ОЦЕНКА ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РОСТА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН

Д. А. Пестов
Федеральное государственное автономное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4687-1800, ✍ dmitr-ey94@mail.ru

Аннотация: в работе исследована применимость численных методов на основе метода разрывных смещений к моделированию роста криволинейных трещин в условиях сложного нагружения или взаимодействия трещин. Исследовано влияние разрешения численного метода и точности аппроксимации коэффициентов интенсивности напряжений на точность прогнозирования траектории роста трещины. Рассмотрен метод, имеющий малую вычислительную сложность в предположениях линейной упругости среды, плоского деформированного состояния, а также при условиях квазистатического роста трещин. В качестве численного метода выбран метод разрывных смещений нулевого порядка точности и аппроксимация коэффициентов интенсивности напряжений через значения разрывов смещений в элементах, ближайших к кончику. Показана высокая точность определения коэффициентов интенсивности напряжений для случаев одиночной трещины. Для случая нескольких трещин получены оценки применимости метода: высокая точность аппроксимации коэффициентов интенсивности напряжений достигается при расстоянии между трещинами, превосходящем размер граничного элемента. Показано совпадение численно рассчитанной траектории роста с экспериментальной для образца из оргстекла. Показана слабая зависимость траектории трещины от размера граничного элемента, а также от величины приращения ее длины на каждом шаге при квазистатическом росте. Показана устойчивость траектории трещины к малым отклонениям при наличии перепада напряжений. На основе полученных результатов сделан вывод о границах применимости методов нулевого порядка к задачам о росте криволинейных трещин.

Ключевые слова: рост трещин, метод разрывных смещений, криволинейные трещины.

Благодарности: работа выполнена за счет субсидии, выделенной НИЦ «Курчатовский институт» – НИИСИ на выполнение государственного задания по теме № FNEF-2024-0002 «Математическое моделирование многомасштабных динамических процессов и системы виртуального окружения».

Для цитирования: Пестов Д. А. Оценка применимости метода разрывных смещений в задачах роста и взаимодействия криволинейных трещин. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):94–103.

Поступила в редакцию: 18.02.2025. *В окончательном варианте: 19.03.2025.*

APPLICABILITY OF THE DISPLACEMENT DISCONTINUITY METHOD TO CURVILINEAR CRACK GROWTH AND INTERACTION PROBLEMS

D. A. Pestov
Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4687-1800, ✍ dmitr-ey94@mail.ru

Abstract: we studied the applicability of numerical methods based on the discontinuous displacement method to the simulation of curvilinear crack growth and interaction under complex loads. We examined how the resolution of the numerical method and the accuracy of stress intensity factor approximation affect the accuracy of a predicted crack growth path. We considered a low computational complexity method under the assumptions of linear elasticity, plane-strain conditions, and quasi-static crack growth. We selected the zero-order accuracy discontinuous displacement method and approximated stress intensity factors using displacement discontinuity values in elements closest to the crack tip. We demonstrated high accuracy in determining stress intensity factors for single-crack cases. For multiple cracks, we obtained criteria of the method applicability: high accuracy in approximating stress intensity factors occurs when the distance between cracks exceeds the size of the boundary element. The numerically calculated growth trajectory coincided with the experimental one for a plexiglass sample under shear load. We observed a weak dependence of the crack trajectory on the boundary element size and the crack length increment at each step under quasi-static growth. We also showed that the crack trajectory remains stable under small deviations in the presence of stress gradients. Based on these results, we concluded the applicability limits of zero-order methods for modeling the growth and interaction of curvilinear cracks.

Keywords: displacement discontinuity method, crack growth, curvilinear cracks.

Acknowledgements: this is a part of the FNEF-2024-0002 Simulation of Multiscale Dynamic Processes and Virtual Environments government contract granted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre “Kurchatov Institute”.

Cite this article: Pestov D. A. Applicability of the Displacement Discontinuity Method to Curvilinear Crack Growth and Interaction Problems. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(1):94–103.

Original article submitted: 18.02.2025. *Revision submitted: 19.03.2025.*

Введение

Метод разрывных смещений представляет собой граничноэлементный метод для решения задач о телах, ослабленных наличием трещин. Данный метод широко применяется для решения статических задач с трещинами, а также для задач роста прямолинейных трещин, в частности, трещин гидроразрыва [1, 2]. При моделировании криволинейных растущих трещин использование метода разрывных смещений связано с несколькими проблемами, способными существенно влиять на точность решения. К таким проблемам относятся неточное определение коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности кончика трещины, неточное определение поля напряжений вблизи кончиков элемента, а также влияние величины приращения длины трещины (совпадающей в большинстве случаев с размером численного элемента) на итоговую траекторию роста. Для решения данных проблем требуется увеличение порядка точности используемых методов [3] и, соответственно, усложнение расчетов. Оценим влияние данных факторов на различные случаи роста и взаимодействия трещин.

Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о росте трещин в линейно упругой однородной среде в условиях плоской деформации. Будем предполагать, что раскрытие трещин мало по сравнению с их длинами, то есть трещины можно считать отрезками кривых, на которых поле перемещений терпит разрыв. В таком случае поле напряжений и перемещений можно описать с помощью уравнений равновесия и закона Гука, где G — модуль сдвига, а ν — коэффициент Пуассона:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0\end{gathered}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x}&=\frac{1}{2G}\left[(1-\nu)\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy}\right]\\ \frac{\partial u_y}{\partial y}&=\frac{1}{2G}\left[(1-\nu)\sigma_{yy}-\nu\sigma_{xx}\right].\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)&=\frac{1}{2G}\sigma_{xy}\end{aligned} \tag{2}$$

В общем случае граничные условия ставятся на берегах трещины и на бесконечности. Граничные условия на «бесконечности» или, согласно принципу Сен-Венана, на достаточном удалении от трещины представляют собой внешние напряжения, действующие на трещину. Это могут быть сжимающие напряжения в горной породе, растягивающие напряжения в образце под нагрузкой или иные нагрузки, приложенные на достаточном расстоянии от трещины. Далее предполагаем случай изначально однородного поля напряжений, определяемого следующими условиями, принимая сжимающие напряжения за положительные:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}|_\infty&=\sigma^0_{xx}\\ \sigma_{yy}|_\infty&=\sigma^0_{yy}.\\ \sigma_{xy}|_\infty&=\sigma^0_{xy}\end{aligned} \tag{3}$$

На берегах трещины ставится условие свободной поверхности или заданного давления, в случае если это, например, трещина гидроразрыва. Таким образом, для точек кривой C, представляющей собой трещину, ставятся условия на напряжения, нормальные и касательные к этой кривой в данной точке, где $p(s)$ — заданное распределение внутреннего давления вдоль трещины.

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}\big|_{(x,y)\in C} &= p(s) \\ \sigma_{ns}\big|_{(x,y)\in C} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Ввиду линейности задачи ее решение можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: первой, с граничными условиями на бесконечности при условии отсутствия трещины, и второй, где напряжения на бесконечности равны нулю, а условия (3), (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}\big|_{(x,y)\in C} &= p(s) - \sigma^0_{nn}(s) \\ \sigma_{ns}\big|_{(x,y)\in C} &= 0 - \sigma^0_{ns}(s) \quad . \\ \sigma\big|_{\infty} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь σ^0_{nn} и σ^0_{ns} получаются из $\sigma^0_{xx}, \sigma^0_{xy}, \sigma^0_{yy}$ путем поворота системы координат на угол $\theta(s)$. Такой подход обусловлен тем, что метод разрывных смещений предполагает напряжения на бесконечности равными нулю. Будем предполагать, что решение первой задачи известно и сконцентрируемся на второй. Далее мы будем рассматривать случай одноосного или двухосного растяжения на бесконечности, но основные рассуждения, изложенные в этой работе, могут быть применены и для случаев более сложных внешних напряжений, в том числе неоднородных.

Метод решения Для решения полученной задачи будем использовать численный метод разрывных смещений [4–8]. В данном методе трещина представляется в виде множества прямолинейных отрезков, на каждом из которых раскрытие и сдвиг берегов трещины предполагаются постоянными и обозначаются $D^i_n D^i_s$ соответственно. На рис. 1 изображена схема разбиения трещины на элементы.

