ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ КАК КАТЕГОРНЫХ СКЛЕЕК, АКСИОМАТИКА, ДУАЛЬНОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. К. Толоконников
Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ РАН, г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5382-886X, ✍ *admcit@mail.ru*

Аннотация: в работе предложена формальная аксиоматическая теория первого порядка в рамках классической логики для нейронных сетей произвольной топологии, которая является частным случаем аксиоматики развиваемых автором категорных систем, обобщающих и формализующих теорию функциональных систем П.К. Анохина, открытую им в 1930-х годах и, по признанию Н. Винера, встречавшегося с П.К. Анохиным в Москве в 1961 году, содержащую все основные положения кибернетики (обратную связь и т.д.). В склейках открыты и излагаются в работе три вида дуальности, для каждого из них доказаны принципы двойственности, которые нашли применения для обоснования и обобщения на произвольные нейросети известных формул С. Осовского в методе обратного распространения ошибки. Каждая наука развивается и приобретает законченный вид при открытии своих постулатов и аксиом. Предлагаемая аксиоматика для теории нейронных сетей отвечает этому важному этапу развития науки о нейронных сетях, а с учетом системных основ, на которых построена аксиоматика, является важным этапом для формализации основ кибернетики и тех разделов искусственного интеллекта, которые опираются на теорию нейронных сетей.

Ключевые слова: системы, категорные системы, теория функциональных систем, нейронные сети, аксиоматические теории, принцип двойственности, категорные склейки, метод обратного распространения ошибки, искусственный интеллект.

Для цитирования: Толоконников Г. К. Логические основания нейронных сетей как категорных склеек, аксиоматика, дуальности и приложения. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):26–39.

Поступила в редакцию: 28.08.2026. *В окончательном варианте: 28.09.2026.*

LOGICAL FOUNDATION OF NEURAL NETWORKS AS CATEGORICAL SPLICES, AXIOMATICS, DUALITIES, AND APPLICATIONS

G. K. Tolokonnikov
Federal Scientific Agroengineering Center VIM, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5382-886X, ✍ *admcit@mail.ru*

Abstract: we developed a formal first-order axiomatic theory of neural networks with arbitrary topologies within classical logic. The theory is a special case of the author's axiomatic framework for categorical systems, which generalizes and formalizes P. K. Anokhin's theory of functional systems, developed in the 1930s and, as N. Wiener acknowledged after meeting P. K. Anokhin in Moscow in 1961, incorporating the fundamental principles of cybernetics, including feedback. We identified and described three types of dualities and proved the corresponding duality principles. We applied these results to justify and generalize S. Osowski's well-known formulas for error backpropagation to neural networks with arbitrary topologies. A scientific theory reaches a mature stage of development when its fundamental principles can be expressed as a system of postulates and axioms. The proposed axiomatic theory provides such a formal foundation for neural networks and, through its systemic basis, contributes to the formalization of the foundations of cybernetics and artificial intelligence methods based on neural networks.

Keywords: systems, categorical systems, theory of functional systems, neural networks, axiomatic theories, duality principle, categorical splices, backpropagation method, artificial intelligence.

Cite this article: Tolokonnikov G. K. Logical Foundation of Neural Networks as Categorical Splices, Axiomatics, Dualities, and Applications. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):26–39.

Original article submitted: 28.08.2026. *Revision submitted: 28.09.2026.*

Введение

Среди специалистов по кибернетике, к сожалению, мало известным является факт того, что задолго до предложенного в книге Н. Винера «Кибернетика» (1948 г.) подхода к кибернетике все ее положения (и даже более того) были выдвинуты и теоретически, и экспериментально обоснованы в работах П.К. Анохина, выдающегося ученика физиолога И.П. Павлова в теории функциональных систем, появившейся в конце 1920-х годов.



Рис. 1. *Н. Винер и П.К. Анохин, Москва, 1961 г.*

Н. Винер приезжал в 1961 году в Москву к П.К. Анохину и признал приоритет в кибернетике за П.К. Анохиным (см. [1]). В работах автора (см. [2] и ссылки там же) построена формализация теории функциональных систем, для чего потребовалось развить новый раздел теории категорий — теорию категорных склеек, которая стала аппаратом развиваемой автором теории категорных систем. Одной из важных моделей категорных систем являются искусственные нейронные сети произвольной топологии [2] (в том числе сети глубокого обучения и т.п.). У каждой науки есть предмет, теорию которого эта наука строит; современное понимание термина теории включает аксиомы, правила вывода той логики (классической, конструктивной, интуиционистской и т.п.), которая адекватна предмету науки, и интерпретации формальной аксиоматической теории, лежащей в основе теории предмета науки. По большому счету, когда найдены аксиомы и правила получения из них всех истинных утверждений о предмете науки, описывающих его свойства, можно говорить о том, что наука о данном предмете исследования в принципе построена. В любом случае этап открытия аксиом и логики для данной теории является важнейшим этапом развития науки. В работе мы предлагаем аксиоматику для теории нейронных сетей как указанный важный этап развития науки о нейронных сетях.

Общеизвестна роль, которую играет понятие двойственности в категориях [3], фактически пронизывающее всю теорию категорий. В категорных склейках нами обнаружены еще два вида дуальности помимо аналога категорной двойственности. Не менее важную роль, чем двойственность в обычной теории категорий, дуальности играют и в теории склеек. Интуитивная реализация всех трех видов дуальностей иллюстрируется рис. 2 на фрагменте нейронной сети. Невооруженным глазом видна «похожесть» изображенных пунктиром сверток на сами нейроны; математика, формализующая этот феномен, есть как раз теория склеек. Обычная двойственность состоит в замене направлений стрелок; если мы к тому же поменяем местами свертки и сами нейроны, мы снова получим сверточный мультиграф сверточной мультикатегории, частного случая склеек. Если применять последовательно смену направлений стрелок и замену друг на друга сверток и нейронов, то мы получим еще одну — третью дуальность, не сводящуюся к предыдущим. Дальнейшее применение уже имеющихся операций новых мультиграфов не дает.

