

DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-1

**ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ СЖАТИИ ИДЕАЛЬНОГО БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ГАЗА В
ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ****Д. А. Быковских¹, В. А. Галкин²**¹ Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5796-3786>, dmitriy.bykovskih@gmail.com² Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, г. Сургут, Российская Федерация
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru

Аннотация: в статье рассматривается задача об адиабатическом сжатии бесстолкновительного газа с подвижной и неподвижной границами в одномерном пространстве. Для этой задачи получен класс точных решений. Идея нахождения класса точных решений заключается в определении плотности распределения молекул в пространстве координат и скоростей с течением времени. Поскольку пространство скоростей дискретное, то для вычисления макроскопических величин необходимо суммировать плотность распределения частиц по скоростям. Представлены результаты сравнения численного исследования методом Монте-Карло и аналитического решения задачи при различном числе частиц и скоростях движения стенки. Выполнена оценка погрешностей результатов. Полученный класс аналитического решения можно использовать для верификации комплексов программ.

Ключевые слова: адиабатическое сжатие газа, математическое моделирование, газодинамика, метод Монте-Карло.

Благодарности: работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 18-01-00343, 18-47-860004.

Для цитирования: Быковских Д. А., Галкин В. А. Об адиабатическом сжатии идеального бесстолкновительного газа в одномерном пространстве. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):6–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-1.

ADIABATIC COMPRESSION OF IDEAL COLLISIONLESS GAS IN ONE-DIMENSIONAL SPACE**Dmitry A. Bykovskikh¹, Valery A. Galkin²**¹ Surgut State University, Surgut, Russian FederationORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5796-3786>, dmitriy.bykovskih@gmail.com² Surgut Site, Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Surgut, Russian Federation ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9721-4026>, val-gal@yandex.ru

Abstract: the study focuses on adiabatic compression of collisionless gas with moving and fixed boundaries in one-dimensional space. A class of exact solutions is found. The key concept for finding these exact solutions is the determination of the molecule distribution density in the coordinate and velocity spaces over time. Since the velocity space is discrete, the particle velocity distribution density is integrated over the velocities to obtain the macroscopic gas properties. The analytical solution and numerical Monte Carlo solution results are compared for different particle numbers and boundary velocities, and the errors are performed. The class of exact solutions can be used for software verification.

Keywords: adiabatic gas compression, simulation, gas dynamics, the Monte Carlo method.

Acknowledgements: this study is supported by RFBR grants 18-01-00343, 18-47-860004.

Cite this article: Bykovskikh D. A., Galkin V. A. Adiabatic Compression of Ideal Collisionless Gas in One-Dimensional Space. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(4):6–12. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-1.

Введение

Исследование динамических систем с изменяющейся во времени областью (например, областью, имеющей подвижные границы) является актуальной задачей в современных разделах естествознания. Например, исследование течения сильно разреженного газа, в котором можно пренебречь размерами частиц и их столкновениями друг с другом, в области с подвижными границами может быть

связанно с освоением околокосмического пространства и созданием специальных вакуумных установок [1, 2]. Выявление специфических особенностей при исследовании течения газа Кнудсена в замкнутой области может осложняться тем, что частицы газа могут многократно отражаться от движущейся поверхности. Исследуемые течения газа в таком классе задач являются нестационарными.

Изучаемая в этой статье модель адиабатического сжатия газа может относиться к явлению параметрической неустойчивости, при котором нарастание энергии возмущения сопровождается непрерывным сжатием газа с течением времени в пространстве. Такая неустойчивость может рассматриваться как распространение бегущих волн в изменяющейся во времени области [3–5]. Другое применение подобной модели связано с исследованием космических лучей высокой энергии, взаимодействующих с движущимися магнитными облаками в космическом пространстве [6]. В такой модели, называемой моделью ускорения Ферми, подробно изучаются механизмы неограниченного роста скорости частиц, взаимодействующих с движущейся по периодическому закону границей.

Представленная в статье модель является продолжением работы [7].

Постановка задачи

Рассматривается задача об адиабатическом сжатии идеального бесстолкновительного газа в одномерном пространстве.