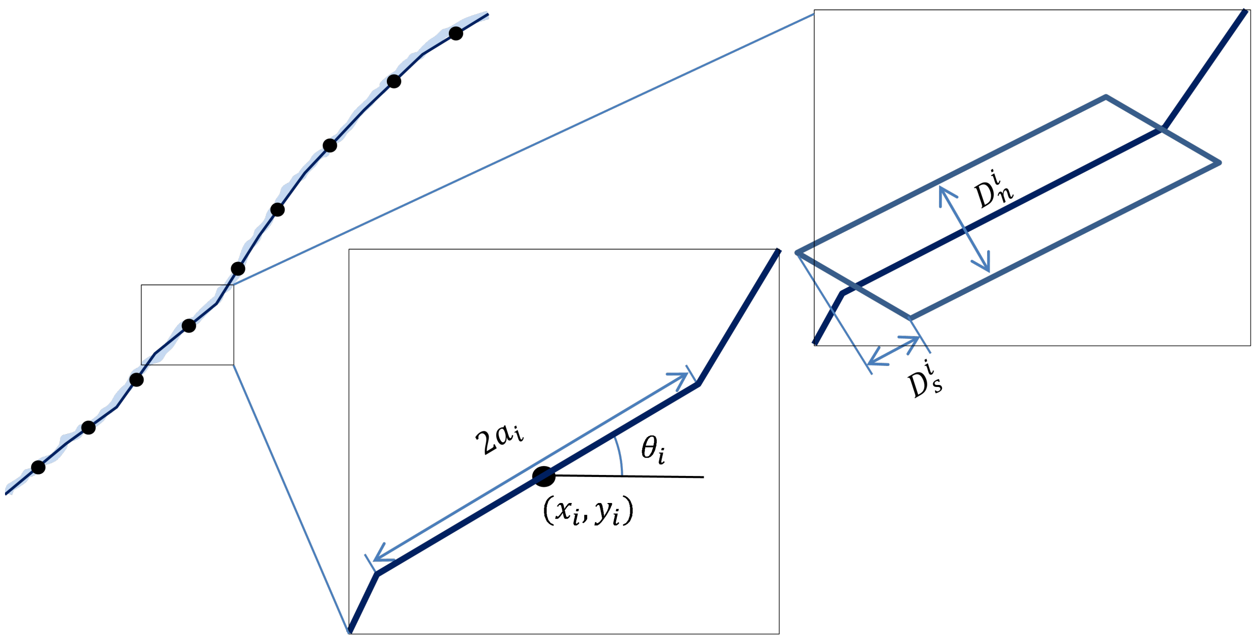


Рис. 1. *Схематичное разбиение трещины на элементы. $2a_i$ — длина элемента, θ_i — угол наклона от оси x, (x_i, y_i) — координаты центра элемента. D^i_n, D^i_s — нормальный и касательный разрывы смещений*

В таком случае поле напряжений, вызываемое отдельным элементом, описывается уравнениями (6), где A — известные функции, зависящие от размера элемента, его ориентации и расстояния до точки (x,y), являющимися точными решениями уравнений (1)–(2) для задачи об одиночном прямолинейном разрыве смещения.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,y) &= \sum_i A^n_{xx}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_n + A^s_{xx}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_s \\ \sigma_{xy}(x,y) &= \sum_i A^n_{xy}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_n + A^s_{xy}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_s \\ \sigma_{yy}(x,y) &= \sum_i A^n_{yy}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_n + A^s_{yy}(x,y,x_i,y_i,\theta_i,a_i)D^i_s\end{aligned} \tag{6}$$

Граничное условие (5) при использовании этого метода выполняется только в точках, соответствующих центрам элементов.

$$\begin{aligned}&\sigma_{nn}(x_i,y_i) = p_i - \sigma^0_{i\,nn} = \sigma^i_n \\ &\sigma_{ns}(x_i,y_i) = -\sigma^0_{i\,nn} = \sigma^i_s \quad . \\ &\sigma|_\infty = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Подстановка уравнений (6) в условия (7) дает нам систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных D_n и D_s, где A^{ij}_{nn}, A^{ij}_{ns}, A^{ij}_{ss} и A^{ij}_{sn} — это постоянные коэффициенты, зависящие от взаимного расположения элементов i,j.

$$\left.\begin{aligned}\sigma^j_n &= \sum_{i=1}^N A^{ij}_{nn}D^i_n + A^{ij}_{sn}D^i_s \\ \sigma^j_s &= \sum_{i=1}^N A^{ij}_{ns}D^i_n + A^{ij}_{ss}D^i_s\end{aligned}\right. , \qquad j = 1,...,N. \tag{8}$$

Решение системы (8) позволяет получить раскрытия трещин и сдвиги берегов D_n и D_s. Использование формул (6) позволяет при известных D_n и D_s определять напряжения в любой точке среды.

Недостатком данного метода является наличие сингулярных точек на концах каждого граничного элемента. В этих точках напряжения принимают бесконечные значения, а вблизи от этих точек напряжения вычисляются с погрешностью. С другой стороны, вне окрестности особых точек метод позволяет определять напряжения с высокой точностью даже при небольшом количестве граничных элементов.

Для решения задачи о росте трещин, помимо уравнений (8) и условий (7), нам потребуются также законы, описывающие рост трещин: его направление и скорость.