Обратившись к П.К. Анохину, можно только подтвердить и сегодня его утверждение о том, что в искусственных нейронных сетях используются устаревшие лет на 20 представления о нейроне [6]. Действительно, нейробиологи, что общеизвестно с конца прошлого века, нашли примеры нейронов с несколькими аксонами, выдающими независимые друг от друга сигналы.

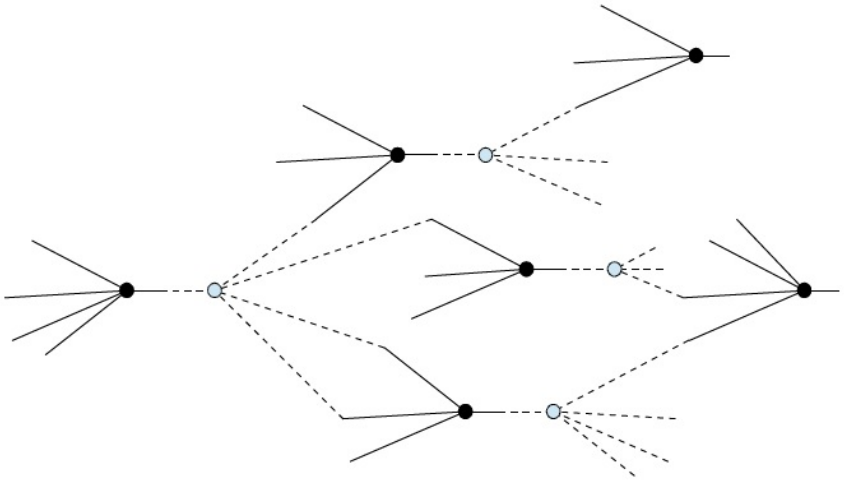


Рис. 2. *Фрагмент нейронной сети, связи изображены пунктирами (т.е. свертками в категорной модели нейросети)*

Наш подход позволяет моделировать перечисленные и другие обобщения представлений о нейронах [2]. Настоящая работа связана с категорной наукой следующим образом. Известное определение М. Месаровича [7] задает систему в рамках теоретико-множественной парадигмы в виде отношения на декартовом произведении множества входов и множества выходов. Его категорным обобщением является полистрелка поликатегории. Поликатегории ввел Сабо в 1975 году [8]. Соединение полистрелок осуществляется обычными композициями, имеющими, как показал Гарнер [9], ограниченные возможности. Автор заменил композиции на операцию сверток; возникли сверточные поликатегории, которые, в отличие от поликатегорий Сабо, позволяют, например, моделировать спайковые соединения нейронов, а также моделировать искусственные нейронные сети произвольной топологии. Теория сверточных поликатегорий была расширена до теории категорных склеек [2], в которой оказалось возможным моделировать неспайковые связи нейронов и других клеток, а также аналоги нейронных сетей, отвечающих высшим категориям. В связи с ограничением объема работы ряд стандартных логических утверждений опущен (аксиомы равенства, доказательства допустимости некоторых операций как правил вывода, явное описание конструкций шаблонов, зависимость от этих конструкций операций дуальности и т.д.), однако достаточно детально изложенная идейная сторона вопросов позволяет без особых усилий восстановить указанные опущенные утверждения.

Категорные склейки

Рассмотрим класс категорных склеек, отвечающий сверточным поликатегориям. Введем язык склеек. Алфавит имеет переменные x_k, $k = 1,2,\ldots$, и частичные функциональные символы проекций входов $q = 1,2,3,\ldots$, $C^{(1,q)}$ и $C^{(2,q)}$ — проекции выходов, переменные $a_k^{(i,q)}$ и μ_l, $l = 1,2,\ldots$ — функциональные символы частичных n-арных операций. Обычным образом строятся термы $t,r,\ldots$; формулы $t = r$ назовем *базовыми формулами*. Рассмотрим четыре сорта s_0^1,s_0^2,s_0^3,s_0^4; выписанные переменные и предикат равенства отнесем к сорту s_0^1. Добавим три копии с сортами s_0^2,s_0^3,s_0^4. Буквами сорта s_0^2 являются введенные буквы сорта s_0^1 с добавленным штрихом, для сорта s_0^3 — с надчеркиванием, для сорта s_0^4 — с добавленным штрихом и надчеркиванием. Введены следующие буквы (виды операций даны в скобках $i,j = 1,2$; $k,q = 1,2,3,\ldots$):

$$x_k,\ C^{(i,q)},\ (s_0^1 \to s_0^1),\ a_k^{(i,q)},\ =;\ x'_k,\ C'^{(i,q)},\ (s_0^2 \to s_0^2),\ a_k'^{(i,q)},\ =';$$
$$\bar{x}_k,\ \bar{C}^{(i,q)},\ (s_0^3 \to s_0^3),\ \bar{a}_k^{(i,q)},\ =\ ^-;\ \bar{x}'_k,\ \bar{C}'^{(i,q)},\ (s_0^4 \to s_0^4),\ \bar{a}_k'^{(i,q)},\ ='\ ^-;\ M_{ij},\ (s_0^j \to s_0^i),$$

добавлены функциональные символы M_{ij}, действующие между сортами. Сорта s_0^e (e=1,... , 4) букв иногда будем также размещать в виде левого верхнего индекса ${}^{(e)}x_k$, ${}^{(e)}C^{(i,q)}$ и так далее. Формулы вида ${}^{(e)}a_k^{(i,q)} = {}^{(e)}C^{(i,q)}\,{}^{(e)}x_k$, $i = 1,2$ называются элементарными формулами. Вводим бестиповый символ равенства ${}^{(e)}\xi = {}^{(e')}\eta$, $e \neq e'$, $e,e' = 1,\ldots,4$, это ${}^{(e)}\xi =$