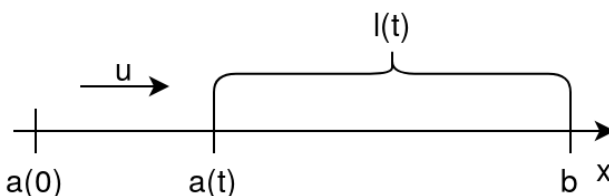


Рис. 1. Схема изменения местоположения границ с течением времени t

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ на интервале (a_0, b_0) равномерно распределены частицы. Их плотность внутри интервала равна $\rho_0 = \text{const}$. Скорость каждой частицы $|v_0| = \text{const}$, а направление (т.е. знак скорости) определяется случайным образом с равномерным распределением.

Пусть на концах отрезка $[a_0, b_0]$ расположены границы (см. рис. 1). Правая граница неподвижна, и ее положение определяется уравнением $b = b_0$. Левая граница движется с постоянной скоростью $u \in (0, v_0]$, уменьшая размер одномерной области $l(t) = b - a(t)$. Ее местоположение определяется уравнением $a(t) = a_0 + ut$.

Частицы не взаимодействуют между собой, но взаимодействуют с границами по закону зеркального отражения.

Построение аналитического решения

Пусть частицы условно разбиваются на группы в зависимости от направления движения. Первая группа частиц имеет скорость $v^{\{1\}} = v_0$ и плотность распределения молекул $f^{\{1\}}$, а вторая — скорость $v^{\{2\}} = -v_0$ и плотность распределения $f^{\{2\}}$ [8]:

$$f^{\{1\}}(0, x) = f^{\{2\}}(0, x) = 0.5\rho_0 I_{(a(0), b)}(x)/l(0), \quad (1)$$

где $I_{(a(0), b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a(0), b) \\ 0, & x \notin (a(0), b) \end{cases}$ — ступенчатая функция.

Двигаясь в ограниченном пространстве, частицы время от времени будут взаимодействовать с границами в зависимости от их начальных условий. Переход частицы из текущей группы в следующую группу осуществляется после каждого взаимодействия с границей. Формула для вычисления $v^{\{s\}}$ скорости s -й группы частиц с учетом описанных условий запишется в виде:

$$v^{\{s\}} = \begin{cases} -v^{\{s-1\}}, & s - \text{четный} \\ -v^{\{s-1\}} + 2u, & s - \text{нечетный} \end{cases}. \quad (2)$$

С увеличением времени число групп будет расти, в предельном случае, когда граница — подвижная стенка — достигнет неподвижной при $(t \rightarrow [b - a(0)]/u)$, число групп будет стремиться

к бесконечности ($n \rightarrow \infty$). Поскольку частицы одной группы движутся в одном направлении, для каждой группы можно определить моменты времени возникновения первых и последних частиц, обозначенные как $t^{\{s\}}$ и $t^{\{s\}}$ соответственно, по одной и той же формуле (3), где вместо $t^{\{s\}}$ следует подставить $t^{\{s\}}$.

$$t^{\{s\}} = t^{\{s-1\}} + l(t^{\{s-1\}})/v^{\{s\}}, \quad (3)$$

$$\text{где } v^{\{s\}} = \begin{cases} -v^{\{s\}} + u, & s - \text{четный} \\ v^{\{s\}}, & s - \text{нечетный} \end{cases}.$$

Плотность распределения для s -й группы молекул с течением времени определяется

$$f^{\{s\}}(t, x) = 0.5\rho_0 Q^{\{s\}}(t, x), \quad (4)$$

где

$$Q^{\{s\}}(t, x) = I_{(a^{\{s\}}(t), b^{\{s\}}(t))}(t, x)/l(0);$$

$$I_{(a^{\{s\}}(t), b^{\{s\}}(t))}(t, x) = \begin{cases} 1, & x \in (a^{\{s\}}(t), b^{\{s\}}(t)) \\ 0, & x \notin (a^{\{s\}}(t), b^{\{s\}}(t)) \end{cases};$$

$$a^{\{s\}}(t) = s \pmod{2} [I_{[t^{\{s-1\}}, t^{\{s-1\}}]}(t) \cdot a(t) + I_{(t^{\{s-1\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot (a(t^{\{s-1\}}) + (t - t^{\{s-1\}})v^{\{s\}})] + \\ + (s+1) \pmod{2} [I_{[t^{\{s-1\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot (b + (t - t^{\{s-1\}})v^{\{s\}}) + I_{(t^{\{s\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot a(t)];$$

$$b^{\{s\}}(t) = s \pmod{2} [I_{[t^{\{s-1\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot (a(t^{\{s-1\}}) + (t - t^{\{s-1\}})v^{\{s\}}) + I_{(t^{\{s\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot b] + \\ + (s+1) \pmod{2} [I_{[t^{\{s-1\}}, t^{\{s-1\}}]}(t) \cdot b + I_{(t^{\{s-1\}}, t^{\{s\}}]}(t) \cdot (b + (t - t^{\{s-1\}})v^{\{s\}})].$$