Для определения направления роста трещины применим метод наибольших растягивающих напряжений [9]. В нем, с использованием асимптотического разложения поля напряжений в окрестности кончика трещины [10] и предположения, что трещина распространяется в направлении, для которого кольцевые растягивающие напряжения будут наибольшими, получено явное выражение зависимости угла поворота трещины от коэффициентов интенсивности напряжений.

$$\theta = 2\,\mathrm{arctan}\left(\frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}}\right) \tag{9}$$

Распространение трещины будем предполагать квазистатическим, то есть на каждом шаге, в случае выполнения критерия разрушения, трещина увеличивается вдоль полученного направления на фиксированную длину Δs, равную размеру граничного элемента. Метод максимальных растягивающих напряжений предполагает силовой критерий распространения трещин для случая сложных нагружений, где K_I^C — трещиностойкость материала.

$$K_e q = \cos\frac{\theta}{2}\left[K_I \cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{II}\sin\theta\right] \geq K_{IC} \tag{10}$$

Следует отметить, что определение коэффициентов интенсивности напряжений само по себе является отдельной задачей, которая имеет аналитическое решение для отдельных конфигураций трещин, но в случае криволинейной трещины должна решаться численно. В данной работе воспользуемся приближенным решением [11].

$$K_I = 0.806\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}}D_n$$
$$K_{II} = 0.806\frac{G}{2(1-\nu)}\sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}}D_s \qquad (11)$$

Здесь D_n,D_s — это нормальный и касательный разрывы смещения ближайшего к кончику трещины элемента, Δs — его длина.

Уравнения (8)–(11) представляют собой метод моделирования растущих криволинейных трещин. Основными упрощениями, способными негативно влиять на точность расчета, являются:

• метод разрывных смещений нулевого порядка (8), где разрывы смещений предполагаются кусочно-постоянными функциями вдоль длины трещины, что дает погрешность измерения напряжений вблизи трещины;

• асимптотическое приближение коэффициентов интенсивности напряжений (11), дающее погрешность при уменьшении размера граничного элемента;

• предположение квазистатического роста, ввиду которого траектория трещины может зависеть от величины Δs — приращения длины на каждом шаге.

Для оценки точности рассматриваемого метода было проведено сравнение полученных с его помощью результатов с аналитическими и экспериментальными:

1. Плоская трещина под наклонной нагрузкой

На рис. 2 показана постановка задачи: растяжение образца с одиночной прямолинейной трещиной, ориентированной под углом к растягивающим нагрузкам [12].

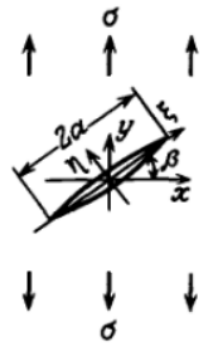


Рис. 2. *Растяжение образца с трещиной длины* $2a$*, находящейся под углом* β *к приложенным нагрузкам*

Данная задача имеет аналитическое решение для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_I^t = \sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\beta, K_{II}^t = \sigma\sqrt{\pi a}\cos\beta\sin\beta.$$

В таблице 1 представлены значения относительной погрешности $\Delta K_I = (K_I - K_I^t)/K_I^t$ и $\Delta K_{II} = (K_{II} - K_{II}^t)/K_{II}^t$ коэффициентов интенсивности напряжений K_I,K_{II}, полученных численно, к теоретическим значениям K_I^t и K_{II}^t. Для данной постановки значения ΔK_I оказались равны ΔK_{II}. Кроме того, эти значения оказались независимыми от угла β, поэтому в таблице приведена только зависимость от количества N элементов в разбиении трещины. Видим, что для одиночной прямолинейной трещины даже десяти элементов достаточно для обеспечения высокой точности определения коэффициентов интенсивности напряжений.

Следует также отметить, что повышение количества элементов свыше некоторого предела не увеличивает точность определения КИН. Это обусловлено тем, что повышение точности определения раскрытия трещины при уменьшении разрешения численного метода нивелируется уменьшением точности асимптотического приближения (11) при уменьшении размера граничного элемента.

Таблица 1

Значения относительной погрешности $\Delta K_I, \Delta K_{II}$ для различных значений количества элементов N

N	10	30	100	300	1000
$\Delta K_I, \Delta K_{II}$	0.23%	0.5%	0.89%	0.9%	1%

2. Две параллельные трещины, расположенные перпендикулярно растягивающим нагрузкам

На рис. 3 представлена постановка задачи [13]. В таблице 2 представлены отношения численного и теоретического значения коэффициентов интенсивности для различных значений отношения расстояния между трещинами к их длине.