${}^{(\mathrm{e})}M_{ee'}{}^{(\mathrm{e}')}\eta$, ${}^{(\mathrm{e})}\xi$, ${}^{(\mathrm{e}')}\eta$, $e,e'=1,\ldots,4$ — термы сортов $s_0^{(\mathrm{e})}$. Функциональные символы M_{ij} удовлетворяют следующим аксиомам:

$$\forall\ {}^{(j)}x_k\, M_{ji}M_{ij}\,{}^{(j)}x_k = {}^{(j)}x_k, \quad i\neq j,\ i,j=1,\ldots,4. \tag{1}$$

Вводим также следующие аксиомы ($i,j=1,2$; $p,q=1,2,\ldots$):

$$\begin{gathered}\forall x_k\ \forall x'_k\ \forall \bar{x}_k\ \forall \bar{x}'_k\ \left(C^{(i,p)}C^{(j,q)}x_k = C^{(j,q)}x_k\right)\ \wedge\ \left(C'^{(i,p)}C'^{(j,q)}x'_k = C'^{(j,q)}x'_k\right)\ \wedge \\ \wedge\ \left(\bar{C}^{(i,p)}\bar{C}^{(j,q)}\bar{x}_k = \bar{C}^{(j,q)}\bar{x}_k\right)\ \wedge\ \left(\bar{C}'^{(i,p)}\bar{C}'^{(j,q)}\bar{x}'_k = \bar{C}'^{(j,q)}\bar{x}'_k\right).\end{gathered} \tag{2}$$

Определение. Базовым внешним гребнем и базовой внешней сверткой называется формула, составленная из наборов $k=1,2,3,\ldots$ элементарных формул $q,p,q',p'=1,2,3,\ldots$:

$$\begin{gathered}a_k^{(2,1)} = C^{(2,1)}x_k\ \wedge\ a_k^{(2,2)} = C^{(2,2)}x_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k^{(2,p)} = C^{(2,p)}x_k\ \wedge \\ \wedge\ a_k^{(1,1)} = C^{(1,1)}x_k\ \wedge\ a_k^{(1,2)} = C^{(1,2)}x_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k^{(1,q)} = C^{(1,q)}x_k,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}a_k'^{(2,1)} = C'^{(2,1)}x'_k\ \wedge\ a_k'^{(2,2)} = C'^{(2,2)}x'_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k'^{(2,p')} = C'^{(2,p')}x'_k\ \wedge \\ \wedge\ a_k'^{(1,1)} = C'^{(1,1)}x'_k\ \wedge\ a_k'^{(1,2)} = C'^{(1,2)}x'_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k'^{(1,q')} = C'^{(1,q')}x'_k,\end{gathered}$$

которая может содержать дополнительные равенства. Гребни и свертки, в которых все переменные и термы (не проекции) связаны равенствами, называются связными. Сокращенно формулы могут быть записаны с помощью метазнака произведения:

$$\prod_k \prod_{i_k=1}^{q_k} a_k^{(1,i_k)} \prod_{i_k=1}^{p_k} a_k^{(2,i_k)}; \qquad \prod_k \prod_{i'_k=1}^{q'_k} a_k'^{(1,i'_k)} \prod_{i'_k=1}^{p'_k} a_k'^{(2,i'_k)}.$$

Операцию перевода неупорядоченных гребней и сверток в упорядоченные обозначим через P.

Рассмотрим класс формул, составленных из конъюнкций базовых формул. Удобно такие формулы разместить в 2x2 таблицу: подформулы сорта s_0^1 разместить в 1,1-ячейке таблицы, сорта s_0^2 — в 1,2-ячейке, сорта s_0^3 — в 2,1-ячейке и сорта s_0^4 — в 2,2-ячейке. В склейках используется более узкий класс формул, называемых полными гребнями, на нем действует данное матричное представление. Подформула полного гребня сорта s_0^1 размещается в 1,1-ячейке таблицы и называется внешним гребнем, сорта s_0^2 — в 1,2-ячейке и называется внешней сверткой, сорта s_0^3 — в 2,1-ячейке и называется внутренним гребнем, сорта s_0^4 — в 2,2-ячейке и называется внутренней сверткой. В [10] Хетчер в построенной им аксиоматической теории категорий сопоставил в метаязыке формулам языка изображения стрелками, задав тем самым формальную интерпретацию общеизвестным категорным диаграммам. Мы аналогично используем [2] изображение формул диаграммами, которые называются склеечными диаграммами. Образующими для построения категорных склеек с помощью вводимых далее операций свертки являются полные гребни, состоящие из базовых внешних гребней и базовых внешних сверток без внутренних гребней и сверток, при этом соединяющие их равенства возможны только для проекций. Традиционные нейронные сети имеют общую структуру, которая задается рис. 2.13 из [11], с перекрестными и обратными связями, их учет в соответствующих гребнях несложен. Построение нейронной сети можно осуществить пошагово. Такое же построение проводится и для гребней. Пусть имеется u слоев базовых гребней, чередующихся с $u-1$ слоем базовых сверток (или u слоев базовых сверток, чередующихся с $u-1$ слоем базовых гребней), определяющих некоторую операцию λ, то есть следующий полный гребень, который будем называть ***шаблоном операции*** (не указаны проекции):

$$\begin{gathered}x_1x_2\ldots x_{r^1}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\ldots x_{r^1+r^2}\ \ldots\ x_{r^1+\ldots+r^{u-1}+1}\ldots x_{r^1+\ldots+r^u}\ \mid \\ \mid\ x'_{R+1}x'_{R+2}\ldots x'_{R+t^1}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\ldots x'_{R+t^1+t^2}\ \ldots\ x'_{R+T-1}\ldots x'_{R+T},\end{gathered}$$

и формула:

$$x_1x_2\dots x_{r^1}\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+t^1}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\dots x_{r^1+r^2}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\dots x'_{R+t^1+t^2}\ \dots$$
$$\dots\ x'_{R+t^1+t^2+\dots+t^{u-2}+1}\dots x'_{R+t^1+t^2+\dots+t^{u-2}+t^{u-1}}\ x_{r^1+\dots+r^{u-1}+1}x_{r^1+\dots+r^{u-1}+2}\dots x_{r^1+\dots+r^u},$$

