ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗОНАХ ПОДГОТОВКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

М. И. Гапеев
Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5798-7166, ✍ *gapeev.sci@yandex.ru*

Аннотация: разработан параллельный алгоритм моделирования предсейсмических деформаций земной коры. Алгоритм основан на численной схеме решения статической задачи теории упругости методом конечных элементов. Программная реализация опирается на технологию Message Passing Interface, разбиение исходной области моделирования на «поддомены» и решение распределенной системы линейных алгебраических уравнений. Регрессионный анализ сложности алгоритма показал, что она близка по времени к линейной и составляет $O(N^{1.17})$, сложность по памяти в диапазоне сеток с количеством элементов от $\simeq 10^5$ до $\simeq 10^8$ практически строго линейна — $O(N^{0.985})$. Статистический анализ эффективности показал, что наиболее оптимально использование от 6 до 8 вычислительных потоков. Время вычисления при этом составляет около 5 минут, а ускорение — примерно 2.9 на сетке с количеством элементов $18 \cdot 10^7$. Эффективность монотонно убывает и после 9 потоков составляет менее 0.3. Стоимость демонстрирует практически линейный рост. Алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассмотренном диапазоне размеров сеток и потоков.

Ключевые слова: параллельный алгоритм, сложность и эффективность, метод конечных элементов.

Благодарности: работа выполнена за счет государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

Для цитирования: Гапеев М. И. Параллельный алгоритм численного моделирования деформационных процессов в зонах подготовки землетрясений. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):64–70.

Поступила в редакцию: 07.08.2026. *В окончательном варианте: 22.09.2026.*

PARALLEL NUMERICAL SIMULATION OF PRESEISMIC DEFORMATION IN EARTHQUAKE-PRONE AREAS

M. I. Gapeev
Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5798-7166, ✍ *gapeev.sci@yandex.ru*

Abstract: we studied the parallel numerical simulation of preseismic deformation processes in earthquake-prone areas. We developed a parallel algorithm based on a numerical scheme for solving the static elasticity problem using the finite element method. The software implementation uses the Message Passing Interface (MPI) and partitions the computational domain into subdomains, with each process solving a corresponding part of the resulting distributed system of linear algebraic equations. Regression analysis showed that the algorithm has nearly linear time complexity, amounting to $O(N^{1.17})$. Its memory complexity over the range of meshes with $\approx 10^5$ to $\approx 10^8$ elements was almost strictly linear, at $O(N^{0.985})$. Statistical analysis of parallel efficiency showed that the optimal number of computational processes was between 6 and 8. Under these conditions, the computation time was approximately 5 min, and the speedup was about 2.9 for a mesh containing $18 \cdot 10^7$ elements. Parallel efficiency decreased monotonically and fell below 0.3 when more than 9 processes were used. The cost increased almost linearly with the number of processes. The algorithm was therefore not cost-optimal over the considered ranges of mesh sizes and numbers of computational processes.

Keywords: parallel simulation, complexity and efficiency, finite element method.

Acknowledgements: this study is part of a government order No. 124012300245-2 awarded to the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation.

Cite this article: Gapeev M. I. Parallel Numerical Simulation of Preseismic Deformation in Earthquake-Prone Areas. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):64–70.

Original article submitted: 07.08.2026. *Revision submitted: 22.09.2026.*

Введение

Механические процессы, протекающие в области очага будущего землетрясения, приводят к изменению напряженно-деформированного состояния горных пород. Эти изменения являются прямой или косвенной причиной возникновения вариаций различных геофизических полей, которые могут быть классифицированы как предсейсмические аномалии. Дальнейший их анализ создает базу для построения систем оценки сейсмической опасности и сейсмических рисков.

Так как в основе землетрясения лежат механические процессы, необходимо непосредственное исследование напряженно-деформированного состояния земной коры при его подготовке. Такие исследования проводят в том числе и методами математического моделирования. Их результаты позволяют более качественно анализировать и интерпретировать результаты геофизических наблюдений.

Развитие методов математического моделирования связано с разработкой эффективных и параллельных алгоритмов. Несмотря на то, что тема эффективного моделирования геофизических процессов достаточно широко освещена [1–6], вопросы разработки параллельных алгоритмов моделирования именно предсейсмических деформаций освещены слабо. Поэтому настоящее исследование сосредоточено на разработке параллельного алгоритма моделирования деформаций земной коры на заключительной стадии подготовки землетрясения.