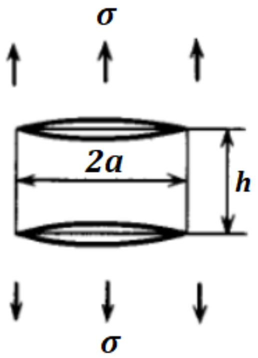


Рис. 3. *Две параллельные трещины длины $2a$ на расстоянии h друг от друга, под действием одноосного растяжения*

Таблица 2

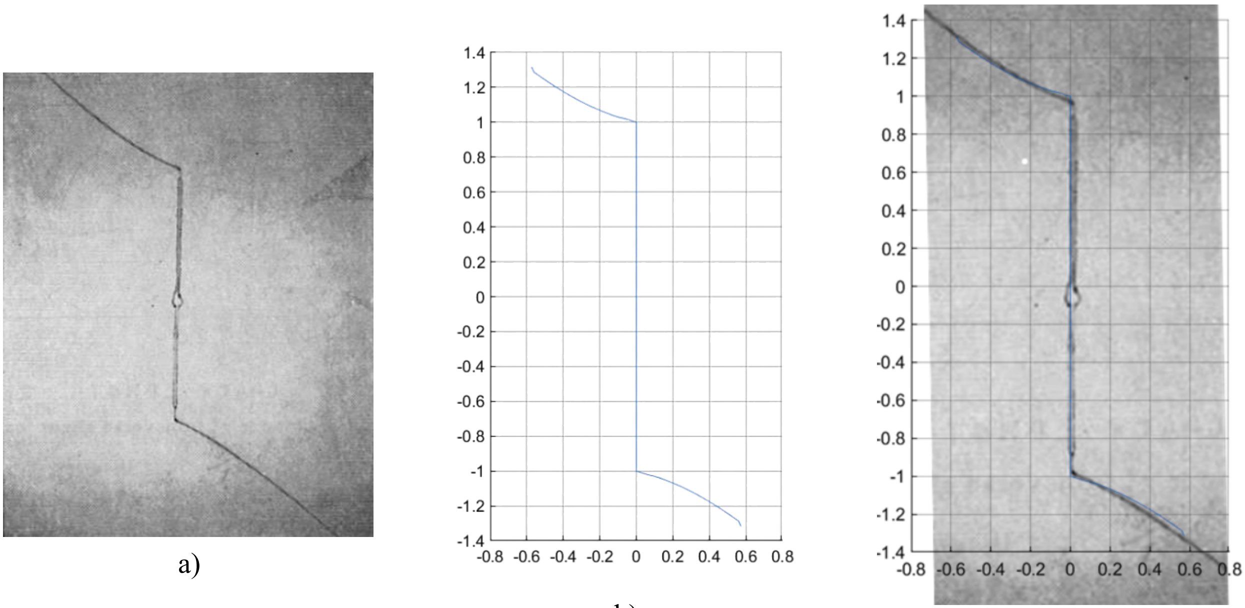
Значения ΔK_I при различных N и $2a/h$

ΔK_I				
2a/h	N=10	N=30	N=100	N=300
0.2	0.35%	0.57%	0.9%	0. 99%
0.4	0.78%	0.39%	0.95%	0. 92%
0.6	1.8%	0.28%	0.82%	0. 97%
0.8	1.8%	0.02%	0.67%	0. 81%
1.0	0.9%	1.2%	2.03%	2.2%
1.25	1.3%	1.3%	2.2%	2.5%
2	2.6%	1.2%	2.6%	3.3%
5	8.1%	0.11%	3%	4.2%
10	16%	2.2%	3.6%	5.3%
100	25%	41%	5%	8.1%

Результаты показывают, что в случае, если расстояние между трещинами превосходит размер элемента, то ошибка между численными и теоретическими значениями коэффициентов интенсивности напряжений не превосходит нескольких процентов. Существенное повышение ошибки происходит только для больших значений $2a/h$, что соответствует случаю очень близкого расположения трещин, где используемый метод неприменим. Также имеет место понижение точности определения КИН при увеличении N, как и для случая одиночной трещины.