или в очевидных обозначениях $X_{r^1}\ X'_{R+t^1}\ X_{r^1+r^2}\ X'_{R+t^1+t^2}\ \dots\ X_{R+T}\ X_R$. Каждый из слоев имеет ***подслой***, составленный из входов, а также ***надслой*** шаблона, составленный из выходов. Полная с учетом подслоев и надслоев формула перепишется в виде следующего слова из букв проекций:

$$\prod_{k=1}^{u-1}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}$$

$$\prod_{j=1}^{t^k}\prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}} a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}\prod_{j=1}^{t^k}\prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}} a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}.$$

Определим упорядочение букв проекций для следующего гребня с u-1 слоем внешних гребней и u слоями внешних сверток, с учетом начала нумерации с клетки (1,1):

$$\prod_{j=1}^{t^1}\prod_{i=1}^{m_{R+j}} a'^{(1,i)}_{R+j}\prod_{j=1}^{t^1}\prod_{i=1}^{n_{R+j}} a'^{(2,i)}_{R+j}$$

$$\prod_{k=1}^{u-1}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}.$$

Выписанные две формулы задают нумерацию букв в шаблонах операций, которые нам встретятся. Операцию построения слова из букв проекций обозначим через Γ, понадобятся следующие выражения для отдельных связных гребней и сверток:

$$\Gamma\, x_k = a_k^{(1,1)}\dots a_k^{(1,p)}\, a_k^{(2,1)}\dots a_k^{(2,q)},\quad \Gamma\, x'_k = a_k'^{(1,1)}\dots a_k'^{(1,p)}\, a_k'^{(2,1)}\dots a_k'^{(2,q)}.$$

Понадобится также стандартная операция удаления букв из слов, именно операция удаления из слова переменных проекций выходов, обозначим эту операцию $Pr^{(2)}$, и входов, обозначим эту операцию $Pr^{(1)}$. Определена операция исключения проекций, из исходного слова A и одновременно входящих в слово B, символы которого подлежат исключению из исходного слова, запись операции имеет вид $A\backslash B$. Операции свертки проводятся с помощью правил вывода M_b, M_l и обратной M_r, операции Ev. Указанные операции выражаются через следующие правила вывода $\hat{M}_{ij}$, переводящие выражения s_0^j-языка в выражения s_0^i-языка: сорт j переводится в сорт i. Подстановка $\hat{M}_{ij}$ осуществляется в виде замены формул равенства термов $t_1 = t_2$ на переводы этих формул в другие сорта (j в i). Операция M_b переводит выражения языка из ячейки (1,1) в ячейку (2,1) и выражения языка из ячейки (1,2) в ячейку (2,2), являясь по определению одновременным действием операций $\hat{M}_{31}, \hat{M}_{42}$, также имеем $M_t - \hat{M}_{13}, \hat{M}_{24}$; $M_l - \hat{M}_{12}, \hat{M}_{34}$; $M_r - \hat{M}_{21}, \hat{M}_{43}$. Действие операции M_b только на формулы, входящие в определение операции свертки, обозначим через M_b^s. Операция Ev состоит в применении символов имеющихся n-арных операций языка склеек. Операции свертки $EvPM_lM_b^s, EvPM_rM_b^s$ есть последовательное применение указанных правил вывода.

Направленные полисклейки

Для существования дуальностей в общем случае требуются при фиксированной операции (знаков s_0^1 R штук, знаков s_0^2 T штук) ${}^1\lambda_\alpha(s_0^1,\dots,s_0^1,s_0^2,\dots,s_0^2 \to s_0^1)$ следующие операции, которые включаем в сигнатуру склеек в качестве μ_l операций, ${}^1\sigma_\alpha, {}^1\lambda_\alpha^T, {}^1\sigma_\alpha^T, {}^2\lambda_\alpha, {}^2\sigma_\alpha, {}^2\lambda_\alpha^T, {}^2\sigma_\alpha^T$. Перейдем к их определению.

Основная операция ${}^1\lambda_\alpha$ задается индексом $\alpha = \prod_{\beta=1}^{w} a_{i_\beta}^{(2,p_\beta)} a_{j_\beta}^{\prime(1,q_\beta)} \prod_{\theta=1}^{w'} a_{m_\theta}^{(1,g_\theta)} a_{n_\theta}^{\prime(2,h_\theta)}$. В наглядной форме требования к соединениям состоят в том, что связи, отмечаемые пунктирами, соединяют соседние диапазоны связных гребней в общей формуле полного гребня со сверткой. Функциональный символ при применении к переменным в данном случае задает терм ${}^1\lambda_\alpha\ x_1x_2\dots x_R\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+T}$, который по определению приводит к операции в первом сорте ${}^1\mu_\alpha\, {}^1X_{r^1}\ X_{R+t^1}\ X_{r^1+r^2}\ X_{R+t^1+t^2}\dots X_{R+T}\ X_R$ и других сортах. Применение операции $\hat{\lambda}\,{}^1_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_l M_b$ (последовательное применение Ev , M_l, M_b) приводит к полному гребню с внешним гребнем в виде результата применения операции, внутреннего гребня и пустых клеток (1,2) и (2,2) (отсутствие внешней и внутренней сверток). Операция ${}^1\sigma_\alpha$ задается тем же индексом α, что и операция ${}^1\lambda_\alpha$, но ее результат получается применением к гребню со сверткой правил вывода ${}^1\hat{\sigma}_{\,\alpha} = \mathrm{Ev}\, M_r M_b$, что приводит к полному гребню с внешней сверткой в виде результата применения операции ${}^1\mu'_\alpha$, внутренней свертки и пустых клеток (1,1) и (2,1) (отсутствие внешнего и внутреннего гребней). Операции ${}^1\hat{\lambda}_\alpha$, ${}^1\hat{\sigma}_\alpha$ применимы к наборам формул с непустыми внутренними гребнями и свертками. Таким образом, мы имеем образующие и правила вывода построения из них новых полных гребней, которые составляют конструируемую полисклейку. Операция ${}^1\lambda^T_{\alpha^T}$ — аналог «смены направления стрелок» категории, она получается из операции ${}^1\lambda_\alpha$ одновременной сменой друг на друга функциональных символов $C^{(1,p)}$ и $C^{(2,p)}$ во всех сортах, при этом не меняется нумерация связных гребней и сверток и их проекций по нижним индексам и номерам связей. Обозначим эту операцию одновременной замены входов на выходы и наоборот через D. Операция ${}^1\sigma^T_{\alpha^T}$ задается тем же индексом, что и операция ${}^1\lambda^T_{\alpha^T}$, но ее результат получается применением к гребню со сверткой правил вывода $\hat{\sigma}\,{}^1_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_r M_b$. Общая для случая ${}^2\lambda^T_{\alpha^T}$ формула полного гребня со сверткой имеет вид:

