

КВАНТОВОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

И. А. Суров

Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5690-7507>, ✉ ilya.a.surov@itmo.ru

Аннотация: используемое в искусственных нейронных сетях вещественное исчисление описывает амплитуды нервных сигналов, игнорируя их фазы — важнейшую группу параметров, управляющую композицией когнитивных волн биологического мозга. Для снятия связанных с этим ограничений в статье представлена комплекснозначная модификация сингулярного разложения, являющегося прообразом тензорной алгебры современных нейросетей. При этом диагональная матрица сингулярных значений обобщается до самосопряженной матрицы, аналогичной матрице плотности квантовой теории. Добавляемые таким образом недиагональные элементы учитывают нестационарную алгоритмику породившей моделируемые данные поведенческой системы в малоразмерном «семантическом» пространстве. Как и в обычном сингулярном разложении, эта «скрытая» алгоритмика разворачивается в пространство наблюдаемых событий домножением матрицы плотности на пару ортогональных действительных матриц. Полученная матрица комплекснозначных амплитуд порождает наблюдаемые действительные данные посредством квадратного модуля аналогично квантовому правилу Борна. По сравнению с обычным сингулярным разложением, на небольших случайно сгенерированных матрицах разработанный метод существенно повышает точность аппроксимации ценой небольшого увеличения числа параметров. Это преимущество обусловлено эффективностью квантово-волновых принципов обработки информации в естественном мышлении, выраженных в представленной алгебре. Разработанный метод открывает новые возможности для семантического анализа данных, а также для совершенствования современных нейросетевых архитектур.

Ключевые слова: матричное разложение, матрица плотности, амплитуда, интерференция, фаза, комплексные нейронные сети.

Благодарности: работа выполнена за счет гранта РНФ № 23-71-01046.

Для цитирования: Суров И. А. Квантовое сингулярное разложение. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):84–93.

Поступила в редакцию: 18.12.2024.

В окончательном варианте: 22.01.2025.

QUANTUM SINGULAR-VALUE DECOMPOSITION

I. A. Surov

ITMO University, Saint-Petersburg, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5690-7507>, ✉ ilya.a.surov@itmo.ru

Abstract: real-valued calculations in artificial neural networks captures the amplitudes of neural signals but neglects their phases, which are critical parameters controlling the composition of cognitive waves in natural brains. To address this limitation, we present a complex-valued modification of singular matrix decomposition, a conceptual precursor to the tensor algebra underlying modern neural networks. In this approach, we generalize the diagonal matrix of singular values to a self-adjoint complex matrix, analogous to the density matrix in quantum theory. Within low-dimensional “semantic” spaces, the additional non-diagonal elements of the complex matrix account for the non-stationary logic of the cognitive systems that generate the data. As in the standard formulation, the density matrix is sandwiched between two orthogonal real-valued matrices, unfolding semantic regularities into the space of observable events. The squared modulus of the resulting set of complex-valued amplitudes then produces observable real-valued data, following the quantum-mechanical Born rule. By introducing a minor increase in the number of parameters, our method significantly enhances the precision of classical singular value decomposition. This improvement highlights the efficiency of wave-like and quantum-inspired principles in natural cognition, as expressed in the proposed algebra. The method provides new opportunities for semantic data analysis and offers pathways to advance modern neural network architectures.

Keywords: matrix decomposition, density matrix, amplitude, interference, phase, complex neural networks.

Acknowledgements: the work is supported by an RNF grant, project 23-71-01046.

Cite this article: Surov I. A. Quantum Singular-Value Decomposition. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):84–93.

Original article submitted: 18.12.2024.

Revision submitted: 22.01.2025.

Введение

Современные алгоритмы искусственного интеллекта и машинного обучения реализованы посредством тензорной алгебры, в которой матрицы описывают переходы между соседними слоями искусственной нейросети. При этом элементами матриц обычно являются действительные числа, кодирующие «веса связей» между парами вершин. С физической точки зрения, однако, целесообразность этого обычного выбора вызывает вопросы; действительные числа удобны для формализации механических и термодинамических процессов, однако взаимодействие нервных клеток к таковым не относится. Реальные нейронные сигналы передаются электромагнитными волнами, идущими по дендритам и аксонам — фактически, по межклеточным волноводам [1]. Возникающие при этом интерференционные эффекты следуют не логике частиц, а логике «когнитивных волн» [2, 3]; при моделировании этой волновой активности удобным оказывается комплекснозначный формализм волновых и квантовых состояний [4–6].

Комплексные числа отличаются от действительных наличием дополнительной степени свободы, определяющей фазу нейронной волны или колебательного процесса. Эта фаза также кодируется действительным числом, однако не с линейной, а с круговой топологией. Важность этой разницы хорошо известна в физике и ряде задач обработки сигналов [7]; формализации волновой и квантовой физики в рамках действительного исчисления возможны, но более громоздки и сложны. Сходным образом обычные нейронные сети способны имитировать некоторые свойства нервно-волновых процессов [8–10], однако ряд ограничений современных вычислительных систем [11, 12], по видимому, обусловлен их несоответствием истинной физике «нервной деятельности».