Следует упомянуть, что поскольку при $t = 0$ происходит условное разбиение частиц на две группы в зависимости от направления движения, расчеты всех параметров и величин по формулам (2)–(4) следует проводить для каждой группы отдельно. Для двух групп не существует предыдущего значения ($s-1$), и следует отбросить промежуток времени $[t^{\{s-1\}}, t^{\{s-1\}}]$, при этом $t^{\{s-1\}} = t^{\{s\}} = 0$.

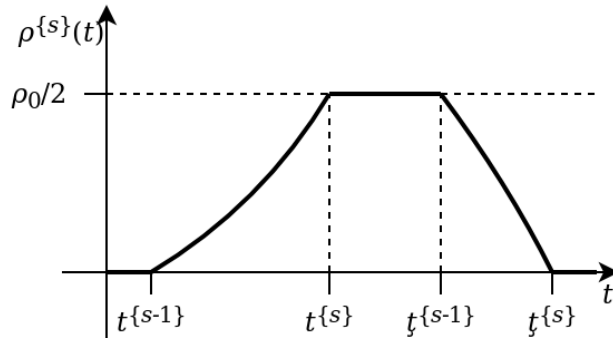


Рис. 2. Схема изменения средней плотности $\rho^{\{s\}}(t)$ для s -й группы частиц в зависимости от времени t

Вышеописанные рассуждения справедливы в силу следующих утверждений. Полученное решение основано на уравнении Лиувилля (5). Это решение существует и единственно в силу теоремы Лиувилля об инвариантности отображения фазового пространства при любом t в случае, когда силы известны, а неопределенность содержится только в начальных данных, например, в виде закона распределения [9]. Также теорема Лиувилля о сохранении объема в фазовом пространстве остается справедливой и для мгновенных взаимодействий, в частности, когда предполагается, что частица газа упруго отражается от жесткой стенки.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Изменение средней плотности $\rho^{\{s\}}(t)$ для s -й группы частиц на отрезке $[a(t), b]$ с течением времени t определяется формулой (6) и схематично представлено на рис. 2. На полуинтервале $[t^{\{s-1\}}, t^{\{s\}})$ количество частиц увеличивается, а на $[t^{\{s\}}, t^{\{s-1\}})$ их число уменьшается. На временном полуинтервале $[t^{\{s\}}, t^{\{s-1\}})$ величина $\rho^{\{s\}}(t)$ постоянна и равна начальной плотности $\rho_0/2$. Такая схема является верной для s -й группы в случае, когда $t^{\{s\}} \leq t^{\{s-1\}}$, поскольку

$$\rho^{\{s\}}(t) = \frac{1}{l(t)} \int_{R_1} f^{\{s\}}(t, x) dx. \quad (6)$$

С помощью плотности распределения частиц $f^{\{s\}}$ и скоростей $v^{\{s\}}$ вычисляются остальные макроскопические параметры модели по известным формулам из [9], в которых интегралы заменяются конечными суммами [10]:

$$\rho(t, x) = \sum_{s=1}^n f^{\{s\}}(t, x), \quad (7)$$

$$\bar{v}_1(t, x) = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^n v^{\{s\}} f^{\{s\}}(t, x), \quad (8)$$

$$e(t, x) = \frac{1}{2\rho(t, x)} \sum_{s=1}^n (v^{\{s\}} - \bar{v}_1(t, x))^2 f^{\{s\}}(t, x), \quad (9)$$

