ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

К. В. Губарева[1,а], **Е. Ю. Просвиряков**[2,3,б]

[1] *Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация*

[2] *Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Российская Федерация*

[3] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9845-8372,* ✍ *r.kristina2017@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801, evgen_pros@mail.ru*

Аннотация: работа посвящена численному исследованию стационарного термокапиллярного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с неподвижной твердой нижней границей и свободной поверхностью. Рассматривается режим ползущего течения. Единственной движущей силой является поверхностное натяжение, зависящее от температуры. Для описания течения применяется квазиодномерное разложение полей скорости, температуры и давления по поперечной координате, сохраняющее квадратичные по продольной переменной члены. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом коллокации четвертого порядка, реализованным в среде MATLAB с помощью решателя bvp4c. Вычислительный алгоритм используется для пяти значений числа Марангони. Получены профили вертикальной и горизонтальной компонент скорости, а также модовых температуры и давления. Построены двумерные распределения функции тока, давления и температуры. Показано, что в рассмотренном диапазоне параметров формируются два встречных потока, разделенных уровнем нулевой горизонтальной скорости. Определены положения соответствующих нулей. Анализ невязки исходных уравнений подтверждает высокую точность численного решения. Исследована зависимость структуры течения от управляющего параметра. Результаты могут быть использованы для верификации численных методов при решении задач термокапиллярной конвекции.

Ключевые слова: термокапиллярная конвекция, метод коллокации, краевая задача, MATLAB bvp4c, численное моделирование.

Для цитирования: Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю. Численное моделирование стационарного термокапиллярного течения в плоском канале в линейном приближении. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):71–78.

Поступила в редакцию: 31.08.2026. *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

NUMERICAL SIMULATION OF STEADY THERMOCAPILLARY FLOW IN A FLAT CHANNEL USING LINEAR APPROXIMATION

K. V. Gubareva[1,a], **E. Yu. Prosviryakov**[2,3,b]

[1] *Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*

[2] *Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation*

[3] *Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9845-8372,* ✍ *r.kristina2017@mail.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801, evgen_pros@mail.ru*

Abstract: we performed a numerical study of steady thermocapillary flow of a viscous incompressible fluid in a flat channel with a stationary solid bottom and a free surface. We considered the creeping-flow regime, in which the only driving force was temperature-dependent surface tension. We used a quasi-one-dimensional expansion of the velocity, temperature, and pressure fields in the transverse coordinate, retaining terms up to second order in the longitudinal coordinate. We solved the resulting boundary-value problem for a system of ordinary differential equations using a fourth-order collocation method implemented in MATLAB with the bvp4c solver. We applied the computational

algorithm for five values of the Marangoni number. We obtained profiles of the vertical and horizontal velocity components and the modal temperature and pressure, and constructed two-dimensional distributions of the stream function, pressure, and temperature. We found that two counter-flowing streams formed over the range of parameters considered, separated by a level of zero horizontal velocity, and determined the positions of the corresponding zeros. Analysis of the residuals of the governing equations confirmed the high accuracy of the numerical solution. We investigated the dependence of the flow structure on the governing parameter. The results provide a benchmark for testing numerical schemes for thermocapillary convection.

Keywords: thermocapillary convection, collocation method, boundary value problem, MATLAB bvp4c, numerical simulation.

Cite this article: Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Numerical Simulation of Steady Thermocapillary Flow in a Flat Channel Using Linear Approximation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):71–78.

Original article submitted: 31.08.2026. *Revision submitted: 20.09.2026.*

Введение

Во многих теоретических и прикладных задачах гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости получить аналитическое решение не удается. Это относится, прежде всего, к течениям со свободными границами, где форма границы заранее неизвестна. Краевые условия для описания течений жидкости со свободной границей являются нелинейными, что затрудняет поиск аналитических решений и применение известных классов точных решений уравнений Навье–Стокса. Поэтому для исследования таких течений вязкой несжимаемой жидкости широко используются численные методы интегрирования уравнений гидродинамики [1–4].

При описании и исследовании течений со свободной границей (поверхностью) особое место занимают задачи, в которых движение жидкости вызвано градиентами поверхностного натяжения (эффект Марангони–Гиббса). Этот эффект, называемый часто термокапиллярным, играет определяющую роль в процессах выращивания кристаллов, испарения тонких пленок и в экспериментах при пониженной гравитации [5–8]. Даже в простейшем случае геометрии течения жидкости, например в плоском горизонтальном слое, термокапиллярная конвекция приводит к формированию сложных стратифицированных полей скорости, температуры и давления. Эти гидродинамические поля, в свою очередь, влияют на тепломассоперенос и устойчивость технологических процессов [9].