В силу накопленного опыта, теоретических и прикладных результатов полный переход искусственных нейросетей на новые логические принципы и математические формализмы вряд ли оправдан. Целесообразно дополнение существующих моделей новыми модулями: отдельными переходами или группами слоев, встраиваемых в существующие архитектуры нейронных сетей и позволяющих снять отмеченные ограничения. В качестве такого модуля может быть использован, в частности, матричный вид квантовой модели контекстно-зависимых решений [13], а также двухматричное разложение на принципах квантовой логики [14]. При этом комплекснозначной становится одна из двух матриц разложения, что позволяет реализовать в этом модуле логику интерференции нервно-волновых амплитуд. Число возникающих при этом фазовых параметров, однако, линейно по размерам исходной матрицы, что затрудняет масштабирование этих подходов.

В данной статье представлено комплекснозначное матричное разложение, в котором число добавочных параметров не связано с размером анализируемой матрицы. Это достигается переходом от двухматричного к трехматричному разложению, прототипом которого является классическое сингулярное разложение.

Классическое сингулярное разложение

Отправной точкой представляемого метода является усеченное сингулярное матричное разложение [15, 16], объектом которого обычно является набор M численных признаков, измеренный в N экспериментах — отсчетах или пробах. Массив этих данных в виде матрицы $\mathbf{D}$ размером $M \times N$ аппроксимируется произведением двух ортогональных и одной диагональной матрицы:

$$\mathbf{D}_{M \times N} \approx \mathbf{U}_{M \times K} * \mathbf{A}_{K \times K} * \mathbf{V}_{K \times N}. \quad (1)$$

При этом число строк M и число столбцов N матрицы $\mathbf{D}$ совпадают с числами строк и столбцов матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Вторые размеры этих матриц совпадают с размером K диагональной матрицы $\mathbf{A}$, элементами которой являются сингулярные значения $\lambda_1 \dots \lambda_K \geq 0$, как показано на рис. 1 для $K = 2$. Этот размер K является свободным параметром разложения и не превышает наименьшего из размеров M и N

$$1 \leq K \leq K_{\max} = \min(M, N),$$

в каком случае равенство в формуле (1) становится точным. Усечение до $K < K_{\max}$ уменьшает соответствующие размеры матриц разложения ценой ошибки, по норме равной сумме отброшенных сингулярных значений.

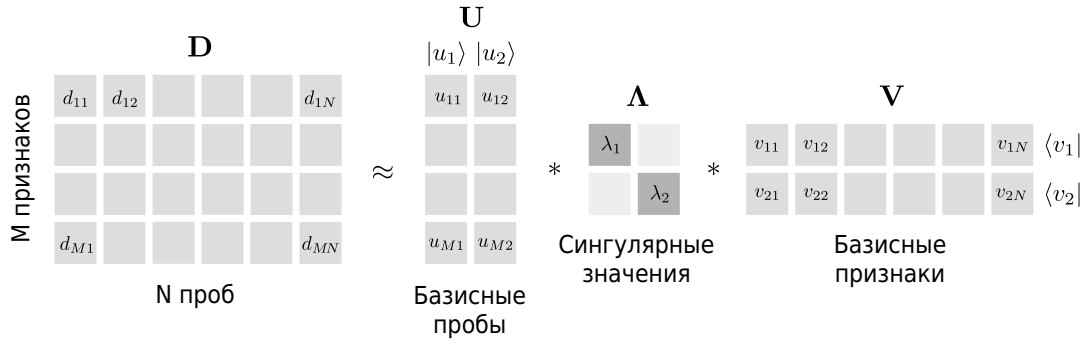


Рис. 1. Сингулярное матричное разложение (1)–(2) матрицы $\mathbf{D}$ из M строк-признаков и N столбцов-проб, усеченное до $K = 2$ сингулярных значений

Разложение (1) удобно записать в тензорном виде

$$\mathbf{D} \approx \sum_{k=1}^K |u_k\rangle \lambda_k \langle v_k| = \sum_{k=1}^K \lambda_k |u_k\rangle \langle v_k|, \quad (2)$$

где $|u_k\rangle$ и $\langle v_k|$ есть вектор-столбцы матрицы $\mathbf{U}$ и вектор-строки матрицы $\mathbf{V}$, соответствующие сингулярным значениям λ_k . Ортогональность матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ означает, что K вектор-столбцов $|u_k\rangle$ длиной M образуют неполный ортонормированный базис в «пространстве проб» размерности M ; аналогичным образом вектор-строки $\langle v_k|$ длиной N образуют неполный ортонормированный базис «пространства признаков» размерности N :

$$\langle v_k | v_l \rangle = \langle u_k | u_l \rangle = \delta_{kl}. \quad (3)$$

Из записи (2) видно, что сингулярное разложение представляет исходную матрицу $\mathbf{D}$ в виде суммы K «главных компонент» $|u_k\rangle \langle v_k|$, взятых с весами λ_k .