$$T(t, x) = \frac{2}{3R} e(t, x), \quad (10)$$

$$p(t, x) = \frac{2}{3} \rho(t, x) e(t, x). \quad (11)$$

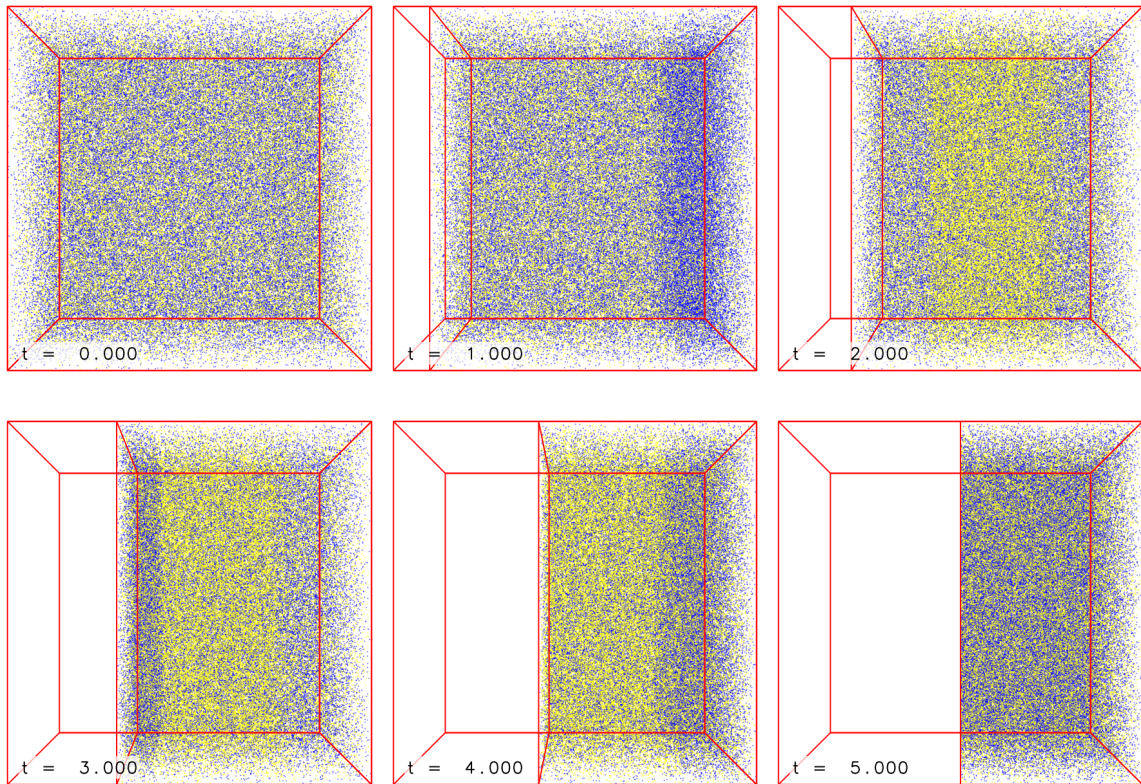


Рис. 3. Распределение частиц ($N = 2^{17} = 131072$) в пространстве в различные моменты времени t при $u = 0.1$

Моделирование и анализ результатов

Были проведены серии вычислительных экспериментов при $\rho_0 = 1$, $v_0 = 1$, $[a_0, b_0] = [-0.5, 0.5]$, различном числе частиц N и скоростях границы $u = \{1.0, 0.1\}$.

На рис. 3 представлена визуализация процесса. Синим цветом выделены частицы, которые движутся справа налево, желтым — в противоположном направлении. Красным цветом выделены границы.

На рис. 4 представлены графики изменений статистических оценок макроскопических величин при $u = \{1.0, 0.1\}$. Графики плотностей содержат средние плотности s -х групп частиц в зависимости от времени, что соответствует схеме, изображенной на рис. 2. Из остальных графиков видно, что с увеличением числа частиц численное решение приближается к аналитическому с ростом частиц N в эксперименте. Для качественного совпадения аналитического и численного решения достаточно $N = 10^4$ частиц. Для большей наглядности при построении графиков температур использовалась логарифмическая шкала, поскольку начальные и конечные значения величин различаются на порядок. Следует отметить тот факт, что точное решение содержит осцилляции, частота которых увеличивается при уменьшении скорости движущейся стенки u . Это объясняется инерцией потока газа при взаимодействии с границами, одна из которых движется с постоянной скоростью u . Также можно качественно оценить совпадения графика компоненты скорости v_1 (см. рис. 4) с общим количеством частиц (см. рис. 3), направление которых выделено определенным цветом, в моменты времени t .