Количественный анализ термокапиллярных течений требует совместного решения уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. Традиционно для описания конвективных течений Марангони используется система уравнений Обербека–Буссинеска. В нелинейных режимах аналитические подходы интегрирования уравнений Обербека–Буссинеска обычно перестают работать или очень сложны, а вычислительные затраты при численном интегрировании чрезвычайно быстро растут [10]. Учитывая сложность получения как аналитических, так и численных решений уравнений Обербека–Буссинеска, важно располагать надежными (устойчивыми) численными алгоритмами, которые можно проверить на задачах с известным точным решением. Такие задачи принято называть эталонными. Они позволяют оценить порядок аппроксимации, выявить ошибки в постановке граничных условий и убедиться в корректности программной реализации численного метода [11, 12].

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся многие краевые задачи механики установившихся течений жидкости, эффективны методы коллокации. Основная идея этих методов состоит в том, чтобы искать решение в виде кусочно-полиномиальной функции. Такая функция должна точно удовлетворять уравнениям в выбранных точках расчетной области [13–15][. Коллокационные методы обеспечивают высокий порядок точности при умеренных вычислительных затратах. Они успешно применяются при моделировании пограничных слоев, течений в каналах и решении задач тепловой конвекции при исследовании установившихся (стационарных) режимов [16, 17]. Для решения ряда задач в среде MATLAB ранее был реализован решатель bvp4c, который использует коллокацию четвертого порядка, автоматически адаптирует сетку и контролирует невязку [18–20]. Этот инструмент уже применялся для расчета

гидродинамических и тепловых задач и показал возможность устойчивого численного интегрирования [21, 22].

Отдельные геометрические конфигурации областей термокапиллярных течений в каналах допускают аналитическое решение [23, 24]. Такие случаи особенно удобны для верификации численных схем, поскольку появляется возможность прямого сравнения численных и точных результатов.

Цель работы — исследовать структуру стационарного термокапиллярного течения в плоском слое с неподвижным твердым дном и свободной поверхностью, а также оценить погрешность алгоритма коллокации (решатель bvp4c) при решении соответствующей сопряженной системы уравнений.

Постановка задачи

Рассмотрим плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в слое $-1 \leq z \leq 0$. Нижняя граница $z = -1$ — неподвижная твердая граница, на которой задаются условия прилипания. Верхняя граница $z = 0$ свободна. Нормальное напряжение на ней равно нулю, а касательное — пропорционально продольному градиенту температуры. Влияние силы тяжести исключено из рассмотрения, так что единственной причиной движения служит эффект Марангони.

Канал предполагаем сильно вытянутым по координате x. Отношение высоты к длине $\delta = h/L \ll 1$. Применим квазиодномерное разложение полей, сохраняя члены порядка x^2. Следуя устоявшейся методике, решение ищем в виде:

$$u(x,z) = -xw'(z),\ w(x,z) = w(z),$$

$$T(x,z) = T_0(z) + x^2 T_{11}(z),\ P(x,z) = P_0(z) + x^2 P_{11}(z),$$

где $w(z)$ — вертикальная скорость, u — горизонтальная скорость, T — температура, P — давление, а $T_{11}(z)$ и $P_{11}(z)$ — амплитуды соответствующих квадратичных мод.

Подстановка этих разложений в стационарные линеаризованные уравнения Навье–Стокса и уравнение теплопроводности приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$w''' = -P_{11},\ P_{11}' = T_{11},\ T_{11}'' = 0,$$

$$P_0' = T_0 + \delta^2 w'',\ T_0'' = -\delta^2 T_{11}.$$

Здесь $\delta = 0.1$ — фиксированный геометрический параметр, штрих обозначает дифференцирование по z. Граничные условия:

$$z = -1 : w = 0,\ w' = 0,\ T_0' + \frac{1}{2} T_{11} = 0,$$

$$z = 0 : w = 0,\ P_{11} = 0,\ T_{11} + 1 = 0,\ w'' + Mg = 0,$$

$$T_0' = \frac{1}{2},\ P_0 = 1.$$

Безразмерный параметр Mg — число Марангони. В данной работе расчеты выполнены для $Mg = 0.01,0.1,1,5,10$.

