О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И СЛОЖЕНИЯ

А. Д. Смородинов
Сургутский филиал федерального государственного автономного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация
Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9324-1844, ✍ smorodinov.alexsandr@yandex.ru

Аннотация: в статье представлена теорема о возможности представления n-мерного потенциального поля в виде суперпозиции функций одной переменной и сложения. Формулируется теорема о сходимости искусственной нейронной сети для математического моделирования динамики частиц примеси в несжимаемой жидкости в поле скоростей, являющемся точным решением уравнения Эйлера.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, теорема о сходимости, математическое моделирование, уравнение Эйлера.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» ─ НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Для цитирования: Смородинов А. Д. О представлении кулоновского потенциала в виде суперпозиции функций одной переменной и сложения. *Успехи кибернетики*. 2025;6(3):123–126.

Поступила в редакцию: 17.08.2025. *В окончательном варианте: 22.09.2025.*

REPRESENTATION OF THE COULOMB POTENTIAL AS A SUPERPOSITION OF FUNCTIONS OF ONE VARIABLE AND ADDITION

A. D. Smorodinov
Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation
Surgut State University, Surgut, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9324-1844, ✍ smorodinov.alexsandr@yandex.ru

Abstract: we presented a theorem demonstrating that an n-dimensional potential field can be expressed as a superposition of single-variable functions with addition. We formulated a convergence theorem for an artificial neural network applied to the simulation of impurity particle dynamics in an incompressible fluid under a velocity field that constitutes an exact solution of the Euler equation.

Keywords: artificial neural networks, convergence theorem, simulation, Euler equation.

Acknowledgements: this study is a part of the FNEF-2024-0001 government order contracted to the Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", project No. 1023032100070-3-1.2.1 Development and Implementation of Trusted Artificial Intelligence Systems Based on new Mathematical Methods and Algorithms, Fast Computing Models for Domestic Computing Systems.

Cite this article: Smorodinov A. D. Representation of the Coulomb Potential as a Superposition of Functions of One Variable and Addition. *Russian Journal of Cybernetics*. 2025;6(3):123–126.

Original article submitted: 17.08.2025. *Revision submitted: 22.09.2025.*

В работе [1] исследовался вопрос о возможности реконструкции местоположения точечных источников потенциального поля кулоновского потенциала. В рамках исследования была разработана искусственная нейронная сеть гидродинамики, которая в точности повторяла потенциальное поле кулоновского потенциала вида (1):

$$\vec{V}\left(\vec{x}\right) = \nabla\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{q_i}{\left\|\vec{x} - M_i\right\|}\right) \tag{1}$$

являющееся точным решением уравнения Эйлера, где q_i — мощность i-источника, а $M_i(x_i^1,x_i^2,x_i^3)$ — местоположение i-источника. В рамках разработки ИНС было показано, что потенциальное поле (1) может быть представлено в виде суперпозиции функций одной переменной и сложения в виде (2):

$$V_i\left(x_1,x_2,x_3\right)=-\sum_{k=1}^{K}\left[q_k\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_2\left(x_j-M_k^j\right)\right\}+G\left(x_i-M_k^i\right)\right)}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_2\left(x_j-M_k^j\right)\right\}\right)+G_2\left(G(x_i-M_k^i)\right)}{2}\right],\quad (2)$$

где

$$G_2\left(x\right)=x^2 \quad (3)$$

$$G_{-\frac{3}{2}}(x)=x^{-\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$G\left(x\right)=x \quad (5)$$

В данной работе покажем, что полученный результат может быть расширен на n-мерные потенциальные поля:

$$\hat{V}\left(\hat{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right)=\nabla\left(\sum_{i=1}^{K}\frac{q_i}{\hat{x}-M_i}\right). \quad (6)$$

Для представления в виде суперпозиции функций одной переменной и сложения необходимо использовать функции одной переменной (3), (4), (5) и раскрыть оператор набла, получаем следующую суперпозицию:

$$V_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=-\sum_{k=1}^{K}\left[q_k\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{n}G_2\left(x_j-M_k^j\right)\right\}+G\left(x_i-M_k^i\right)\right)}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{n}G_2\left(x_j-M_k^j\right)\right\}\right)+G_2\left(G(x_i-M_k^i)\right)}{2}\right],\quad (7)$$

где G_2, G, $G_{-\frac{3}{2}}$ — функции одной переменной (3), (4), (5).