Таблица 1

Оценка максимальной абсолютной погрешности при различном числе частиц N и скоростях границы u

u	N	Δ_{v_1}	Δ_T	Δ_p
1.0	10^2	$4.10 \cdot 10^{-1}$	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$4.98 \cdot 10^{-1}$
	10^4	$6.54 \cdot 10^{-2}$	$2.90 \cdot 10^{-3}$	$4.78 \cdot 10^{-2}$
	10^6	$3.80 \cdot 10^{-3}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$2.92 \cdot 10^{-3}$
0.1	10^2	$4.84 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.59 \cdot 10^{-1}$
	10^4	$3.94 \cdot 10^{-2}$	$8.40 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$
	10^6	$3.60 \cdot 10^{-3}$	$6.55 \cdot 10^{-5}$	$8.51 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

Оценка максимальной относительной погрешности при различном числе частиц N и скоростях границы u

u	N	δ_{v_1}	δ_T	δ_p
1.0	10^2	$6.68 \cdot 10^4$	$1.55 \cdot 10^1$	$1.55 \cdot 10^1$
	10^4	$6.23 \cdot 10^3$	3.21	3.21
	10^6	$3.43 \cdot 10^2$	$1.43 \cdot 10^{-1}$	$1.43 \cdot 10^{-1}$
0.1	10^2	$4.50 \cdot 10^5$	$1.08 \cdot 10^1$	$1.08 \cdot 10^1$
	10^4	$6.11 \cdot 10^4$	$8.98 \cdot 10^{-1}$	$8.98 \cdot 10^{-1}$
	10^6	$3.06 \cdot 10^3$	$7.62 \cdot 10^{-2}$	$7.62 \cdot 10^{-2}$

В табл. 1, 2 представлены результаты максимальных абсолютных и относительных погрешностей на отрезке $t \in [0, 0.5]$ при $u = 1.0$ и на отрезке $t \in [0, 5]$ при $u = 0.1$, рассчитанные по формулам (12):

$$\Delta_F = \max_t |F_{num} - F_{an}| \quad \delta_F = \frac{\Delta_F}{|F_{an}|} \cdot 100\%, \quad (12)$$

где F_{num} — численное значение; F_{an} — аналитическое значение; $t \in [0, t^*]$ — временной отрезок.