3. Эксперимент: трещина, растущая под распределенными сдвиговыми нагрузками

На рис. 4(a) показана экспериментально полученная траектория роста изначально прямолинейной трещины в образце из оргстекла, к которой были приложены сдвиговые нагрузки [9]. На рис. 4(b) показана траектория роста трещины в той же постановке, полученная численно. Совмещение двух траекторий на рис. 4(c) показывает хорошее совпадение траектории трещины не только в начальный момент, что является показателем применимости критерия (9), но и при дальнейшем росте.



a) b) c)

Рис. 4. *Траектория трещины: a – экспериментальная, b – численная, c – наложение численной на экспериментальную*

Полученные результаты показывают, что данный метод дает хорошую точность для задач с одиночными, а также взаимодействующими и растущими трещинами. Ограничением применимости данного метода являются случаи, когда трещины находятся по отношению друг к другу на расстоянии меньшем, чем размер граничного элемента. В таком случае можно предполагать неточное определение как полей напряжений у кончиков, так и последующего направления роста.

Зависимость траектории трещины от размера граничных элементов

Помимо сравнения численно полученной траектории с экспериментальной, рассмотрим также зависимость траектории от размера элементов. Для этого рассмотрим рост горизонтально расположенной трещины начальной длины $l = 1$ под действием комбинации сдвиговых и растягивающих напряжений: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy}$. На рис. 5 показаны траектории роста трещины для различного размера граничных элементов. Точками на графике отмечены центры элементов. Значения N_0 обозначают начальное количество элементов, на которые разбита трещина.

Полученные результаты показывают отсутствие существенной зависимости траектории трещины от размера используемых элементов. Таким образом, мы можем считать, что в нашей постановке величина приращения длины на каждом шаге не оказывает существенного влияния на траекторию трещины.

Исследование траектории поворота трещины

Отсутствие зависимости траектории роста трещины от размера элемента может обозначать устойчивость траектории трещины к малым отклонениям. Помимо численных ошибок, такие отклонения могут обозначать дефекты в реальных материалах ввиду неоднородности среды или наличия микротрещин. Для проверки данного предположения проведем численный эксперимент.

Рассмотрим трещину, состоящую из трех прямолинейных участков. Первый участок длины l_0 расположен вдоль оси x с центром в начале координат. Два других длиной $l_1 = l_0/20$ расположены в концах первого участка под углом α к нему (рис. 6).

На рис. 7 представлены траектории роста трещин при различных значениях α для одноосного растяжения вдоль оси y. Отметим, что для углов $\alpha \leq 40°$ (сплошные линии на рис. 7) отклонение трещины от оси не увеличивается с первого же шага. Для углов $\alpha \leq 80°$ (пунктирные линии на рис. 7) отклонение трещины от оси по мере роста трещины становится меньше начального. Для

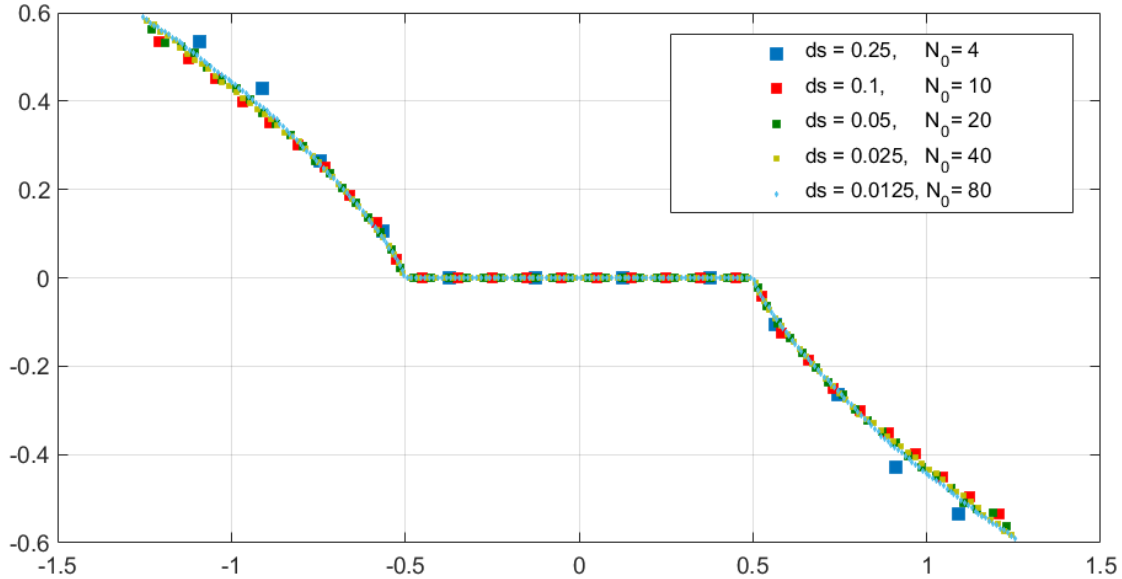


Рис. 5. *Траектория трещины при различных значениях длины ds граничного элемента. N_0 — начальное количество элементов в трещине*