Операторный вид

Матрицу исходных данных $\mathbf{D}$ можно рассматривать как оператор, отображающий вектор-признаки длиной N в вектор-пробы длиной M :

$$\mathbf{D}|x_N\rangle = |x_M\rangle. \quad (4)$$

Столбцы матрицы $\mathbf{V}$ и строки матрицы $\mathbf{U}$ тогда представляют собой ортонормированные базисы пространств признаков и проб, в которых оператор (4) принимает диагональный вид $\mathbf{\Lambda}$. При этом благодаря ортогональности (3) каждый базисный вектор $|v_k\rangle$ отображается в базисную пробу $|u_k\rangle$, умноженную на соответствующее сингулярное значение (2):

$$\mathbf{D}|v_k\rangle = \sum_{j=1}^{K_{\max}} \lambda_j |u_j\rangle \langle v_j | v_k \rangle = \lambda_k |u_k\rangle, \quad \langle u_k | \mathbf{D} = \lambda_k \langle v_k|. \quad (5)$$

Соответственно, сингулярное разложение аппроксимирует полное отображение (4) последовательностью трех этапов, показанной на рис. 2 в сетевой форме:

- Умножение на матрицу $\mathbf{V}$ раскладывает произвольный вектор-признак $|x_N\rangle$ по ортонормированному базису $|v_k\rangle$, проектируя его в сжатое пространство размерности K :

$$\mathbf{V}|x_N\rangle = \begin{bmatrix} \langle v_1 | x_N \rangle \\ \vdots \\ \langle v_K | x_N \rangle \end{bmatrix} = |x_K\rangle.$$

- Умножение полученной проекции $|x_K\rangle$ на диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}$ взвешивает ее компоненты с сингулярными значениями λ_k :

$$\mathbf{\Lambda}|x_K\rangle = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1 | x_N \rangle \\ \vdots \\ \langle v_K | x_N \rangle \end{bmatrix} = |x_{K\Lambda}\rangle. \quad (6)$$

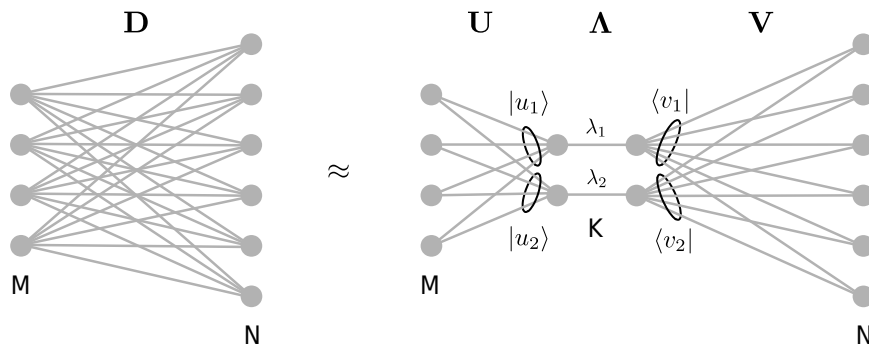


Рис. 2. Сетевая форма классического сингулярного разложения (рис. 1), в которой полносвязный переход между слоями признаков и проб посредством матрицы D аппроксимируется тремя последовательными переходами U , A , V с двумя внутренними слоями из K вершин каждый

- Умножение на ортогональную матрицу U разворачивает результат в пространство проб размерности M , аппроксимируя полное отображение (4):

$$U|x_{K\Lambda}\rangle \approx |x_M\rangle = D|x_N\rangle.$$

Таким образом информация x переводится из пространства признаков в пространство проб и обратно не напрямую (как при умножении на исходную матрицу D), а через промежуточное пространство малой размерности K . Это малоразмерное представление позволяет, в частности, вычислять похожесть векторов из разномерных пространств признаков и проб, которыми могут быть, например, слова и тексты, в которых эти слова встречаются [17]. Кроме того, в ряде задач информативной оказывается сама сжатая форма информации. Представление слов естественного языка 100–1000 мерными векторами [18], например, получено из внутреннего, малоразмерного слоя искусственной нейросети, подобного средним слоям на рис. 2. Алгоритмы такого типа позволяют моделировать неявные закономерности речи [18], в силу чего отображения из пространств исходных данных N, M в пространство (много) меньшей размерности K рассматриваются как переход от синтаксической информации в исходной матрице D к ее неявному смыслу, или «скрытой семантике» [19].

Смысловая (не)стационарность

Согласно диагональному виду матрицы A каждая малоразмерная «смысловая» компонента $|k\rangle$ размерности K переходит сама в себя (5), то есть

$$A|k\rangle = \lambda_k|k\rangle, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (7)$$

как показано в середине правой части рис. 2. Соответствующее действие оператора D в сингулярном представлении сводится к преобразованию координат смыслового состояния $|k\rangle$ между пространствами признаков и проб посредством ортогональных матриц U и V . Таким образом, классическое сингулярное представление любого (вещественный или комплекснозначный) оператора D является стационарным, когда его «ответ» на любой базисный «запрос» семантически совпадает с этим «запросом» с точностью до положительного множителя.

Реальные поведенческие системы, однако, редко бывают стационарными. На практике смысловые состояния обладают свойством более или менее спонтанного перехода в другие смысловые состояния, что является свойством творческого поведения живых организмов. Большинство поведенческих данных, включая таблицы «признак-проба», порождается именно такими, нестационарными и недетерминированными системами [20].

Оператор плотности

Ключевым элементом нестационарного и недетерминированного поведения является свободный выбор одной из W взаимоисключающих альтернатив. В квантовой когнитивистике эти альтернативы образуют базис $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |W\rangle$ гильбертова пространства, в котором действует моделируемая

поведенческая система [24]. Вероятностные закономерности такого поведения кодируются так называемым оператором плотности — самосопряженной (эрмитовой) матрицей размером $W \times W$, которая в простейшем случае $W = 3$ имеет вид

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{32} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{bmatrix} = \sum_{n,m} \rho_{nm} |m\rangle \langle n| \quad (8)$$

и работает следующим образом.