$$x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+t^1}\ x_1x_2\dots x_{r^1}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\dots x'_{R+t^1+t^2}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\dots x_{r^1+r^2}\ \dots$$

$$\dots\ x_{r^1+r^2+\dots+r^{u-2}+1}\dots x_{r^1+r^2+\dots+r^{u-2}+r^{u-1}}\ x'_{R+t^1+\dots+t^{u-1}+1}x'_{R+t^1+\dots+t^{u-1}+2}\dots x'_{R+t^1+\dots+t^u}$$

$$R = r^1 + r^2 + \dots + r^{u-2} + r^{u-1},\quad T = t^1 + \dots + t^u.$$

Функциональный символ при применении к переменным задает терм ${}^2\lambda_{2_\alpha}\ x_1x_2\dots x_R\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+T}$, применение операции ${}^2\hat{\lambda}_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_l M_b$ приводит к полному гребню с внешним гребнем в виде результата применения операции ${}^1\mu_\alpha$.

Предложение 1. Операция B шаблон операции ${}^1\lambda_{1_\alpha}$ преобразует в шаблон:

$$\prod_{j=1}^{t'^1}\prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a_{R'+j}^{\prime(1,i)} \prod_{j=1}^{t'^1}\prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a_{R'+j}^{\prime(2,i)}$$

$$\prod_{k=1}^{u'}\prod_{j=1}^{r'^k}\prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k}\prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\prod_{j=1}^{t'^{k+1}}\prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}^{\prime(1,i)} \prod_{j=1}^{t'^k}\prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}^{\prime(2,i)},$$

$$R' = T,\quad T' = R,\quad u' = u-1,\quad p'_i = m_{R+i},\quad q'_i = n_{R+i},$$

$$m'_j = p_{j-T},\quad n'_j = q_{j-T},\quad r'^k = t^k,\quad t'^l = r^l,$$

$$i = 1,\dots,T,\quad j = 1,2,\dots,R,\quad k = 1,\dots,u-1,\quad l = 1,\dots,u.$$

Формулы для операций D и H=DB аналогичны, они фактически выписаны в аксиомах далее, в связи с чем для краткости опущены.

Доказательство громоздкое, но несложное, выписывается слово шаблона, далее в случае операции B применяется одновременная смена сортов, далее проводится перенумерация в установленном порядке. После чего путем сравнения индексов результата с начальным словом выписываются приведенные в условии равенства. Для операций D, H=DB доказательства аналогичны.

Предложение 2. Пусть ${}^1\alpha$ — индекс операции ${}^1\lambda_{{}^1\alpha}$. Тогда B переводит ${}^1\alpha \to {}^2\alpha$, ${}^2\alpha = \prod_{\theta=1}^{w'} a_{n_\theta - R}^{(2,h_\theta)} a_{T+m_\theta}^{\prime(1,g_\theta)} \prod_{\beta=1}^{w} a_{j_\beta - R}^{(1,q_\beta)} a_{T+i_\beta}^{\prime(2,p_\beta)}$, D переводит ${}^1\alpha \to {}^1\alpha^T$,

${}^1\alpha^T = \prod_{\theta=1}^{w'} a_{R-m_\theta+1}^{(2,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} a_{2R+T-n_\theta+1}^{\prime(1,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} \prod_{\beta=1}^{w} a_{R-i_\beta+1}^{(1,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} a_{2R+T-j_\beta+1}^{\prime(2,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}$, DB переводит ${}^1\alpha \to {}^2\alpha^T$, ${}^2\alpha^T = \prod_{\beta=1}^{w} a_{T+R-j_\beta+1}^{(2,M_{j_\beta}-q_\beta+1)} a_{T+R-i_\beta+1}^{\prime(1,P_{i_\beta}-p_\beta+1)} \prod_{\theta=1}^{w'} a_{T+R-n_\theta+1}^{(1,M_{n_\theta}-h_\theta+1)} a_{T+R-m_\theta+1}^{\prime(2,P_{m_\theta}-g_\theta+1)}$.

Теперь мы можем выписать аксиомы.