На основании вышеизложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Суперпозиция n-мерных потенциальных полей вида (6) представима в виде суперпозиции функции одной переменной и сложения вида (7).

Замечание 1. Доказательство данной теоремы на случай трех переменных было представлено в работе [1], при конструировании ИНС, для размерности n доказательство получается прямым вычислением производных.

В работе [1] было показано, что метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности, используемый для математического моделирования динамики частиц примеси в поле скоростей (1), может быть представлен в виде искусственной нейронной сети и реализован с помощью классических библиотек для конструирования ИНС. В данной работе покажем, что для разработанной ИНС справедлива теорема о сходимости. Для этого вначале представим ИНС, записанную в виде математического выражения:

$$\overrightarrow{x}_{n+1}=\overrightarrow{x}_n+\frac{1}{6}h\left(\overrightarrow{k}_1^n+2\overrightarrow{k}_2^n+2\overrightarrow{k}_3^n+\overrightarrow{k}_4^n\right) \quad (8)$$

$$k_{1,i}^n=-\sum_{k=1}^{K}\left[q_k\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_2\left(x_j^n-M_k^j\right)\right\}+G\left(x_i^n-M_k^i\right)\right)}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3}G_2\left(x_j^n-M_k^j\right)\right\}\right)+G_2\left(G(x_i^n-M_k^i)\right)}{2}\right] \quad (9)$$

$$k_{2,i}^n = -\sum_{k=1}^{K}\left[q_k \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + \frac{h}{2}k_{1,j}^n) - M_k^j\right)\right\} + G\left((x_i^n + \frac{h}{2}k_{1,i}^n) - M_k^i\right)\right)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + \frac{h}{2}k_{1,j}^n) - M_k^j\right)\right\}\right) + G_2\left(G((x_i^n + \frac{h}{2}k_{1,i}^n) - M_k^i)\right)}{2}\right] \quad (10)$$

$$k_{3,i}^n = -\sum_{k=1}^{K}\left[q_k \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + \frac{h}{2}k_{2,j}^n) - M_k^j\right)\right\} + G\left((x_i^n + \frac{h}{2}k_{2,i}^n) - M_k^i\right)\right)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + \frac{h}{2}k_{2,j}^n) - M_k^j\right)\right\}\right) + G_2\left(G((x_i^n + \frac{h}{2}k_{2,i}^n) - M_k^i)\right)}{2}\right] \quad (11)$$

$$k_{4,i}^n = -\sum_{k=1}^{K}\left[q_k \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + hk_{3,j}^n) - M_k^j\right)\right\} + G\left((x_i^n + hk_{3,i}^n) - M_k^i\right)\right)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{G_2\left(G_{-\frac{3}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{3} G_2\left((x_j^n + hk_{3,j}^n) - M_k^j\right)\right\}\right) + G_2\left(G((x_i^n + hk_{3,i}^n) - M_k^i)\right)}{2}\right], \quad (12)$$

где h — шаг по времени, с которым проводится математическое моделирование, $\vec{x}_0$ — местоположение примеси в начальный момент времени. Индексы у k означают следующее: n — номер итерации, i — компонента поля скорости (1, 2, 3), индексы 1, 2, 3, 4 означают этап вычисления.

Проведем ряд вычислительных экспериментов по математическому моделированию динамики частиц примеси в поле (1), точная постановка задачи представлена в работе [1]. Тестирование алгоритма проводилось следующим образом: рассчитывалась динамика частиц примеси с использованием программного комплекса [2], подробно описанного в [3], и динамика частиц примеси с использованием ИНС, реализованной на основе вычислительного алгоритма (8)–(12) в течение одного и того же шага по времени, количества шагов, а также для частиц с одинаковыми начальным местоположением примеси. После чего вычислялось евклидово расстояние между частицами в конечный момент моделирования, одна частица рассчитывалась с помощью программного комплекса [1], вторая — с использованием ИНС, и находилось максимальное уклонение двух методов.

