начальном магнитном поле вообще не рассматривается. Вопросы влияния фонового магнитного поля на движение проводящей жидкости в задаче геодинамо исследовались [5, 6], но количество таких работ невелико.

В связи с этим, представляется важным продемонстрировать, что эффект усиления слабого начального магнитного поля воспроизводится методами вычислительной магнитной гидродинамики с использованием разработанных программных комплексов для моделирования геодинамо.

Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается естественная конвекция в центральном поле тяжести электропроводной вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей сферический слой. Величина силы тяжести линейно зависит от радиуса. Полагается, что твердые границы сферического слоя равномерно вращаются вокруг оси O_z и являются изотермическими. Естественная конвекция возникает за счет положительной разности температур на внутренней и внешней границах слоя. Предполагается, что внутри жидкого сферического слоя находится твердое изотермическое электропроводящее шаровое ядро, скорость вращения которого совпадает со скоростью границ слоя. Электрические проводимости жидкости, заполняющей сферический слой и внутреннего твердого ядра считаются одинаковыми.

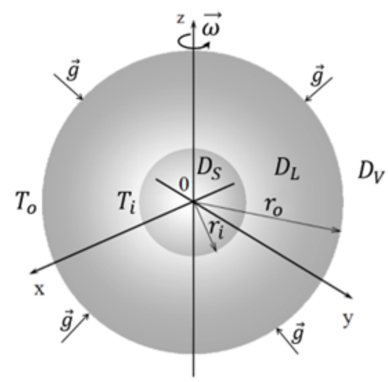


Рис. 1. *Иллюстрация к постановке задачи*

В безразмерной форме система уравнений, описывающая термогравитационную магнитогидродинамическую конвекцию в равномерно вращающейся системе отсчета, имеет вид [1]:

$$r_i < r < r_o :$$

$$E\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{u} - \nabla^2\boldsymbol{u}\right) + 2\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u} + \nabla P = Ra^* \frac{\boldsymbol{r}}{r_o}\Theta + \frac{1}{Pm}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + (\mathrm{u}\nabla\Theta) = \frac{1}{Pr}\nabla^2\Theta, \tag{3}$$

$$r < r_o :$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial\tau} - \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{Pm}\nabla^2\boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0. \tag{5}$$

Безразмерные переменные в системе (1)–(5): τ — время, r — расстояние от центра сферического слоя, $\boldsymbol{u}$ — скорость жидкости (в уравнении индукции (4) для $r < r_i$, т.е. во внутреннем твердом ядре $\boldsymbol{u}\equiv 0$), P — отклонение от гидростатического давления вызванное конвекцией, Θ — температура, $\boldsymbol{B}$ — вектор индукции магнитного поля соответственно. Значения безразмерных внешнего r_o и внутреннего r_i радиусов принимались равными: $r_o = 20/13$ и $r_i = 7/13$, что примерно соответствует соотношению между радиусами жидкого и твердого ядра Земли. Безразмерные параметры задачи: $E = \frac{\nu}{\Omega H^2}$ — число Экмана, $Pr = \frac{\nu}{k}$ — число Прандтля, $Pm = \frac{\nu}{\eta}$ — магнитное число Прандтля, $Ra^* = \frac{\alpha g_0 \Delta T H}{\nu\Omega}$ — модифицированное число Рэлея, где ν — кинематическая вязкость, η — коэффициент магнитной диффузии, H – толщина сферического слоя, k — коэффициент температуропроводности, g_0 — ускорение свободного падения на внешнем радиусе, α — коэффициент теплового расширения, Ω — угловая скорость вращения границ сферического слоя, ΔT — разность температур на внутренней и внешней границах слоя. Уравнение движения (1) записано в приближении Буссинеска [7] в равномерно вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \Omega\boldsymbol{e}_z$ системе отсчета, в нем учитываются: сила Кориолиса $(-2\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u})$, сила Лоренца $(\frac{1}{Pm}\mathrm{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B})$ и сила Архимеда $(Ra^*\frac{\boldsymbol{r}}{r_o}\Theta)$, влияние центробежной силы считается пренебрежимо малым.