Определение. Категорной полисклейкой называется множество всех полных гребней, которые можно получить из базовых гребней с помощью определенных выше операций свертки при наличии нелогических аксиом (1)–(2) и следующих нелогических аксиом:

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda_\alpha\, x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,p_\beta)} x_{i_\beta} = C'^{(1,q_\beta)} x'_{j_\beta} \ \wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,g_\theta)} x_{m_\theta} = C'^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta}; \tag{3}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma_\alpha\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,p_\beta)} x_{i_\beta} = C'^{(1,q_\beta)} x'_{j_\beta} \ \wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,g_\theta)} x_{m_\theta} = C'^{(2,h_\theta)} x'_{n_\theta}; \tag{4}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda^T_{\alpha^T}\ x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} x_{R-m_\theta+1} = C'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} x'_{2R+T-n_\theta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} x_{R-i_\beta+1} = C'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)} x'_{2R+T-j_\beta+1}; \tag{5}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma^T_{\alpha^T}\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} x_{R-m_\theta+1} = C'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} x'_{2R+T-n_\theta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} x_{R-i_\beta+1} = C'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)} x'_{2R+T-j_\beta+1}; \tag{6}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^2\lambda_{{}^2\alpha}\ x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta - R} = C'^{(1,g_\theta)} x'_{T+m_\theta} \ \wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,q_\beta)} x_{j_\beta - R} = C'^{(2,p_\beta)} x'_{T+i_\beta}; \tag{7}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^2\sigma_{{}^2\alpha}\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta - R} = C'^{(1,g_\theta)} x'_{T+m_\theta} \ \wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,q_\beta)} x_{j_\beta - R} = C'^{(2,p_\beta)} x'_{T+i_\beta}; \tag{8}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^{2}\lambda^{T}_{{}_{2}\alpha^{T}} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,\, M_{j_\beta} - q_\beta + 1)} x_{T+R-j_\beta+1} = C'^{(1,\, P_{i_\beta} - p_\beta + 1)} x'_{T+R-i_\beta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,\, M_{n_\theta} - h_\theta + 1)} x_{T+R-n_\theta+1} = C'^{(2,\, P_{m_\theta} - g_\theta + 1)} x'_{T+R-m_\theta+1}; \tag{9}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^{2}\sigma^{T}_{{}_{2}\alpha^{T}} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,\, M_{j_\beta} - q_\beta + 1)} x_{T+R-j_\beta+1} = C'^{(1,\, P_{i_\beta} - p_\beta + 1)} x'_{T+R-i_\beta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,\, M_{n_\theta} - h_\theta + 1)} x_{T+R-n_\theta+1} = C'^{(2,\, P_{m_\theta} - g_\theta + 1)} x'_{T+R-m_\theta+1}; \tag{10}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$
$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big) \Pr^{(1)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big),$$
$$\mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u-1} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}$$
$$\times \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \tag{11}$$
$$\times \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{p_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} a^{(1,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j} \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{q_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} a^{(2,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}$$
$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} a^{(2,p_\beta)}_{i_\beta} \, M_{12} \, a'^{(1,q_\beta)}_{j_\beta} \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(1,g_\theta)}_{m_\theta} \, M_{12} \, a'^{(2,h_\theta)}_{n_\theta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$
$$\supset \; \Gamma \, x'_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big) \Pr^{(1)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big),$$
$$\mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u-1} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}$$
$$\times \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \tag{12}$$
$$\times \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{p_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j} \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{q_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}$$
$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(2,p_\beta)}_{i_\beta} \, a'^{(1,q_\beta)}_{j_\beta} \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(1,g_\theta)}_{m_\theta} \, a'^{(2,h_\theta)}_{n_\theta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\ x_1 x_2 \ldots x_R\, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset\ \Pr{}^{(2)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) \Pr{}^{(1)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr),$$

$$\operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u'-1} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} M_{12}\, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} M_{12}\, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \tag{13}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{p'_{r'^1+\cdots+r'^{u-1}+j}} a^{(1,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j} \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{q'_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}} a^{(2,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{R-m_\theta+1}\, M_{12}\, a'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{2R+T-n_\theta+1} \prod_{\beta=1}^{w} a^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{R-i_\beta+1}\, M_{12}\, a'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{2R+T-j_\beta+1};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\ x'_{R+1} \ldots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset\ \Pr{}^{(2)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) \Pr{}^{(1)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr),$$

$$\operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u'-1} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21}\, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21}\, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \tag{14}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{p'_{r'^1+\cdots+r'^{u-1}+j}} M_{21}\, a^{(1,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j} \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{q'_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}} M_{21}\, a^{(2,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21}\, a^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{R-m_\theta+1}\, a'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{2R+T-n_\theta+1} \prod_{\beta=1}^{w} M_{21}\, a^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{R-i_\beta+1}\, a'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{2R+T-j_\beta+1};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^2\lambda_{2\alpha} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{15}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}.$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(2,h_\theta)}_{n_\theta - R} \, M_{12} \, a'^{(1,g_\theta)}_{T+m_\theta} \prod_{\beta=1}^{w} a^{(1,q_\beta)}_{j_\beta - R} \, M_{12} \, a'^{(2,p_\beta)}_{T+i_\beta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^2\sigma_{2\alpha} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{16}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}.$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(2,h_\theta)}_{n_\theta - R} \, a'^{(1,g_\theta)}_{T+m_\theta} \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(1,q_\beta)}_{j_\beta - R} \, a'^{(2,p_\beta)}_{T+i_\beta};$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}} \; x_1 x_2 \dots x_R \, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{17}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}$$

$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} a^{(2,\, M_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{T+R-j_\beta+1} \, M_{12} \, a'^{(1,\, P_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{T+R-i_\beta+1} \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(1,\, M_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{T+R-n_\theta+1} \, M_{12} \, a'^{(2,\, P_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{T+R-m_\theta+1};$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}} \; x'_{R+1} \dots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{18}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}$$

$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(2,\, M_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{T+R-j_\beta+1} \, a'^{(1,\, P_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{T+R-i_\beta+1} \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(1,\, M_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{T+R-n_\theta+1} \, a'^{(2,\, P_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{T+R-m_\theta+1}.$$