Численная реализация

Преобразуем систему к нормальной форме Коши, введя вектор неизвестных размерности 9:

$$y(z) = (w,w',w'',P_{11},T_{11},T_{11}',P_0,T_0,T_0')^T.$$

Правая часть системы принимает вид:

$$\frac{dy}{dz} = f(z,y) = \left(y_2\ y_3\ -y_4\ y_5\ y_6\ 0\ y_8 + \delta^2 y_3\ y_9\ -\delta^2 y_5\right).$$

Граничные условия в точках $z = -1$ и $z = 0$ записываются как:

$$y_1(-1) = 0,\ y_2(-1) = 0,\ y_8(-1) + \frac{1}{2}y_5(-1) = 0,$$

$$y_1(0) = 0,\ y_4(0) = 0,\ y_5(0) + 1 = 0,\ y_3(0) + Mg = 0,$$

$$y_8(0) = 0.5,\ y_7(0) = 1.$$

Численное интегрирование выполнено с помощью решателя bvp4c (MATLAB). Метод коллокации использует кусочно-полиномиальные функции четвертой степени. Выбрана равномерная сетка из 151 узла. Параметры допусков: относительная погрешность 10^{-8}, абсолютная 10^{-10}. Начальное приближение задано в виде полинома, удовлетворяющего основным граничным условиям; итерационный процесс во всех случаях сходится за несколько шагов.

Результаты численного моделирования

На рис. 1 представлены полученные численно профили $w(z)$, $u(z) = -w'(z)$, $T_{11}(z)$ и $P_{11}(z)$ для пяти значений Mg. Вертикальная скорость w обращается в нуль на границах канала. При $Mg = 0.01$ внутри слоя она принимает небольшие отрицательные значения, а начиная с $Mg = 0.1$ профиль становится положительным и его амплитуда существенно возрастает с ростом Mg. Горизонтальная скорость u один раз меняет знак: в нижней части канала она положительна, в верхней — отрицательна. Точка нуля $u(z) = 0$ разделяет два встречных потока. Температурная мода T_{11} демонстрирует строго линейный ход, а модовое давление P_{11} — квадратичную зависимость от z, что согласуется со структурой исходных уравнений.