Граничные (6), (7) и начальные (8) условия для температуры и скорости:

$$r = r_i : \Theta = 1,\, \boldsymbol{u} = 0, \tag{6}$$

$$r = r_o : \Theta = 0,\, \boldsymbol{u} = 0, \tag{7}$$

$$r_i < r < r_o,\, \tau = 0 :$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \Theta = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{21}{\sqrt{17920\pi}}\left(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6\right)\sin^4\theta\cos(m\varphi)\ , \tag{8}$$

где $x = 2r - r_i - r_o$, m — волновое число, параметр, определяющий азимутальную симметрию начального поля температуры [1].

При постановке задачи предполагается, что за внешней границей сферического слоя $(r > r_o)$ находится неограниченная диэлектрическая среда, в которой магнитное поле потенциально $\boldsymbol{B} = \nabla\psi$. На внешней границе сферического слоя магнитное поле полагается непрерывным и его тангенциальные составляющие определяются через соответствующие компоненты $\nabla\psi$ в сферических координатах:

$$r = r_o : B_\theta = \frac{1}{r_o}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad B_\varphi = \frac{1}{r_o \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}. \tag{9}$$

Скалярный потенциал ψ магнитного поля является регулярным на бесконечности решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$r > r_o : \Delta\psi = 0, \tag{10}$$

$$r = r_o : \frac{\partial\psi}{\partial r} = B_r. \tag{11}$$

Радиальная компонента магнитного поля B_r на внешней границе сферического слоя в (11) находится из решения уравнения индукции (4). Граничные условия (9), в которых потенциал находится, как решение задачи (10)-(11), называются вакуумными граничными условиями.

В данной работе предполагалось, что до определенного момента времени магнитное поле отсутствует, а затем уже после того, как в сферическом слое устанавливается режим развитой конвекции, в проводящей среде в момент времени $\tau^* > 0$ возникает флуктуация магнитного поля, которая при определенных условиях может быть усилена механизмом магнитного гидродинамо. В качестве начального возмущения магнитного поля рассматривалось однородное поле, направленное вдоль оси вращения слоя:

$$r \leq r_o, \tau = \tau^* : \boldsymbol{B} = -\sqrt{\Lambda}\boldsymbol{e_z}, \tag{12}$$

где $\Lambda = \sigma\mathcal{B}^2/\rho\Omega$ — число Эльзассера, которое представляет отношение силы Лоренца к силе Кориолиса, действующим на поток проводящей жидкости (σ — проводимость, $\mathcal{B}$ — характерное значение индукции магнитного поля, ρ — плотность жидкости).

В ходе численного решения вычислялись средние плотности кинетической и магнитной энергии:

$$E_{kin} = \frac{1}{2V_L}\int_{D_L} \boldsymbol{u}^2 dV, \qquad E_{mag} = \frac{1}{2V_L E Pm}\int_{D_L} \boldsymbol{B}^2 dV, \tag{13}$$

где V_L — объем жидкого сферического слоя.

Численное решение

Система уравнений МГД-конвекции (1)–(5) с условиями (6)–(12) решалась численно в сферических координатах на смещенных структурированных сетках конечно-объемным методом решения задач резистивной магнитной гидродинамики [8], в котором для получения соленоидального магнитного поля используется алгоритм переноса ограничения (CTA — constrained transport algorithm) [9]. Использованный метод позволяет решать начально-краевые задачи для уравнения индукции магнитного поля (4) с вакуумными граничными условиями на сферических поверхностях (9)–(11) [10]. Вычислительные эксперименты проводились с помощью разработанного авторами МГД-кода CVMHD (Control Volume Magneto-HydroDynamics), адаптированного для работы на гибридных вычислительных системах с графическими процессорами [8, 10, 19–21]. Программный комплекс CVMHD предназначен для математического моделирования МГД-течений и гидромагнитного динамо. На рис. 2 продемонстрирована модульная структура комплекса. Комплекс программ разработан с использованием технологий параллельного программирования CUDA и OpenMP [11, 12].