Доопределим операцию D до операции сортовой дуальности D, удовлетворяющей свойствам $\mathrm{D}(\alpha\beta\dots\gamma) \equiv \mathrm{D}(\alpha)\,\mathrm{D}(\beta)\dots\mathrm{D}(\gamma)$, $\alpha\beta\dots\gamma$ — слово в алфавите склеек ($\equiv$ — метазнак соответствия), и (указаны лишь те буквы, которые операция D меняет):

$$Da^{(i)}_k \equiv a^{(j)}_k, \quad Da'^{(i)}_k \equiv a'^{(j)}_k, \quad D\bar{a}^{(i)}_k \equiv \bar{a}^{(j)}_k, \quad D\bar{a}'^{(i)}_k \equiv \bar{a}'^{(j)}_k,$$

$$DC^{(i)} \equiv C^{(j)}, \quad DC'^{(i)} \equiv C'^{(j)}, \quad D\bar{C}^{(i)} \equiv \bar{C}^{(j)}, \quad D\bar{C}'^{(i)} \equiv \bar{C}'^{(j)}, \quad i,j = 1,2, \; i \neq j$$

$$D\,{}^1\lambda_{1_\alpha} \equiv {}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^1\sigma_{1_\alpha} \equiv {}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}} \equiv {}^1\lambda_{1_\alpha}, \quad D\,{}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}} \equiv {}^1\sigma_{1_\alpha},$$

$$D\,{}^2\lambda_{2_\alpha} \equiv {}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^2\sigma_{2_\alpha} \equiv {}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}} \equiv {}^2\lambda_{2_\alpha}, \quad D\,{}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}} \equiv {}^2\sigma_{2_\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что операция D совпадает со своей обратной. Формулы, полученные применением операции D, назовем дуальными по сортам. Доопределим операцию B до операции сверточной дуальности B, удовлетворяющей свойствам $\mathrm{B}(\alpha\beta\dots\gamma) \equiv \mathrm{B}(\alpha)\,\mathrm{B}(\beta)\dots\mathrm{B}(\gamma)$, $\alpha\beta\dots\gamma$, —

слово в алфавите склеек (≡ — метазнак соответствия), и (указаны лишь те буквы, которые операция B меняет):

$$Bx_k \equiv x'_k, \quad Bx'_k \equiv x_k, \quad B\bar{x}_k \equiv \bar{x}'_k, \quad B\bar{x}'_k \equiv \bar{x}_k,$$

$$Ba_k^{(i)} \equiv a_k'^{(i)}, \quad Ba_k'^{(i)} \equiv a_k^{(i)}, \quad B\bar{a}_k^{(i)} \equiv \bar{a}_k'^{(i)}, \quad B\bar{a}_k'^{(i)} \equiv \bar{a}_k^{(i)},$$

$$BC^{(i)} \equiv C'^{(i)}, \quad BC'^{(i)} \equiv C^{(i)}, \quad B\bar{C}^{(i)} \equiv \bar{C}'^{(i)}, \quad B\bar{C}'^{(i)} \equiv \bar{C}^{(i)}, i = 1, 2,$$

$$B\,{}^1\lambda_{1\alpha} \equiv {}^2\sigma_{2\alpha}, \quad B\,{}^1\sigma_{1\alpha} \equiv {}^2\lambda_{2\alpha}, \quad B\,{}^1\lambda^T_{1\alpha^T} \equiv {}^2\sigma^T_{2\alpha^T}, \quad B\,{}^1\sigma^T_{1\alpha^T} \equiv {}^2\lambda^T_{2\alpha^T},$$
$$B\,{}^2\lambda_{2\alpha} \equiv {}^1\sigma_{1\alpha}, \quad B\,{}^2\sigma_{2\alpha} \equiv {}^1\lambda_{1\alpha}, \quad B\,{}^2\lambda^T_{2\alpha^T} \equiv {}^1\sigma^T_{1\alpha^T}, \quad B\,{}^2\sigma^T_{2\alpha^T} \equiv {}^1\lambda^T_{1\alpha^T}.$$

Формулы, полученные применением операции B, назовем дуальными по сверткам.

Сортовая и сверточная дуальности переводят аксиомы в аксиомы.

Предложение 3. Если F аксиома, то дуальная ей формула DF (соответственно, BF) также является аксиомой формальной аксиоматической теории склеек. Доказательство опирается на предложения 1 и 2, громоздко, но несложно, опущено. Справедливо также следующее простое утверждение (доказательство опущено).

Предложение 4. Пусть формула F исходного языка выведена из формул A и $A \supset F$ по правилу *modus ponens*, тогда формула DF выводится по этому правилу из формул DA и $D(A \supset F)$. Пусть теперь формула $\forall\xi\ A$ получена из формулы A с помощью правила Gen классической логики. Тогда формула $D(\forall\xi\ A)$ выводится из формулы DA по тому же правилу (для B дословно справедливо то же самое).

Докажем основную теорему данной работы — принцип дуальности.

Теорема. Пусть формула A исходного языка склеек выводима, тогда дуальная по сортам формула DA (соответственно, дуальная по сверткам формула BF) также выводима.

Доказательство (мы проводим доказательство для сортовой дуальности, для сверточной все проходит дословно). По условию теоремы задана формула A исходного языка и ее вывод из аксиом исходного языка. Сама формула является последней в дереве вывода, пусть она получена на шаге n — последнем шаге вывода, на котором использованы либо правило вывода modus ponens, либо правило Gen. Если применялось правило modus ponens, то имеются две формулы B и $B \supset A$, на основании которых получена формула A. Тогда дуальная для A формула DA на основании предложения 4 выводится из формул DB, $DB \supset DA$ по правилу modus ponens. Указанный случай применения правила Gen дает тот же результат выводимости формулы DA из формулы, дуальной той формуле, из которой выведена в этом случае формула A. Теперь мы рассмотрим формулы, из которых выведена формула A, их вывод содержит менее чем n шагов. Повторяя проведенный шаг, мы по заданному выводу формулы A будем приходить к аксиомам исходного языка, но по предложению 3 мы в листьях дерева из дуальных формул получаем аксиомы. Таким образом, вывод формулы A переводится в вывод дуальной формулы DA. Теорема доказана.

Следствие. Если выводима формула A в исходном языке, то ей дуальная формула в том же языке DA (соответственно, BA) также выводима.