Пусть на вход поведенческой системы подан вектор-запрос $|z\rangle = |2\rangle$. Оператор (8) обрабатывает его по правилам матричного умножения и возвращает вектор

$$\mathcal{R}|z\rangle = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{32} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{21} \\ \rho_{22} \\ \rho_{23} \end{bmatrix} = \rho_{21}|1\rangle + \rho_{22}|2\rangle + \rho_{23}|3\rangle. \quad (9)$$

Этот вектор кодирует возможные варианты ответа моделируемой системы на запрос $|2\rangle$, каждый из которых характеризуется комплексным числом ρ_{2k} . В частности, числа ρ_{21} и ρ_{23} соответствуют переходам от вопросного состояния $|2\rangle$ к ответам $|1\rangle$ и $|3\rangle$, тогда как число ρ_{22} соответствует «утвердительному» ответу $|2\rangle$, совпадающему с вопросом. Таким образом, элементы ρ_{nm} матрицы плотности соответствуют переходам поведенческой системы от вопроса n к ответу m , как видно из правой части формулы (8).

Наряду с базисными состояниями $|1\rangle \dots |W\rangle$, вопросом $|z\rangle$ к поведенческой системе может быть любой нормированный вектор в рассматриваемом гильбертовом пространстве, например $(|1\rangle + e^{i\phi}|3\rangle)/\sqrt{2}$. В этом случае

$$\mathcal{R}|z\rangle = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{32} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{i\phi} \end{bmatrix} / \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{31}e^{i\phi} \\ \rho_{12} + \rho_{32}e^{i\phi} \\ \rho_{13} + \rho_{33}e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

то есть числовая мера каждого из возможных ответов складывается из двух компонент: переход из вопросной компоненты $|1\rangle$ (первые слагаемые) и переход из вопросной компоненты $|3\rangle$ (вторые слагаемые). Результат этого сложения зависит от фазы ϕ третьей компоненты вектор-запроса $|z\rangle$. Благодаря этому модель может учитывать переменные внешние условия и внутренние обстоятельства поведенческой системы — так называемый контекст принятия решений, фиксируемый в теории вероятности Колмогорова [21]. Таким образом, формализм оператора плотности позволяет моделировать контекстно-чувствительные закономерности нестационарного поведения, не находящие отражения в классической теории вероятности [22, 24].

Будучи оператором в гильбертовом пространстве, матрица плотности (8) также является комплекснозначной. Модуль элемента ρ_{nm} есть вероятность P перехода $n \rightarrow m$, тогда как его фаза есть физическое действие S на этом переходе в единицах постоянной Планка для рассматриваемой системы [25, 26]:

$$\rho_{nm} = \langle m|\mathcal{R}|n\rangle = P_{nm} * \exp\left(i\frac{S_{nm}}{\hbar}\right). \quad (11)$$

Фазы элементов ρ_{nm} определяют отклик поведенческой системы на небазисные запросы $|z\rangle$ аналогично величине ϕ в формуле (10). Поскольку при обращении перехода $nm \rightarrow mn$ действие S меняет знак, а его вероятность P не меняется, каждый недиагональный элемент матрицы (8) является комплексным сопряжением от своей зеркальной пары: $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$.

На переходах из каждого базисного состояния $|1\rangle \dots |W\rangle$ в само себя действие в формуле (11) $S_{nn} = 0$, в силу чего диагональные элементы матрицы (8) являются вещественными:

$$\rho_{nn} = \langle n|\mathcal{R}|n\rangle = P_n \geq 0, \quad \sum_n P_n = 1. \quad (12)$$

Как видно из формулы (9), каждый такой элемент представляет собой вероятность утвердительного ответа поведенческой системы на базисный вопрос $|n\rangle$. Благодаря нормировке на единицу (12) эта диагональ соответствует классическому распределению вероятности P_n множества событий $|1\rangle \dots |W\rangle$ [21].

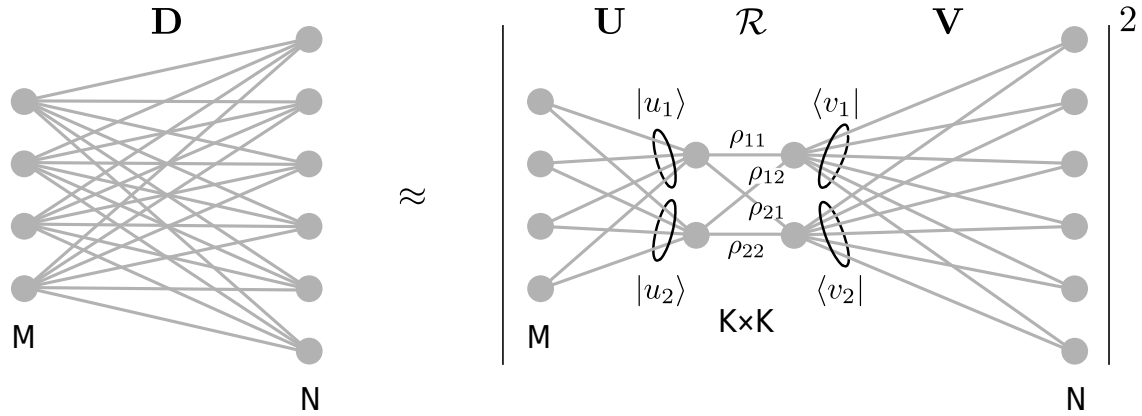


Рис. 3. Комплекснозначное разложение (15) в сетевой форме при $K = 2$. Сингулярный переход Λ на рис. 2 заменен на полносвязную эрмитову матрицу плотности $\mathcal{R}$ (8)