Физическая постановка и определяющие уравнения

Рассмотрим очаг готовящегося землетрясения в виде системы массовых сил, приложенной к точке $\boldsymbol{\xi}$ упругого тела Ω с границей $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$. При этом Γ_p и Γ_q не пересекаются, описывают поверхность Земли $x_3 = 0$ и оставшуюся часть большого блока литосферы соответственно. Поверхность Γ_p свободна от напряжений в направлении x_3, а на Γ_q заданы условия скользящего закрепления.

Зачастую процесс подготовки землетрясения связывают с возникновением трещин, разрывов и дислокаций в области его будущего очага [7]. Поэтому при построении силового эквивалента разумно выбрать плотность распределения массовых сил f_i таким образом, чтобы она была ассоциирована с дислокационным процессом. Из теории упругости известно, что силовым эквивалентом дислокации является система девяти пар двойных сил [8]. Поэтому будем считать, что очаг готовящегося землетрясения — это система именно таких сил, распределенная в некотором объеме пород.

Выберем распределение плотности массовых сил как производную трехмерной нормированной функции Гаусса:

$$f_i = -M_{ik}\frac{\tilde{x}_k}{\sigma_n^5\sqrt{(2\pi)^3}}\exp\Big(-\frac{\tilde{x}_j\tilde{x}_j}{2\sigma_n^2}\Big), \quad i = 1,2,3,$$

где M_{ik} — тензор момента, а $\tilde{x}_j = x_j - \xi_j$.

Задача моделирования предсейсмических деформаций представляет собой следующую вариационную задачу статической теории упругости в $\overline{\Omega}$. *По заданным плотности вектора массовых сил* $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *и граничным условиям* $p_i : \Gamma_p \to \mathbb{R}, q_i : \Gamma_q \to \mathbb{R}$ *найти* $u_i \in \mathcal{S} = \{u_i \in H^1(\Omega) : u_i = q_i, \boldsymbol{x} \in \Gamma_q\}$ *такие, что для всех* $\omega_i \in \mathcal{V} = \{\omega_i \in H^1(\Omega) : \omega_i = 0, \boldsymbol{x} \in \Gamma_q\}$:

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{f}) - a(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}),\\ &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = \int_\Omega \omega_{(i,j)}[2\mu u_{(i,j)} + \lambda\delta_{ij}u_{(l,l)}]d\Omega,\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{f}) = \int_\Omega \omega_i f_i\ d\Omega,\\ &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}) = \int_\Omega \omega_{(i,j)}[2\mu q_{(i,j)} + \lambda\delta_{ij}q_{(l,l)}]d\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева первого порядка, $\lambda = \lambda(\boldsymbol{x})$, $\mu = \mu(\boldsymbol{x})$ — коэффициенты Ламе.

Численная схема

Пусть $\mathcal{S}^h$ и $\mathcal{V}^h$ — конечномерные аппроксимации пространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{V}$. Разобъем всю область моделирования на тетраэдры n-точками. С каждой из точек под номером A свяжем финитную функцию N_A. Множество этих функций будет составлять базис в пространствах $\mathcal{S}^h$ и $\mathcal{V}^h$:

$$v_i^h = \sum_{A\in\zeta-\zeta_{q_i}} N_A d_{iA},\ q_i^h = \sum_{A\in\zeta_{q_i}} N_A q_{iA},\ \omega_i^h = \sum_{A\in\zeta-\zeta_{q_i}} N_A c_{iA}, \tag{2}$$

где ζ — номера всех узлов, ζ_{q_i} — номера узлов, для которых заданы граничные условия на перемещения.

Подставим разложения (2) в (1). Учитывая, что соотношение должно выполняться при произвольных c_{iA}, получим систему линейных алгебраических уравнений на d_{jB}. Решение этой системы и будет составлять численную схему, реализующую метод конечных элементов:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}, \quad K_{AB} = a(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j),\\
&F_A = \int\limits_\Omega N_A f_i\ d\Omega - \sum_{B\in\zeta_{q_i}} a\Big(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j\Big)q_{jB},\\
&a(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j) = \int_\Omega \Big[\mu(\delta_{ij}N_{A,l}N_{B,l} + N_{A,j}N_{B,i}) + \lambda N_{A,i}N_{B,j}\Big]d\Omega,
\end{aligned}$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормированный базис в E^3.