Рис. 2. *Структура комплекса CVMHD*

В комплексе CVMHD реализованы следующие основные численные методы и алгоритмы: метод контрольного объема [13, 14] для сферических координат на структурированных разнесенных сетках; схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в сферических координатах [8], схема QUICK [15] для аппроксимации индуктивной части электрического поля уравнения индукции совместно с методом отложенной коррекции [16]; алгоритм переноса ограничения [9]; алгоритмы SIMPLER [13, 14] и PISO [17, 18] для расчета поля течения жидкости, а также реализованы вакуумные [10] и псевдовакуумные [19] граничные условия для компонентов магнитного поля. На рис. 3 представлена блок-схема, которая концептуально описывает вычислительный процесс на временном слое при решении типовой задачи МГД-конвекции с заданными вакуумными граничными условиями. Комплекс протестирован на задачах с точным аналитическим решением и эталонных задачах конвекции и геодинамо [10, 19–21].

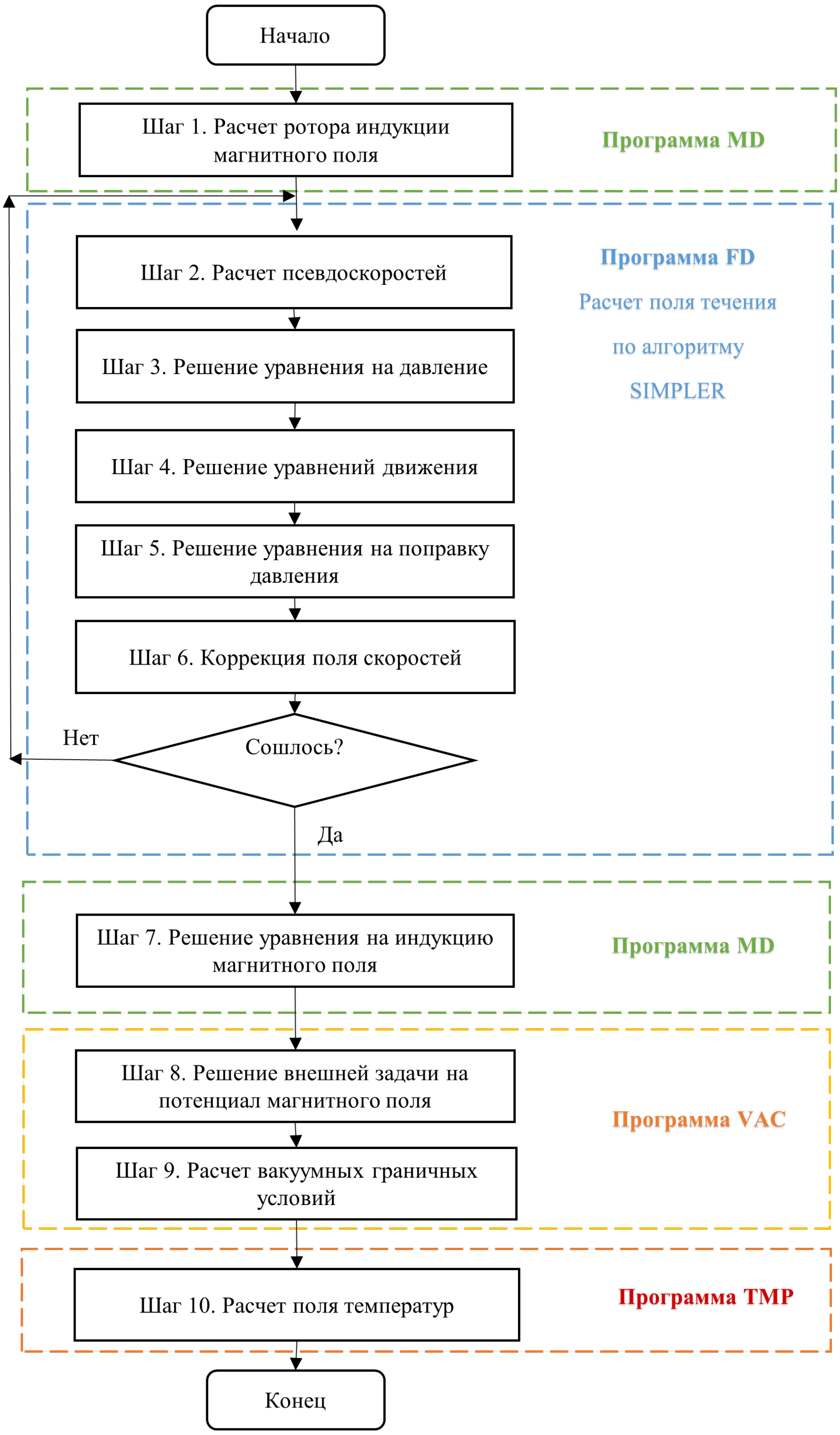
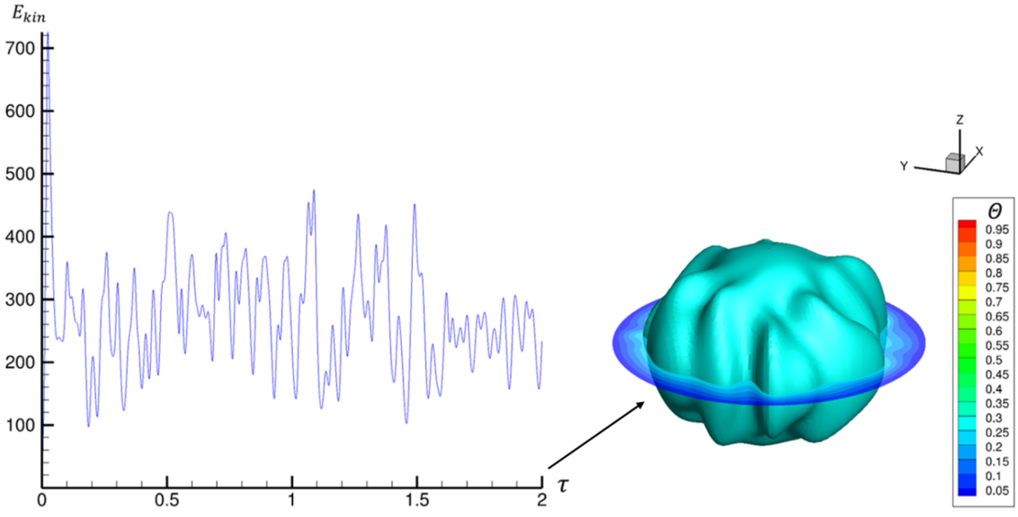


Рис. 3. *Блок-схема вычислительного процесса в рамках 1-го временного слоя*



а) б)

Рис. 4. *а) График средней плотности кинетической энергии в режиме естественной конвекции ($\boldsymbol{B} \equiv 0$); б) Изоповерхность температуры ($\Theta = 0.5$) на момент времени $\tau^* = 2$*