Комплекснозначное сингулярное разложение

Таким образом, диагональный оператор плотности (8) с элементами (12) описывает логику поведенческих систем, не способных к переходу в состояния, отсутствующие в вектор-запросе. Это и есть свойство (смысловой) стационарности, отмеченное в конце раздела о классическом сингулярном разложении. Снять связанные с этим ограничения можно путем замены диагональной матрицы сингулярных значений Λ (6), (7) размером $K \times K$ на матрицу плотности $\mathcal{R}$ (8) такого же размера. При такой замене, однако, произведение

$$URV = Q \quad (13)$$

становится комплекснозначным, что не соответствует вещественному типу данных матрицы D . Мнимая часть этого произведения, а значит и матрицы плотности $\mathcal{R}$, могла бы лишь увеличить норму Фробениуса $\|D - Q\|$, повышая ошибку аппроксимации; известно, что по такой ошибке сингулярное разложение (1) матрицы D оптимально среди всех ее линейных аппроксимаций фиксированного ранга K [16].

Решение этой проблемы подсказывается квантовоподобными принципами когнитивно-поведенческого моделирования [22, 23], согласно которым наблюдаемые вещественные величины порождаются комплексными амплитудами квантово-волновых состояний через операцию квадратного модуля. Элементы произведения (13) следует считать именно такими амплитудами. Соответственно, аппроксимацией исходных данных должна быть не сама матрица Q , а поэлементный квадрат ее модуля с общей мерой ошибки

$$loss = \|D - |Q|^2\|. \quad (14)$$

Внесенная таким образом нелинейность выводит эту аппроксимацию за рамки теоремы об оптимальности классического сингулярного разложения [15], в принципе позволяя превзойти его по точности.

Как и в классическом разложении (1), матрицы U и V в формуле (13) остаются вещественными и ортогональными (3). Следовательно, аппроксимация (14) представима в виде

$$D \approx |URV|^2 = \left| \sum_{n,m} \rho_{nm} |u_m\rangle \langle v_n| \right|^2, \quad (15)$$

отличающемся от классического разложения (5) наличием перекрестных членов, вносимых недиагональными элементами матрицы $\mathcal{R}$ (8), как показано на рис. 3. При этом из-за отсутствия нормировки матрицы D требование единичного следа (12) с диагональных элементов ρ_{nn} целесообразно снять. Элементы ρ_{nm} в (15) образуют эрмитову матрицу $\mathcal{R}$ с неотрицательными собственными значениями, приводимую к обычной матрице плотности делением на след.

Аппроксимация (14), (15) также предполагает, что матрица D ограничивается неотрицательными значениями, интерпретируемыми как интенсивности амплитуд Q . Произвольные действительные матрицы приводятся к такому виду посредством экспоненцирования с последующим логарифмированием (преобразование Больцмана, softmax).

Число параметров и оптимизация

В отличие от сингулярной матрицы $\mathbf{A}$ с K действительными значениями (6), матрица $\mathcal{R}$ в разложении (13), (15) имеет K^2 независимых параметров (включая модули и фазы комплексных элементов). Число свободных параметров матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$

$$npU = MK - \frac{K(K+1)}{2}, \quad npV = NK - \frac{K(K+1)}{2},$$

напротив, остается без изменений. Таким образом, переход от классического к комплекснозначному разложению увеличивает полное число независимых параметров на $K^2 - K$ единиц. Для рассмотренного далее случая квадратных матриц $\mathbf{D}$ размером полное число параметров обоих разложений для $N = M \leq 11$ показано на рис. 4. В частности, при $N = M = 10$ матрица $\mathbf{D}$ имеет $NM = 100$ свободных параметров, тогда как классическое сингулярное разложение с $K = 2, 3, 4$ аппроксимирует ее, используя 36, 51 и 64 параметра. Комплекснозначное разложение (15) увеличивает эти значения на 2, 6 и 12 единиц соответственно.

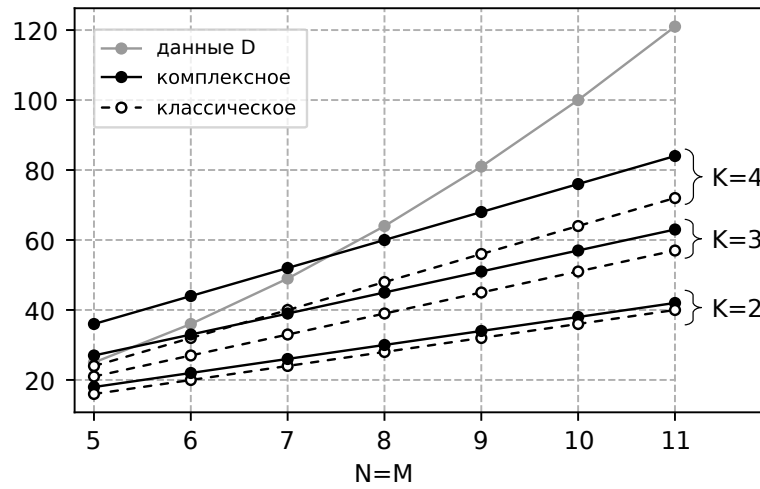


Рис. 4. Число параметров классического (пунктир, белые точки) и комплекснозначного (сплошная линия, черные точки) разложения квадратной матрицы $\mathbf{D}$ в зависимости от ее размера $N = M$ для различных K . Серым показано число параметров N^2 исходных данных

Параметры матриц $\mathbf{U}, \mathcal{R}, \mathbf{V}$ разложения (15) определялись с помощью алгоритма многомерной оптимизации Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шенно (BFGS) [27, 28] с функцией ошибки (14). Этот алгоритм обеспечивает сравнительно быструю сходимость к локальному минимуму, выбор которого зависит от начальной точки. В этой связи для каждой исходной матрицы $\mathbf{D}$ проводилось от 20 до 100 оптимизаций со случайным набором начальных значений, из которых бралась наилучшая.