Алгоритм моделирования

Программная реализация параллельного алгоритма моделирования предсейсмических деформаций основана на технологии Message Passing Interface (MPI). Основные шаги алгоритма следующие:

Шаг 1: инициализация `MPI`-среды.

Шаг 2: загрузка сетки из файла формата `.xdmf`.

Шаг 3: широковещательная рассылка базовой информации о сетке всем процессорам.

Шаг 4: построение графа смежности конечных элементов.

Шаг 5: распределение элементов между процессами.

Шаг 6: создание распределенной сетки с локальными элементами.

Шаг 7: определение соседних элементов и создание `ghost`-слоя для корректных вычислений на межпроцессорных границах.

Шаг 8: создание конечномерных пространств на основе распределенной сетки и базисных функций.

Шаг 9: параллельная сборка основной матрицы системы $\boldsymbol{K}$ и вектора массовых сил $\boldsymbol{F}$.

Шаг 10: синхронизация вкладов на межпроцессорных границах.

Шаг 11: решение распределенной системы линейных алгебраических уравнений.

Шаг 12: постобработка и сохранение результатов.

Оценка вычислительной сложности

Для анализа вычислительной сложности и эффективности алгоритма моделирования предсейсмических деформаций была проведена серия экспериментов на вычислительном сервере с двумя процессорами AMD EPYC 7313 с 16 физическими и 16 виртуальными ядрами. Эксперименты проводились в рамках одной вычислительной ноды, исключая виртуальные ядра процессора, поэтому максимально были задействованы 16 вычислительных потоков. Эксперименты проводились для различного числа потоков p и конечных элементов N. Расчетная схема и разбивка области моделирования $\overline{\Omega}$ представлены на рис. 1.

Будем проводить дальнейший анализ на основе оценок математических ожиданий в виде выборочных средних $\widehat{T}_{p,N}$ и $\widehat{M}_{p,N}$ для $n = 5$ повторений. Для оценки сложности рассмотрим серии экспериментов, проведенных в однопоточном режиме на сетках с разным количеством конечных элементов. Для предварительной оценки зависимости построим графики в двойном логарифмическом масштабе $(\log_{10}[N], \log_{10}[\widehat{T}_{p,N}])$ и $(\log_{10}[N], \log_{10}[\widehat{M}_{p,N}])$. Они представлены на

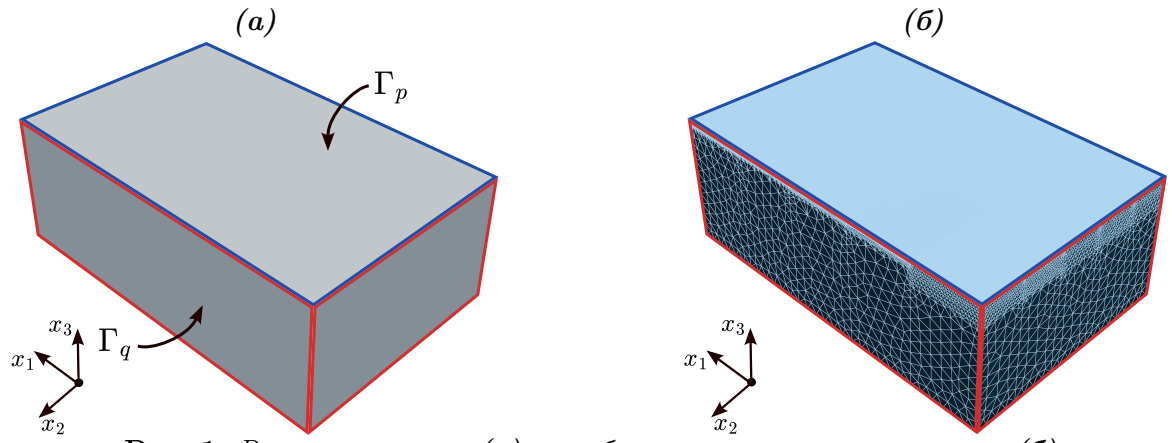


Рис. 1. *Расчетная схема* ***(а)*** *и разбивка конечными элементами* ***(б)***

рис. 2**а**,**б**. На первом графике (рис. 2**а**) усматривается линейная зависимость, поэтому будем строить линейную регрессию.