Результаты расчетов

Расчет проводился на сетке $n_r = 70$, $n_\theta = 140$, $n_\varphi = 160$, в сферических координатах ($r \in [0,r_o]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$) с шагом по времени $\delta\tau = 10^{-4}$. Сначала на момент времени $\tau^* = 2$ было получено квазистационарное решение задачи о естественной конвекции во вращающемся сферическом слое (1)–(3) с граничными (6)-(7) и начальными (8) условиями при $\boldsymbol{B} \equiv 0$, и значениях управляющих параметров $m = 5$, $E = 5 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 1$, $Ra^* = 200$. Для данного решения на рис. 4 представлены график средней плотности кинетической энергии (рис. 4а) и типичная изоповерхность температуры (рис. 4б), которая демонстрирует структуру течения, состоящую из десяти конвективных колонн, вытянутых вдоль оси вращения сферического слоя. Затем полученные поля температуры, давления, скорости рассматривались, как начальные условия (на момент времени $\tau^* = 2$) для задачи о генерации магнитного поля (1)–(5) с граничными условиями (6), вакуумными граничными условиями (9)–(11) и начальными условиями (12), магнитное число Прандтля принималось равным 5 ($Pm = 5$). В качестве начального магнитного поля рассматривалось слабое однородное поле, направленное вдоль оси вращения слоя (12): $\Lambda = 0{,}01$. Соответствующее начальное значение средней плотности магнитной энергии $E_{mag} \approx 2$.

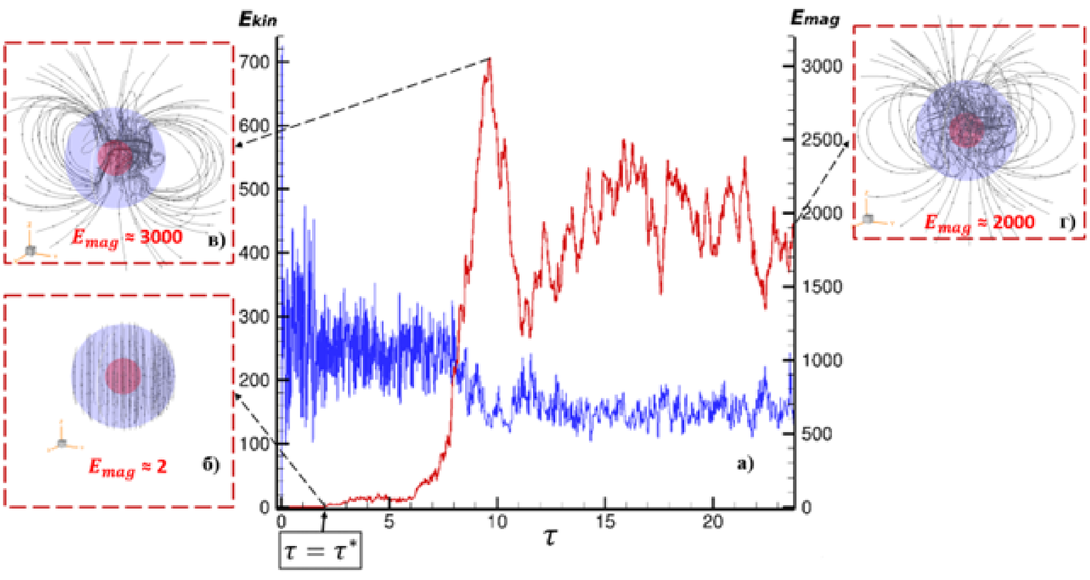


Рис. 5. *(а) Графики средних плотностей кинетической E_{kin} (синяя линия) и магнитной E_{mag} (красная линия) энергий; б), в), г) Силовые линии магнитного поля в различные моменты времени*

Результаты расчета, представленные на рис. 5а, демонстрируют эволюцию средних плотностей кинетической и магнитной энергий в процессе генерации и явный (на три порядка) эффект усиления энергии начального магнитного поля. Необходимо отметить, что при этом уровень кинетической энергии падает приблизительно в полтора раза. На рис. 5б–г показана эволюция магнитного поля, которая демонстрирует, что преобладание дипольной составляющей сохраняется, но при этом наблюдаются изменения угла наклона оси симметрии магнитного поля относительно оси вращения слоя, проходящей через географический полюс.