Результаты испытаний

Разложение (15) испытано на квадратных матрицах $\mathbf{D}$ размером $5 \leq N = M \leq 11$, составленных из N^2 случайных чисел от 0 до 1. Для каждого размера таким образом готовилось от 20 до 100 матриц, каждая из которых аппроксимировалась для нескольких начальных точек, как отмечено выше. Среднее значение ошибки (14) из полученных таким образом наилучших комплекснозначных аппроксимаций нормировалось на среднюю ошибку классического сингулярного разложения того же ранга K для тех же исходных матриц $\mathbf{D}$.

Зависимости этой нормированной ошибки от N показаны красным на рис. 5, где графики соответствуют размеру матрицы плотности $K = 2, 3$ и 4. Во всех случаях ошибка комплекснозначного разложения ниже ошибки классического аналога, и эта разность убывает с ростом N . В частности, для $N = 7$ переход от сингулярного к комплекснозначному разложению при $K = 2$ снижает среднюю ошибку аппроксимации на 21% ценой 2 новых параметров, добавляемых к 24 параметрам классического разложения (рис. 4). При $K = 3$ снижение ошибки составляет 61%, тогда как число параметров увеличивается с 33 до 39; при $K = 4$ ошибка снижается в 18 раз при росте числа параметров с 40 до 52.

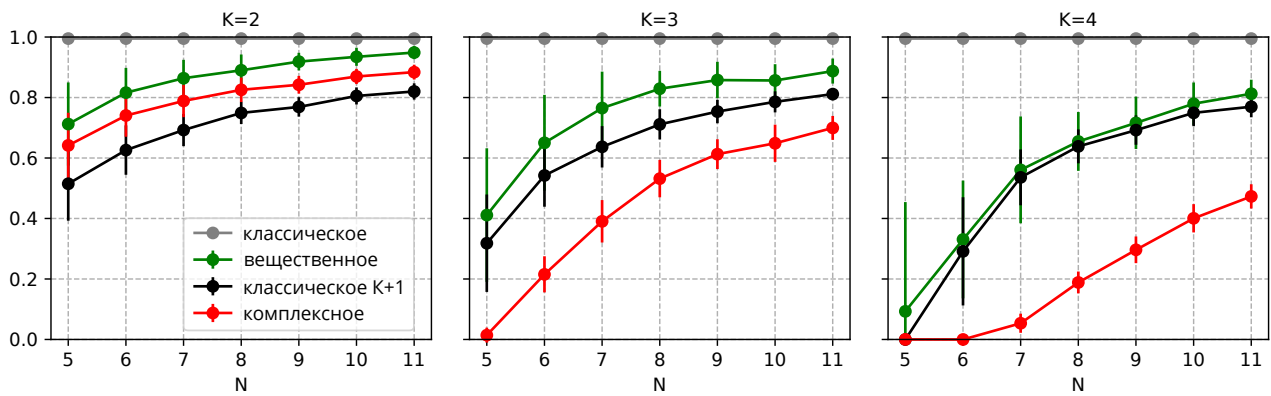


Рис. 5. Красный: средняя ошибка комплекснозначного разложения (15) случайной квадратной матрицы $\mathbf{D}$ в зависимости от ее размера $N = M$ для различных K , нормированная на среднюю ошибку обычного сингулярного разложения (1) (серый). Черный: обычное сингулярное разложение размерности, повышенной на единицу. Зеленый: вещественная модификация комплексного разложения, при которой фазы недиагональных элементов матрицы $\mathcal{R}$ (11) положены равными 0

В связи с этим целесообразно сравнить полученные ошибки с более низкими ошибками сингулярных разложений, ранг которых на единицу выше при соответственно увеличенном числе параметров (рис. 4). При $K = 3$ эти (также нормированные) ошибки повышенного ранга 4, показанные черным, превосходят ошибки комплекснозначного разложения ранга 3 на рассмотренном диапазоне N . При этом начиная с $N = 7$ параметров у комплекснозначного разложения меньше, чем у сингулярного разложения повышенного ранга: 39 против 40 для $N = 7$, 45 против 48 для $N = 8$, 51 против 56 для $N = 9$, 57 против 64 для $N = 10$ и 63 против 72 для $N = 11$. Аналогичный результат имеет место для $K = 4$, но не для $K = 2$, при котором классическое разложение повышенного ранга 3 выигрывает благодаря существенно большему числу параметров (рис. 4).

Зеленые графики на рис. 5 показывают среднюю ошибку аппроксимации (15), в которой элементы матрицы $\mathcal{R}$ ограничены действительными значениями, что снижает число добавочных параметров вдвое за счет отсутствия фаз. В рассмотренном диапазоне N и K точность такой аппроксимации превосходит классическое разложение того же ранга (серый), но не достигает до повышенного ранга (черный). Как видно из графиков, большая часть преимущества комплекснозначного разложения над классическим возникает именно вследствие перехода $\mathcal{R}$ от вещественных к комплексным числам.