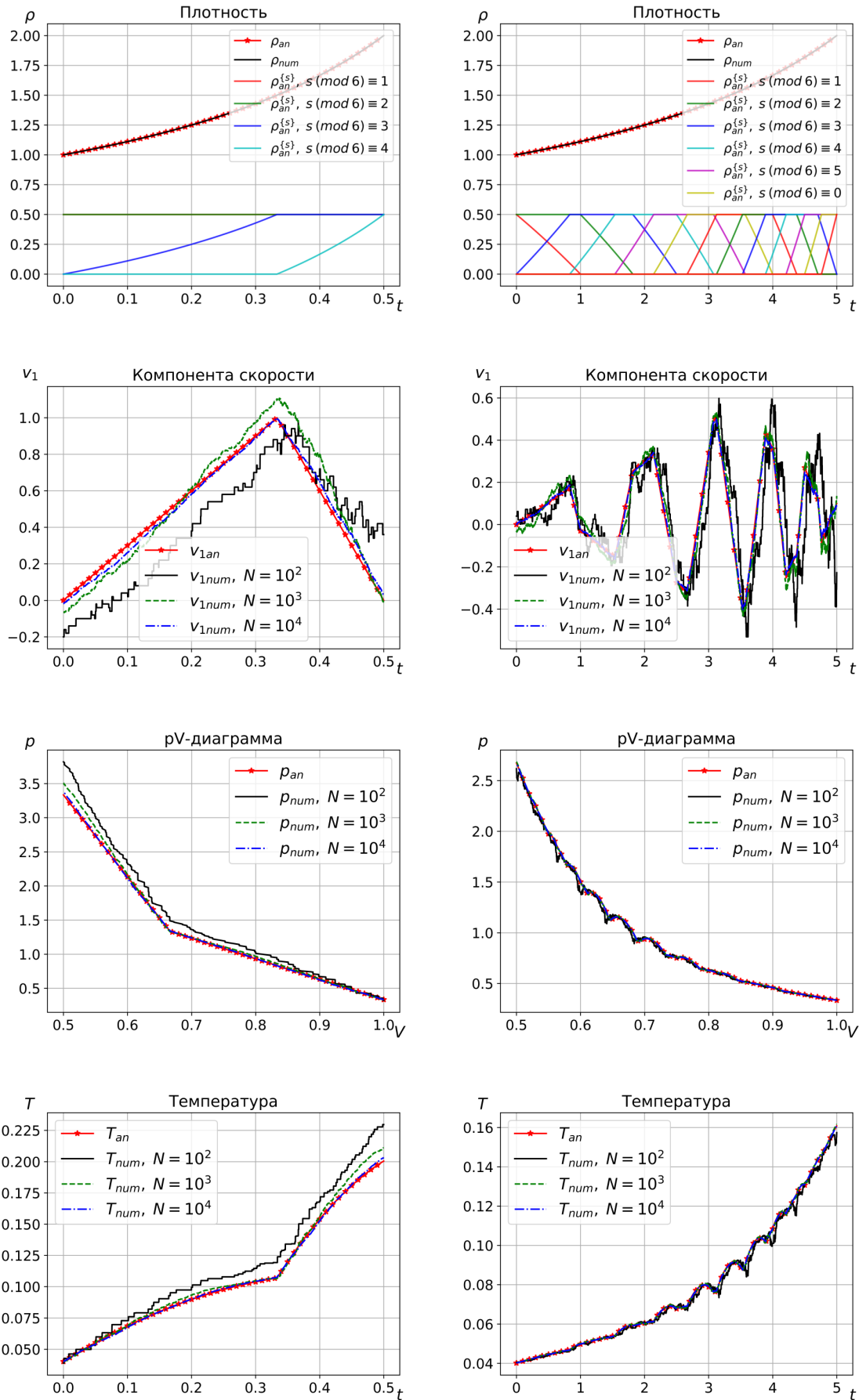


Рис. 4. Графики изменения аналитического решения F_{an} и статистических оценок макроскопических параметров F_{num} при различном числе частиц в эксперименте N в зависимости от времени t или от объема V : слева — $u = 1.0$; справа — $u = 0.1$

Видно, что с увеличением числа частиц и количеством испытаний с последующим усреднением статистические оценки макроскопических параметров, полученные в результате численного моделирования, приближаются к аналитическим решениям. Большая относительная погрешность гидродинамической скорости объясняется тем, что точное решение расположено близко к нулю (значения, равные нулю, отбрасывались). Анализ данных в таблице показывает, что порядок погрешности величин уменьшается согласно выражению (13). Также в таблице не представлены значения погрешностей плотности, так как на их точность влияет только вычислительная погрешность.

$$\frac{\sqrt{\langle(\Delta_F)^2\rangle}}{\langle F \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad (13)$$

где $(\Delta_F)^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$ — средняя квадратичная флуктуация; F — статистическая оценка макроскопической величины; L — число частиц в выделенной подобласти (элементе объема dx), в которой вычисляются статистические оценки макроскопических величин.

Заключение

В этой статье рассмотрена модель адиабатического сжатия газа Кнудсена в одномерном пространстве с подвижной границей, для которой был найден класс точных решений. Идея нахождения класса решений заключалась в определении плотности распределения молекул в пространстве координат и скоростей с течением времени. С помощью условной плотности распределения и предположений, основанных на начальном распределении частиц в фазовом пространстве, законах сохранения и зеркального отражения, удалось получить функцию плотности распределения частиц. Поскольку пространство скоростей дискретное, для вычисления макроскопических величин необходимо суммировать плотность распределения частиц по скоростям. Дополнительно были проведены серии вычислительных экспериментов с использованием разработанного авторами статьи комплекса программ при различных параметрах моделей. Результаты верификации разработанного комплекса программ демонстрируют качественное и количественное соответствие статистических оценок макроскопических величин с полученными аналитическими решениями. Показано, что с увеличением числа частиц и количеством испытаний с последующим усреднением статистические оценки макроскопических параметров, полученные в результате численного моделирования, приближаются к аналитическим решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. *Прикладная динамика разреженного газа*. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
2. Schen C. *Rarefied Gas Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 406 p.
3. Весницкий А. И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
4. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
5. Черный Г. Г. *Газовая динамика*. М.: Наука, 1988. 424 с.
6. Наплеков Д. М., Тур А. В., Яновский В. В. Минимальная модель ускорения Ферми. *ЖТФ*. 2010;80:5:11–22.
7. Быковских Д. А., Галкин В. А. О вычислительном тесте для модели адиабатического сжатия идеального бесстолкновительного газа. *Вестник кибернетики*. 2019;1(33):15–23.
8. Вентцель Е. С. *Теория вероятностей*. М.: Высш.шк., 1999. 576 с.
9. Черчиньяни К. *Математические методы в кинетической теории газов*. М.: Мир, 1973. 246 с.
10. Галкин В. А. *Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 408 с.