С использованием метода наименьших квадратов были получены следующие значения коэффициентов: регрессии $k = 1.17, b = -5.53$ и детерминации $R^2 = 0.9995$. Рассчитанный по критерию Стьюдента 95% доверительный интервал для коэффициента k равен $[0.95, 1.02]$, значение p-value для регрессионной модели по F-тесту много меньше 0.05. На основании этих результатов можно сделать вывод, что сложность алгоритма по времени практически линейна — $O(N^{1.17})$.

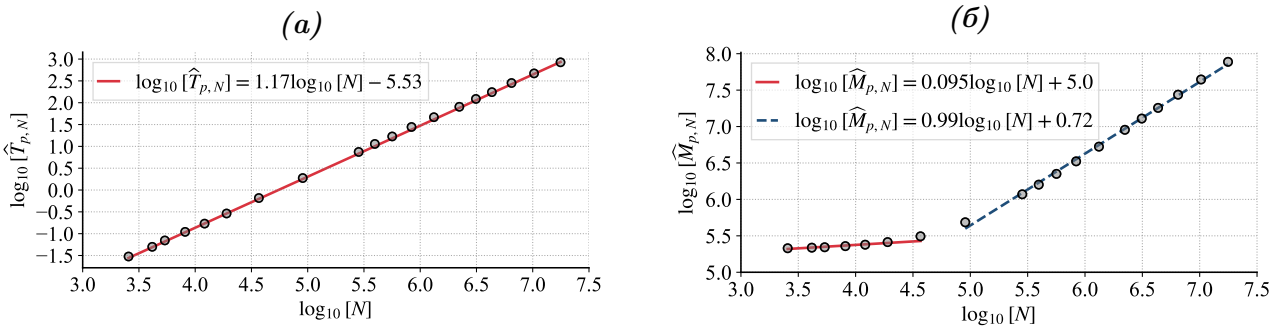


Рис. 2. *Затраты времени* ***(а)*** *и памяти* ***(б)*** *в двойном логарифмическом масштабе, а также их линии регрессии*

На рис. 2**б**, который отражает график зависимости требуемой оперативной памяти от размера сетки в двойном логарифмическом масштабе, отчетливо видны два сегмента: первый — от 3.41 до 4.56, а второй — от 4.96 до 7.25. Точки на этих сегментах визуально ложатся на прямые, но с разным наклоном. Поэтому проведем кусочно-линейную регрессию. Применение метода наименьших квадратов и статистического анализа для первой линии привело к следующим результатам: коэффициенты регрессии: $k_1 = 0.095, b_1 = 5.0$, коэффициент детерминации $R^2 = 0.919$, 95% доверительный интервал для k_1 равен $[0.065, 0.125]$, p-value для модели 0.0025 (<0.05). Для второй же линии: $k_2 = 0.985, b_2 = 0.717, R^2 = 0.997$, доверительный интервал k_2 равен $[0.952, 1.019]$, p-value много меньше 0.05.

На основании этого можно сделать следующие выводы: на втором сегменте $[4.96, 7.25]$ наблюдается практически строго линейная зависимость $O(N^{0.985})$ потребляемой оперативной памяти от размера сетки. На первом же сегменте $[3.41, 4.56]$ наклон прямой очень пологий $k = 0.095$. Это означает, что для такого количества конечных элементов доминирующими являются расходы на сборку матрицы жесткости и хранение промежуточных результатов итерационного метода решения системы линейных алгебраических уравнений.

Оценка эффективности

На рис. 3 представлен график зависимости времени вычисления тестового примера от количества потоков p при фиксированном значении числа конечных элементов $N = 18 \cdot 10^7$.

Красной областью обозначен 99% доверительный интервал по критерию Стьюдента с $k = 4$ степенями свободы.