Заключение

Существенное повышение точности аппроксимации при незначительном росте числа параметров (рис. 4, 5) означает, что представленный метод повышает удельную информативность параметров модели. Это достигается благодаря переходу от линейной ошибки $\|\mathbf{D} - \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}\|$ классического разложения (1) к квадратичной ошибке (14), в результате чего элементы матриц $\mathbf{U}$, $\mathcal{R}$, $\mathbf{V}$ начинают работать не как линейные компоненты данных $\mathbf{D}$, а как порождающие эти данные амплитуды вероятности рассматриваемых событий. Для поведенческих данных эти амплитуды описывают «когнитивные волны» поведенческой системы [3], возможно, распределенной по множеству удаленных организмов. При этом недиагональные элементы матрицы $\mathcal{R}$ (8) отвечают за интерференцию этих амплитуд — ключевое отличие нелинейной «логики волн» от колмогоровской логики множеств. Как видно из представленных результатов, возможность такой интерференции повышает точность аппроксимации без увеличения числа компонент разложения.

Переход от комплекснозначных амплитуд к наблюдаемым вещественным данным посредством квадратичной нормы (12) ставит задачу нелинейной оптимизации. Представленные в предыдущем разделе результаты получены с помощью общего алгоритма BFGS, ресурсоемкость которого быстро растет при повышении размера раскладываемой матрицы $\mathbf{D}$. По этой причине опробовать представленное разложение на больших объемах данных типа [17] пока не удалось. Такая апробация, однако, интересна в связи с возможностью процессно-смысловой интерпретации комплексных элементов матрицы $\mathcal{R}$ [29], что может принципиально расширить задачи семантического анализа текстовых [19] и других поведенческих данных [30–32]. Подобные исследования требуют эффективной минимизации

ошибки (12), в том числе с помощью алгоритмов квантовой и волновой информатики [33–37].

Решение этой оптимизационной задачи также важно для использования представленного метода в искусственных нейросетях. При этом комплекснозначный модуль на рис. 3 мог бы встраиваться в сверточные нейросети, машины Больцмана, автокодировщики, трансформеры и другие классические, квантовые и гибридные архитектуры [38–40], расширяя их возможности благодаря вышеотмеченному переходу от логики множеств к логике волн. Для такого встраивания необходим алгоритм обратного распространения ошибки, проходящий через барьер квадратного модуля — границу между «классической» и «квантовой» частями нейросети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bressloff P. C. *Waves in Neural Media: From Single Neurons to Neural Fields*. Springer; New York; 2014. DOI: 10.1007/978-1-4614-8866-8.
2. Barrett T. W. The Cortex as Interferometer: The Transmission of Amplitude, Frequency and Phase in Cortical Structures. *Neuropsychologia*. 1969;7(2):135–48.
3. Суров И. А. Логика множеств и логика волн в когнитивно-поведенческом моделировании. *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2023;32(4):51–66. DOI: 10.25729/ESI.2023.32.4.005.
4. Khrennikov A. Yu. Quantum-Like Model of Processing of Information in the Brain Based on Classical Electromagnetic Field. *BioSystems*. 2011;105(3):250–62. DOI: 10.1016/j.biosystems.2011.05.014.
5. Khrennikov A., Basieva I., Pothos E. M., Yamato I. Quantum Probability in Decision Making from Quantum Information Representation of Neuronal States. *Scientific Reports*. 2018;8(1):16225. DOI: 10.1038/s41598-018-34531-3.
6. Surov I. A., Semenenko E., Platonov A. V., Bessmertny I. A., Galofaro F., Toffano Z., Khrennikov A. Yu., Alodjants A. P. Quantum Semantics of Text Perception. *Scientific Reports*. 2021;11(1):4193. DOI: 10.1038/s41598-021-83490-9.
7. Краснов А. Е., Головкин М. Е., Герасимова В. И. Применение причинных преобразований в распознавании сигналов и изображений. *XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2024)* : сборник научных трудов, 17–20 июня 2024 г., М.: Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук; 2024:3186–3190.
8. Busemeyer J. R., Fakhari P., Kvam P. Neural Implementation of Operations Used in Quantum Cognition. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 2017;130:53–60.
9. Scholes G. D. Quantum-Like States on Complex Synchronized Networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2024;480(2295):20240209.
10. Khrennikov A. Yu., Ozawa M., Benninger F., Shor O. Coupling Quantum-Like Cognition with the Neuronal Networks within Generalized Probability Theory. 2024. preprint arXiv:2411.00036v1. DOI: 10.48550/arXiv.2411.00036.
11. Кузнецов О. П. Неклассические парадигмы в искусственном интеллекте. *Теория и системы управления*. 1995;5:3–23.
12. Roli A., Jaeger J., Kauffman S. A. How Organisms Come to Know the World: Fundamental Limits on Artificial General Intelligence. *Frontiers in Ecology and Evolution*. 2022;9:806283. DOI: 10.3389/fevo.2021.806283.
13. Суров И. А. Матрично-кубитный алгоритм семантического анализа вероятностных данных. *Моделирование и анализ информационных систем*. 2024;31(3):280–93. DOI: 10.18255/1818-1015-2024-3-280-293.
14. Kozhisseri S., Surov I. A. Quantum-Probabilistic SVD: Complex-Valued Factorization of Matrix Data. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2022;22(3):567–73. DOI: 10.17586/2226-1494-2022-22-3-567-573.
15. Eckart C., Young G. The Approximation of One Matrix by Another of Lower Rank. *Psychometrika*. 1936;1(3):211–218. DOI: 10.1007/2FBF02288367.
16. Stewart G. W. On the Early History of the Singular Value Decomposition. *SIAM Review*. 1993;35(4):551–566. DOI: 10.1137/1035134.
17. Landauer T. K., Dumais S. T. A Solution to Plato's Problem: The Latent Semantic Analysis Theory of Acquisition, Induction, and Representation of Knowledge. *Psychological Review*. 1997;104(2):211–240.