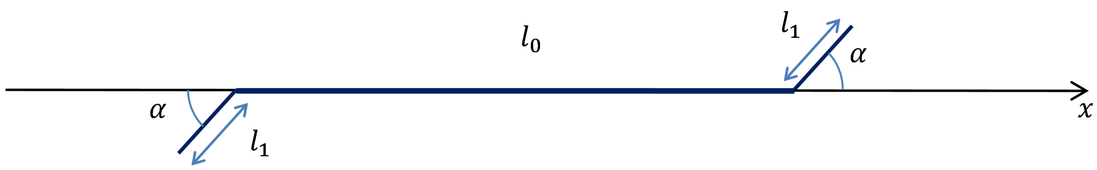


Рис. 6. *Начальная форма трещины с изломом*

$\alpha = 90°$ (штрихпунктирная линия) итоговое отклонение оказывается больше начального, но меньше максимального, достигаемого спустя несколько шагов роста.

На рис. 8 показаны траектории роста трещин в той же постановке для случая двухосного растяжения. В таких условиях направление роста трещины определяется только полем напряжений, вызванным самой трещиной. Полученные результаты показывают, что в этом случае отклонение траектории трещины от начального направления не ограничено. Это обусловлено тем, что в отсутствие перепада внешних напряжений трещина нормального отрыва стремится продолжать рост вдоль своей протяженности. В рассматриваемой постановке это направление можно получить, проведя прямую, соединяющую кончики трещины (штрихованная линия на рис. 8). Ввиду симметрии задачи данная прямая будет проходить через точку (0,0). В таком случае траекторию трещины нельзя считать устойчивой к отклонениям. Соответственно, результат вычисления может отличаться в зависимости от точности используемых методов.

Выводы

Рассмотрен метод на основе метода разрывных смещений с кусочно-постоянными разрывами смещений и коэффициентами интенсивности напряжений, вычисляемыми по значениям разрывов смещений в ближайшем к кончику элементе. Данный метод обеспечивает достаточно высокую точность для решения задач криволинейного роста трещин в случае, если расстояние между трещинами превосходит размер используемых разрывных элементов. Также данный метод обеспечивает точное определение траектории роста трещины, не зависящее существенно от размера используемых в разбиении трещины элементов, при условии, что рост трещины обусловлен не только формой трещины, но и внешними нагрузками. Показана устойчивость траектории трещины к малым отклонениям при наличии перепада напряжений, обеспечивающего наличие предпочитаемого направления роста. Данная устойчивость обеспечивает применимость методов невысокого порядка точности для определения траектории роста криволинейной трещины. С учетом данных факторов можно считать подобные методы применимыми в задачах, где рост трещины обусловлен внешними нагрузками, а также в задачах взаимодействия трещин, при условии, что расстояние между этими трещинами достаточно велико.

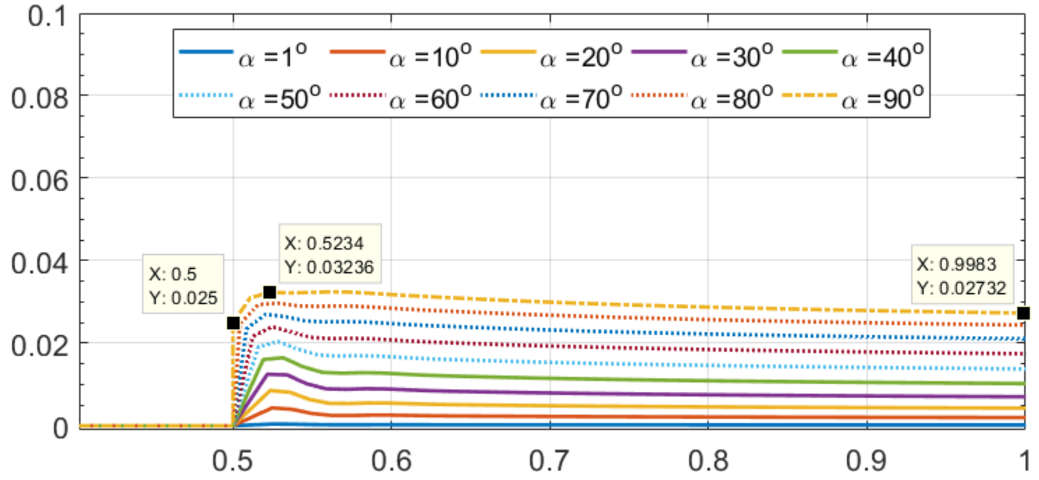


Рис. 7. *Траектории роста трещины при различных углах начального излома в случае одноосного растяжения*