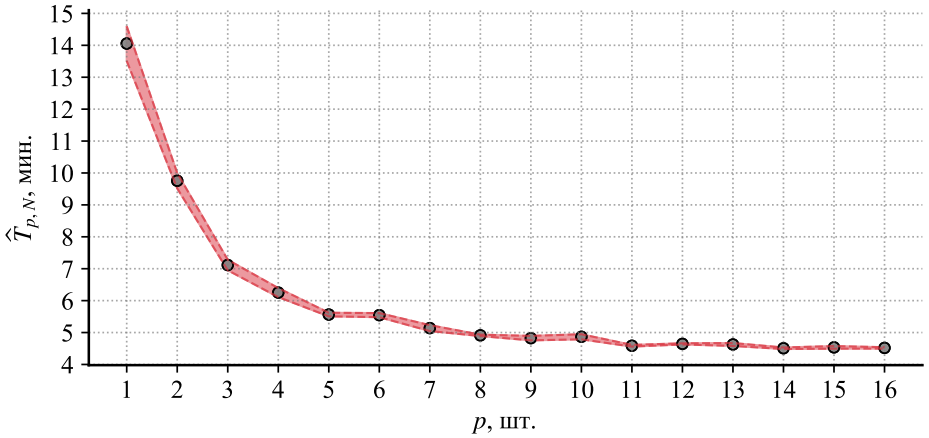


Рис. 3. *Выборочное среднее времени вычисления на разном количестве ядер и 99% доверительный интервал для математического ожидания*

Для анализа эффективности разработанного алгоритма использованы статистические оценки ускорения $\widehat{S}_{p,N}$, эффективности $\widehat{E}_{p,N}$ и стоимости $\widehat{C}_{p,N}$:

$$\widehat{S}_{p,N} = \frac{\widehat{T}_{1,N}}{\widehat{T}_{p,N}}, \quad \widehat{E}_{p,N} = \frac{\widehat{T}_{1,N}}{p\widehat{T}_{p,N}}, \quad \widehat{C}_{p,N} = p\widehat{T}_{p,N}.$$

Гистограммы распределений этих оценок представлены на рис. 4. Красным обозначены размеры доверительных интервалов, рассчитанные методом «bootstrap». Видно, что все интервалы достаточно узкие, что указывает на высокую воспроизводимость результатов.

Ускорение достигает насыщения при количестве потоков $p = 6 - 8$ (рис. 4**а**). Дальнейшее увеличение потоков дает незначительный прирост производительности. Максимальное ускорение, примерно в 3 раза, достигается при $p = 14 - 16$, время вычисления при этом составляет около 4.5 минут (рис. 3). Эффективность $\widehat{E}_{p,N}$ монотонно убывает и после $p = 9$ составляет менее 0.3 (рис. 4**б**). Стоимость $\widehat{C}_{p,N}$ демонстрирует практически линейный рост (рис. 4**в**). Результаты оценки относительной стоимости вычислений $\widehat{C}_{p,N}/\widehat{T}_{1,N}$ показали, что алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассматриваемом диапазоне размеров сеток и потоков.

Заключение

Разработан параллельный алгоритм моделирования предсейсмических деформаций, который основан на численном решении задачи теории упругости методом конечных элементов. Его программная реализация основана на технологии Message Passing Interface, разбиении исходной области моделирования на «поддомены» и решении распределенной системы линейных алгебраических уравнений.

Проведена оценка эмпирической сложности и эффективности разработанного алгоритма. В результате регрессионного и статистического анализа было установлено:

1) сложность алгоритма по времени близка к линейной и составляет $O(N^{1.17})$, сложность по памяти в диапазоне сеток с количеством элементов от 10^5 до 10^8 практически строго линейна — $O(N^{0.985})$;

2) наиболее оптимально использование от 6 до 8 вычислительных потоков. Время вычисления при этом составляет около 5 минут, а ускорение — примерно 2.9 на сетке с количеством элементов $18 \cdot 10^7$. Эффективность монотонно убывает и после 9 потоков составляет менее 0.3. Стоимость демонстрирует практически линейный рост;

3) алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассмотренном диапазоне размеров сеток и потоков.