Приведем сравнительную таблицу для разного количества шагов по времени, для одного источника мощностью 2 с местоположением (0.75; 0.33; -0.65) (данное местоположение было выбрано случайным образом) и 1000 частиц, заполняющих единичный трехмерный куб с центром в начале координат.

Таблица

Сравнительная таблица уклонения двух способов реализации метода Рунге–Кутты при разном количестве шагов по времени

	10 шагов по времени	100 шагов по времени	1000 шагов по времени	2000 шагов по времени	5000 шагов по времени
Шаг по времени 0.1	8.15e-06	7.5e-06	1.27e-05	2.47e-05	3.78e-05
Шаг по времени 0.01	6.07e-07	1.5e-06	7.95e-06	1.22e-05	1.6e-05
Шаг по времени 0.001	2.457e-07	9.9e-07	4.52e-06	6.15e-06	2.92e-05
Шаг по времени 0.0001	3.99e-07	2.86e-06	2.14e-05	3.68e-05	8.10e-05

Теорема 2. Вычислительный алгоритм, основанный на применении построенной искусственной нейронной сети, основанной на формулах (8)–(12), является сходящимся в метрике пространства непрерывных функций с точностью $O(t^5)$ на одном шаге и суммарной ошибкой на конечном интервале порядка $O(t^4)$, где t — шаг по времени.

Замечание 2. Теорема 2 подтверждается реализацией и тестированием алгоритма ИНС на следующей вычислительной технике:

1) ЭВМ на базе процессора AMD Ryzen Threadripper 2990WX 32-Core-Processor, 32 ГБ оперативной памяти с частотой 2 400 МГц под управлением ОС Debian, GPU Titan V, 12 GB;
2) ЭВМ на базе двух процессоров Intel(R) Xeon(R) Silver 4214R CPU @ 2.40GHz, 256 ГБ оперативной памяти под управлением ОС Debian, GPU Tesla T4;
3) ноутбук на базе AMD Ryzen 5 4600H, 16 ГБ оперативной памяти, и GPU Nvidia GTX 1650, 4 GB,

а также проведенными вычислительными экспериментами, результаты которых представлены в таблице.

Замечание 3. Стоит отметить также, что при использовании CPU и указанных в замечании 2 GPU необходимая точность достигается всегда. При использовании видеокарт нового поколения, например NVIDIA RTX A5000, для воспроизводимости результатов необходимо указать режим работы ИНС tf.config.experimental.enable_op_determinism(). (Данная функция устанавливает детерминированный режим работы, т.е. гарантирует, что одни и те же вычисления при одинаковых входных данных будут давать побитово идентичные результаты между запусками даже на разном оборудовании. Данная функция является экспериментальной и не гарантирует стопроцентную детерминированность.) На видеокартах Nvidia RTX 40** поколения (в частности, 4070) условие теоремы не выполняется ввиду аппаратных особенностей GPU.

Представленные в работе теоремы показывают возможность создания искусственных нейронных сетей, для математического моделирования динамики частиц примеси в несжимаемой жидкости в поле скоростей, являющемся точным решением уравнения Эйлера, с точностью, сопоставимой с классическими методами моделирования. В дальнейшем разработанную ИНС возможно применять для поиска характеристик поля скоростей (1), таких как мощность источника q и местоположение источника M, на основе информации о динамике частиц примеси с использованием классических методов обучения ИНС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смородинов А. Д. О восстановлении кулоновского поля потенциальных течений на основе искусственных нейронных сетей. *Успехи кибернетики*. 2025;6(1):137–149. EDN: ICNWWT.
2. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ* № 2024689709, Российская Федерация. Программный комплекс для решения задачи Коши с различными конфигурациями полей начальных данных и визуализации результатов математического моделирования течения тяжелой примеси : № 2024689305 : заявл. 14.11.2024 : опубл. 10.12.2024 / А. Д. Смородинов, Т. В. Гавриленко, А. О. Дубовик, Д. А. Моргун. EDN: XBPJPY.
3. Смородинов А. Д., Гавриленко Т. В., Дубовик А. О., Моргун Д. А. Реализация программного обеспечения для решения задачи Коши с различными конфигурациями полей начальных данных и визуализации результатов математического моделирования течения тяжелой примеси. *Успехи кибернетики*. 2024;5(2):35–45. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-04. EDN: HQUBJQ.