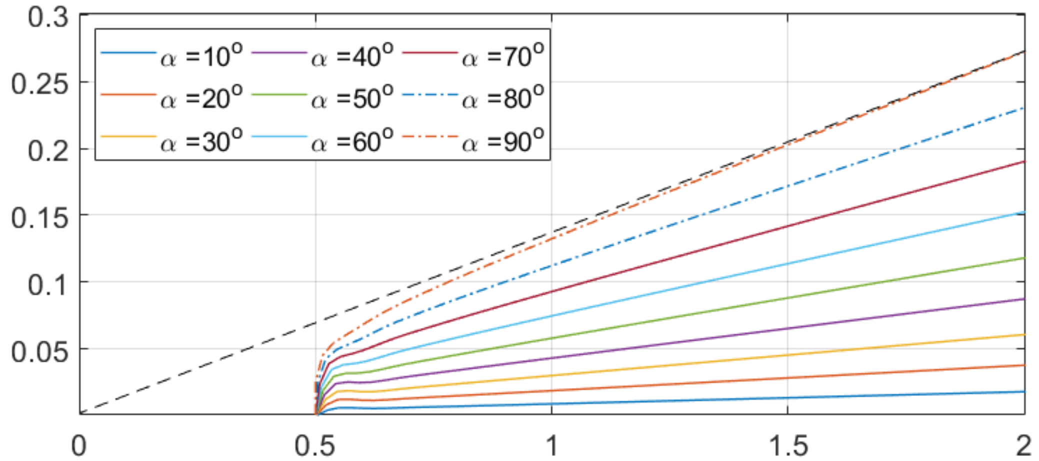


Рис. 8. *Траектории роста трещины при различных углах начального излома в случае двухосного растяжения*

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. *Методы моделирования зарождения и распространения трещин*. Новосибирск: Изд-во СО РАН; 2016. 312 с.
2. Akulich A. V., Zvyagin A. V., Pestov D. A., Tyurenkova V. V., Li K. Interaction of a Static Hydraulic Fracture under the Constant Pressure of a Fluid with a Natural Fault. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019;11(2):209–218. DOI: 10.1134/S2070048219020029.
3. Zvyagin A. V., Udalov A. S. A Displacement Discontinuity Method of High-Order Accuracy in Fracture Mechanics. *Moscow University Mechanics Bulletin.* 2020;75(6):153–159. DOI: 10.3103/s0027133020060060.
4. Crouch S. L. Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method. I. Infinite Body Solution. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* 1976;10(2):301–343. DOI: 10.1002/nme.1620100206.
5. Zvyagin A. V., Udalov A. S., Shamina A. A. Boundary Element Method for Investigating Large Systems of Cracks Using the Williams Asymptotic Series. *Acta Astronautica*. 2022;194:480–487. DOI: 10.1016/j.actaastro.2021.11.024.

6. Shamina A. A., Zvyagin A. V., Smirnov N. N. et al. Computational Modeling of Cracks Different Forms in Three-Dimensional Space. *Acta Astronautica*. 2021;186(7):289–302. DOI: 10.1016/j.actaastro.2021.05.041.
7. Li K., Smirnov N. N., Qi C., Kiselev A. B., Pestov D. A. The Numerical Asymptotic Solution to Initial Condition Problem of Preexisting Plane-Strain Hydraulic Fracture with Fluid Lag. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020;239:107296. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107296.
8. Smirnov N. N., Li K., Skryleva E. I., Pestov D. A., Shamina A. A., Qi C., Kiselev A. B. Mathematical Modeling of Hydraulic Fracture Formation and Cleaning Processes. *Energies, MDPI*. 2022;15(6):1967. DOI: 10.3390/en15061967.
9. Erdogan F., Sih G. C. On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*. 1963;85(4):519–525. DOI: 10.1115/1.3656899.
10. Williams M. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1957;24:109–111.
11. Olson J. Fracture Aperture, Length and Pattern Geometry Development under Biaxial: A Numerical Study with Applications to Natural, Cross-Jointed Systems. *Geological Society, London, Special Publications*. 2007;289:123–142. DOI: 10.1144/SP289.8.
12. Westergaard H. Bearing Pressures and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1939;6:49-53.
13. Kamei A., Yokobori T. Some Results on the Stress Intensity Factors of Cracks and/or Slip Bands System. *Reports of the Research Institute for Strength and Frac. Mater*. 1974;10(2):29–93.