Нетрудно видеть, что повторное применение операций D и B дает копию исходной склейки, применение D и потом B дает копию склейки, полученной применением к исходной склейке сначала B и потом D, применение D или B к склейке, полученной применением D и B, дает копию исходной склейки. Для строгого рассмотрения примеров склеек, в частности, для нейронных сетей необходимо изложить подходящие варианты интерпретаций формального языка склеек, поскольку приведенное выше изложение проходит в рамках теории доказательств. Достаточно формальное применение дуальностей склеек для построения сопряженных графов С. Осовского изложено кратко в [5], развернутое опирающееся на теорию моделей изложение требует отдельной статьи. Некоторые примеры тем не менее приведены ниже.

Примеры

Имеется естественный класс примеров склеек (навеянный теорией нейронных сетей), построенных из имеющейся категории, в которых свертками, помимо обычной композиции, являются переведенные в свертки операцией M стрелки категории. Рассмотрим его на примере категории конечномерных векторных пространств над полем P. Здесь прямоугольные матрицы стрелок из $\mathrm{Hom}(P^m,P^n)$ рассматриваются как полистрелки с m входами и n выходами. Вычисление возможных сверток (отвечающих стрелкам $s\colon R^{\Sigma_n}\to R^{\Sigma_r}$) p полистрелок $f_i\colon R^m\to R^n$ (входы для свертки) и q полистрелок $g_j\colon R^r\to R^t$ (выходы для свертки) осуществляется обычной композицией матриц $f_i s_{nrj} g_j$, где s_{ab} являются блоками матрицы $s=[\dots[s_{ab}]\dots]$, представляющей морфизм $s\colon R^{n_1}\otimes\dots\otimes R^{n_r}\to R^{r_1}\otimes\dots\otimes R^{r_t}$.

Рассмотрим пример сетей Хопфилда, имеющих обратные связи. Такая сеть имеет один слой из n нейронов с n входами и одним выходом, при этом работает в один или несколько тактов, на каждом такте на вход подаются значения, полученные на предыдущем такте, до тех пор пока на выходе каждый последующий раз не будут одни и те же значения [4].

Предложение. Сеть Хопфилда является моделью следующего гребня склейки (для переменных, помимо x, a, использованы b, u, относящиеся к свертке; используются верхние левые индексы):

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}a_k^{(1,k)} = C^{(1,k)}\,{}^{i}x_k \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} {}^{i}a_{n+1}^{(2,1)} = C^{(2,1)}\,{}^{i}x_{n+1} \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}x_{n+1} = {}^{i}x_k \;\wedge$$

$$\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}b_k'^{(2,k)} = C'^{(2,k)}\,{}^{i}u_k' \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} {}^{i}b_0'^{(1,0)} = C'^{(1,0)}\,{}^{i}u_0' \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}u_0' = {}^{i}u_k' \;\wedge$$

$$\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}b_k'^{(2,k)} = {}^{k}a_i^{(1,i)}.$$

Проведение свертки приводит к гребню с операцией (получаемой из операций склейки, весовой, перестановочной и отвечающей (см. (8.3) в [4]) функции активации нейронов), переходящей при интерпретации в (8.3) из [4]. Для нейронных сетей Хопфилда, имеющих два (и более) такта, соответствующая формула получается отвечающей обычной композиции сверткой двух (и более) копий приведенного гребня.

Заключение

В работе предложена аксиоматическая теория первого порядка в классической логике для нейронных сетей (операции, аксиомы и так далее), найдены три вида дуальности и доказаны в рамках теории доказательств отвечающие дуальностям принципы двойственности, имеющие приложения для вычислений производных в методе обратного распространения ошибки для произвольной из сетей, где этот метод можно применять. Аксиоматика и язык опирается на теорию категорных склеек, являющуюся математическим аппаратом развиваемых автором категорных систем, формализующих, в частности, теорию функциональных систем П.К. Анохина, явившихся полноценным вариантом кибернетики задолго до работ Н. Винера. Отметим, что частный случай полисклеек — бинарные склейки — рассмотрен в [12]. Данная работа представлена в виде доклада на международной научной конференции «Математические идеи академика П.Л. Чебышева, их приложения в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта» (Обнинск, 14–16 мая 2026 г.) [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Анохин П. К. *Избранные труды: Кибернетика функциональных систем* / Под ред. К. В. Судакова. М.: Медицина; 1998. 400 с.
2. Толоконников Г. К. Категорные склейки, категорные системы и их приложения в алгебраической биологии. *Биомашсистемы.* 2021;5(1):148–235.

3. Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Science & Business Media, 1998. 314 p. ISBN: 9780387984032.
4. Осовский С. *Нейронные сети для обработки информации*. М.: Горячая линия — Телеком; 2017. 448 с.
5. Tolokonnikov G. K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020;938:259–267. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2.
6. Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. *Принципы системной организации функций*. М.: Наука; 1973. С. 5–61.
7. Месарович М. *Общая теория систем: математические основы*. М.: Мир; 1978. 311 с.
8. Szabo M. E. Polycategories. *Communications in Algebra*. 1975;3(8):663–689.
9. Garner R. Polycategories via Pseudo-Distributive Laws. *Adv. Math*. 2008;218(3):781–827.
10. Hatcher W. S. *The Logical Foundations of Mathematics*. Pergamon Press, 1982. 320 p.
11. Галушкин А. И. Нейронные сети: основы теории. М.: Горячая линия — Телеком; 2017. 496 с.
12. Толоконников Г. К. Направленные бинарные категорные склейки, принцип двойственности и категорная модель нейронных сетей. *Системная информатика*. 2025;27:15–58. DOI: https://doi.org/10.31144/si.2307-6410.2025.n27.p15-58.
13. Толоконников Г. К. Логическая природа нейронных сетей. *Математические идеи П.Л. Чебышёва, их приложение в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта: сборник тезисов конференции*. Обнинск, 14–16 мая 2026 г. М.: НИЯУ МИФИ; 2026:48–49.