Заключение

Получено решение задачи геодинамо, в котором в процессе генерации магнитного поля значение начальной магнитной энергии возрастает на три порядка, а во внешнем магнитном поле преобладает дипольная составляющая. В полученном решении поля температуры и скорости симметричны относительно экваториальной плоскости, а во внешнем магнитном поле преобладает дипольная составляющая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christensen U. R. et al. A Numerical Dynamo Benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2001;128(1–4):25–34. DOI: 10.1016/S0031-920100275-8.
2. Matsui H. et al. Performance Benchmarks for a Next Generation Numerical Dynamo Model. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2016;17:1586–1607. DOI: 10.1002/2015GC006159.
3. Marti P. et al. Full Sphere Hydrodynamic and Dynamo Benchmarks. *Geophysical Journal International*. 2014;197:119–134. DOI: 10.1093/gji/ggt518.
4. Jackson A. et al. A Spherical Shell Numerical Dynamo Benchmark with Pseudo-Vacuum Magnetic Boundary Conditions. *Geophysical Journal International*. 2014;196:712–723. DOI: 10.1093/gji/ggt425.
5. Sarson G. R., Jones C. A., Zhang K. Dynamo Action in a Uniform Ambient Field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1999;111(1–2):47–68. DOI: 10.1016/S0031-920100145-9.
6. Sakuraba A., Kono M. Effect of a Uniform Magnetic Field on Nonlinear Magnetocenvection in a Rotating Fluid Spherical Shell. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2000;92(3–4):255–287. DOI: 10.1080/03091920008203718.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Физматлит; 2001. 731 с.
8. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Схема дискретизации уравнения индукции на смещенных сетках в ортогональных криволинейных координатах. *Успехи кибернетики*. 2022;3:60–73. DOI: 10.51790/2712-9942-2022-3-2-8.
9. Iskakov A. B., Descombes S., Dormy E. An Integro-Differential Formulation for Magnetic Induction in Bounded Domains: Boundary Element–Finite Volume Method. *Journal of Computational Physics*. 2004;197:540–554. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.12.008.
10. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Численное решение начально-краевой задачи с вакуумными граничными условиями для уравнения индукции магнитного поля в шаре. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020;64:15–30. DOI: 10.17223/19988621/64/2.
11. Ansorge R. *Programming in Parallel with CUDA: A Practical Guide*. Cambridge: Cambridge University Press; 2022. 395 p.
12. Mattson T. G., He Y., Koniges A. E. *The OpenMP Common Core: Making OpenMP Simple Again*. Cambridge: The MIT Press; 2019. 295 p.
13. Patankar S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation; 1980. 214 p.
14. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics.* Harlow: Pearson Education Limited; 2007. 503 p.
15. Leonard B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979;19:59–98. DOI: 10.1016/0045-782590034-3.
16. Hayase T., Humphrey J. A. C., Greif R. A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. *Journal of Computational Physics*. 1992;98:108–118. DOI: 10.1016/0021-999190177-Z.

17. Issa R. I. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986;62:40–65. DOI: 10.1016/0021-999190099-9.
18. Issa R. I., Gosman A. D., Watkins A. P. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-Iterative Implicit Scheme. *Journal of Computational Physics*. 1986;62:66–82. DOI: 10.1016/0021-999190100-2.
19. Бычин И. В. Тестирование магнитогидродинамического кода на задачах естественной конвекции и геодинамо. *Успехи кибернетики*. 2021;2:6–13. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-1-1.
20. Бычин И. В., Гореликов А. В., Ряховский А. В. Тестирование программного комплекса для численного моделирования теплообмена и течения жидкости в сферических слоях. *Вестник кибернетики*. 2013;12:81–88.
21. Галкин В. А., Гореликов А. В., Бычин И. В., Дубовик А. О., Ряховский А. В. Тестирование алгоритмов вычислительной магнитной гидродинамики на задаче с точным решением. *Успехи кибернетики*. 2020;1:29–37. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-4.