18. Mikolov T., Sutskever I., Chen K., Corrado G., Dean J. Distributed Representations of Words and Phrases and Their Compositionality. *NIPS'13. Proceedings of the 26th International Conference on Neural Information Processing Systems*. 2013.
19. Landauer T. K., McNamara D. S., Dennis S., Kintsch W., editors. *Handbook of Latent Semantic Analysis*. Routledge. 2011.
20. Газя Г. В., Газя Н. Ф., Еськов В. В., Манина Е. А. Непредсказуемость и неопределенность создают реальную Complexity. *Успехи кибернетики*. 2024;5(2):97–102. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-11.
21. Khrennikov A. Yu. *Interpretations of Probability*. Berlin, New York: De Gruyter; 2009. 219 p. DOI: 10.1515/9783110213195.
22. Khrennikov A. Yu. *Ubiquitous Quantum Structure: From Psychology to Finance*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-05101-2.
23. Haven E., Khrennikov A. *The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science*. London: Macmillan Publishers Ltd. 2017. 365 p. DOI: 10.1057/978-1-137-49276-0.
24. Суров И. А. Квантовая теория: методология и математика управления. *Труды XIII ВСПУ*. 2019;1589–1593. DOI: 10.25728/vspu.2019.1589.
25. Nottale L. Scale Relativity: A Fractal Matrix for Organization in Nature. Part 2. *Electronic Journal of Theoretical Physics*. 2007;4(16):187–274.
26. Nottale L., Auffray C. Scale Relativity Theory and Integrative Systems Biology: 2. Macroscopic Quantum-Type Mechanics. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 2008;97(1):115–157.
27. Head J. D., Zerner M. C. A Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno Optimization Procedure for Molecular Geometries. *Chemical Physics Letters*. 1985;122(3):264–270.
28. Gommers R., et al. *SciPy 1.9.0 Release Notes*. 2022. DOI: 10.5281/zenodo.6940349.
29. Суров И. А. Процессная семантика комплексных чисел. *Математические структуры и моделирование*. 2023;4:71–84. DOI: 10.24147/2222-8772.2023.4.71-84.
30. Кедрин В. С., Сальникова М. К. Прогнозирование нестационарных макроэкономических процессов с помощью методик сингулярного разложения и искусственного интеллекта. *Труды Братского государственного университета. Серия: Естественные и инженерные науки — развитию регионов*. 2007;2:38–41. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13362489>.
31. Ильин П. Л., Самойлова Т. А. Сингулярное разложение пространственных матриц. *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022;18(3):578–88. DOI: 10.25559/SITITO.18.202203.578-588.
32. Wang X., Gu L., Lee H., Zhang G. Quantum Context-Aware Recommendation Systems Based on Tensor Singular Value Decomposition. *Quantum Information Processing*. 2021;20(5):190. DOI: 10.1007/s11128-021-03131-y.
33. Lloyd S., Mohseni M., Rebentrost P. Quantum Principal Component Analysis. *Nature Physics*. 2014;10(9):631–633. DOI: 10.1038/NPHYS3029.
34. Rebentrost P. et al. Quantum Singular-Value Decomposition of Nonsparse Low-Rank Matrices. *Phys. Rev. A*. 2018;97(1):012327. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.012327.
35. Gilyén A., Su Y., Low G. H., Wiebe N. Quantum Singular Value Transformation and Beyond: Exponential Improvements for Quantum Matrix Arithmetics. *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. 2019:193–204. DOI: 10.1145/3313276.3316366.
36. Spall J., Guo X., Barrett T. D., Lvovsky A. I. Fully Reconfigurable Coherent Optical Vector-Matrix Multiplication. *Optics Letters*. 2020;45(20):5752. DOI: 10.1364/OL.401675.
37. Wang X., Song Z., Wang Y. Variational Quantum Singular Value Decomposition. *Quantum*. 2021;5:483. DOI: 10.22331/q-2021-06-29-483.
38. Jia Z., Yi B., Zhai R., Wu Y., Guo G., Guo G. Quantum Neural Network States: A Brief Review of Methods and Applications. *Adv Quantum Tech*. 2019;2(7–8):1800077. DOI: 10.1002/qute.201800077.
39. Ваулин Н. В. Регуляризация сверточной нейронной сети сингулярным разложением для обучения на малых выборках. *Интеллектуальные системы: Теория и приложения*. 2022;26(4):20–36.
40. Melnikov A., Kordzanganeh M., Alodjants A. P., Lee R. K. Quantum Machine Learning: from Physics to Software Engineering. *Advances in Physics X*. 2023;8(1). DOI: 10.1080/23746149.2023.2165452.