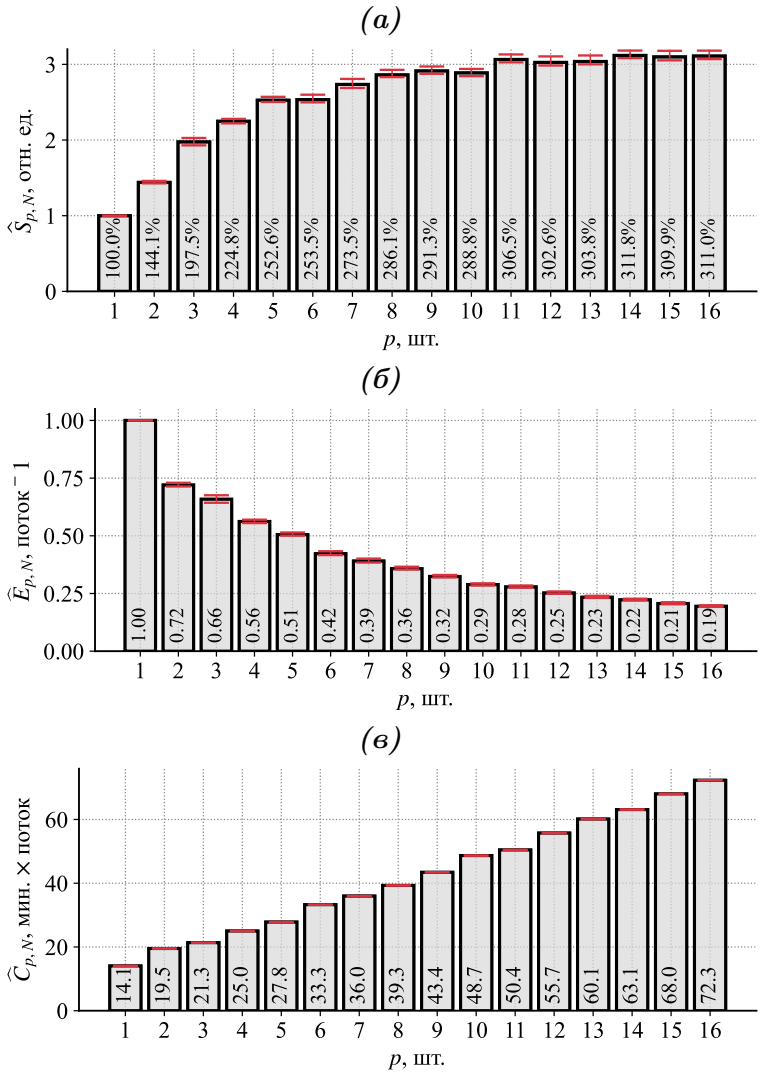


Рис. 4. *Гистограммы распределения оценок ускорения* $\widehat{S}_{p,N}$ ***(а)****, эффективности* $\widehat{E}_{p,N}$ ***(б)*** *и стоимости* $\widehat{C}_{p,N}$ ***(в)***

ЛИТЕРАТУРА

1. Key K., Ovall J. A Parallel Goal-Oriented Adaptive Finite Element Method for 2.5-D Electromagnetic Modelling. *Geophys. J. Int.* 2011;186(1):137–154. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2011.05025.x.
2. Asgari A., Bagheri M., Hadizadeh M. Advanced Seismic Analysis of Soil-Foundation-Structure Interaction for Shallow and Pile Foundations in Saturated and Dry Deposits: Insights from 3D Parallel Finite Element Modeling. *Structures.* 2024;69:107503. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.107503.
3. Failer L., Thomas R. A Parallel Newton Multigrid Framework for Monolithic Fluid-Structure Interactions. *J. Sci. Comput.* 2020;82:28. DOI: 10.1007/s10915-019-01113-y.
4. Fukuda D., Mohammadnejad M., Liu H., Zhang Q., Zhao J., Dehkhoda S., Chan A., Kodama J., Fujii Y. Development of a 3D Hybrid Finite-Discrete Element Simulator Based on GPGPU-Parallelized Computation for Modelling Rock Fracturing under Quasi-Static and Dynamic Loading Conditions. *Rock Mech. Rock Eng.* 2020;53(3):1079–1112. DOI: 10.1007/s00603-019-01960-z.
5. Твёрдый Д. А. Анализ эффективности гибридного параллельного алгоритма численного решения задачи Коши для эредитарных моделей объемной активности радона в рамках программного комплекса FEVO. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025;50(1):149–168. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168.
6. Tverdyi D. An Analysis of the Computational Complexity and Efficiency of Various Algorithms for Solving a Nonlinear Model of Radon Volumetric Activity with a Fractional Derivative of a Variable Order. *Computation.* 2025;13(11):252. DOI: 10.3390/computation13110252.

7. Соболев Г. А. Модель лавинно-неустойчивого трещинообразования — ЛНТ. *Физика Земли*. 2019;1:166–179.
8. Segall P. *Earthquake and Volcano Deformation*. Princeton: Princeton University Press; 2010. 432 p.