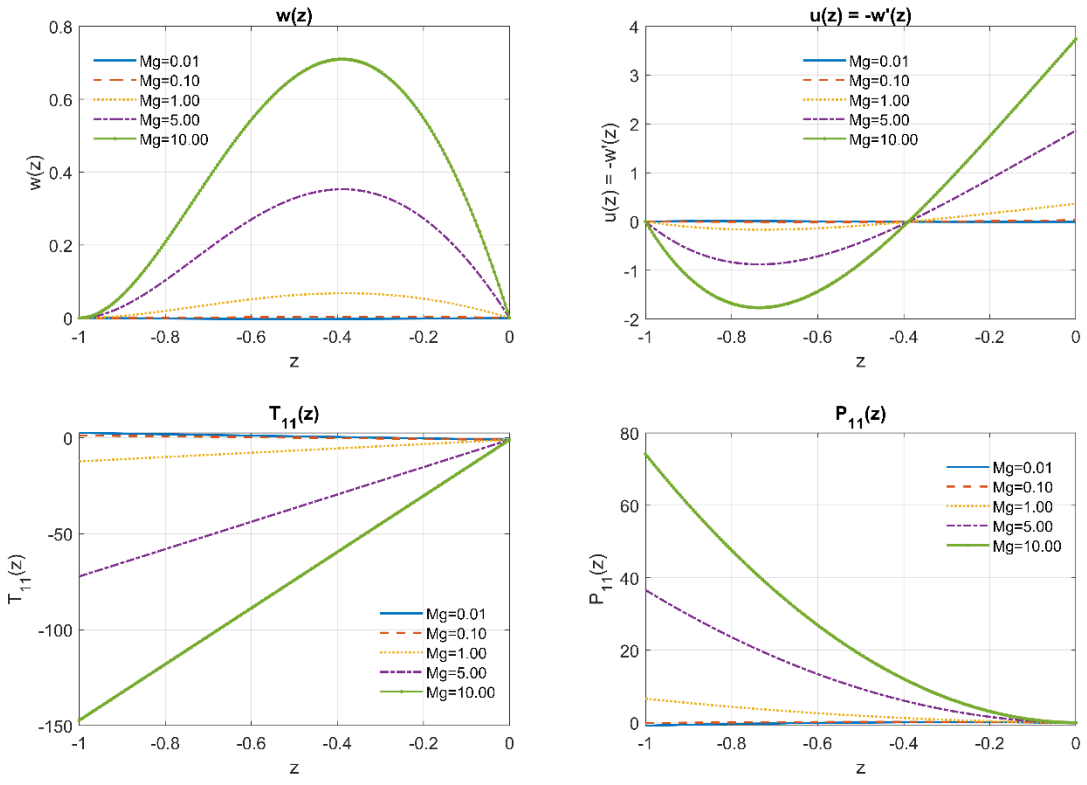


Рис. 1. *Профили* $w(z)$, $u(z) = -w'(z)$, $T_{11}(z)$ *и* $P_{11}(z)$ *для* $Mg = 0.01, 0.1, 1, 5, 10$

На основе численных профилей построены двумерные поля для трех значений Mg = 0.1,1,10. Функция тока $\psi(x,z) = -xw(z)$ изображена на рис. 2. Изолинии ψ имеют гиперболический вид и не замыкаются, поэтому вихревые ячейки в строгом смысле отсутствуют. Нулевые изолинии соответствуют осям $x = 0$ и границам $z = -1,0$, где $w = 0$. Смена знака горизонтальной скорости $u(z)$ в точке $z = z_0$ указывает на наличие двух встречных потоков: ниже этого уровня

жидкость движется в одном направлении, выше — в противоположном, причем направление зависит от знака координаты x. С усилением термокапиллярного эффекта абсолютные значения w растут, что приводит к сгущению изолиний ψ в центральной части слоя.

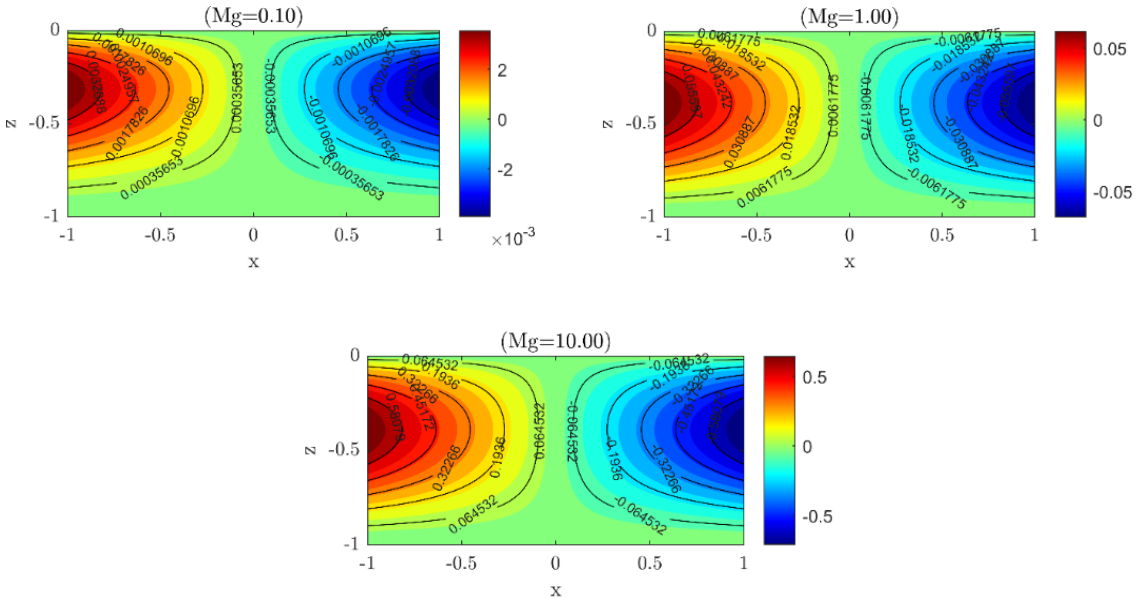


Рис. 2. *Изолинии функции тока* $\psi(x,z)$ *для* $Mg = 0.1, 1, 10$

Поле давления показано на рис. 3. Квадратичная зависимость от x приводит к заметной поперечной неоднородности: на периферии канала ($x = \pm 1$) давление по модулю возрастает. При больших Mg эта неоднородность становится более выраженной.

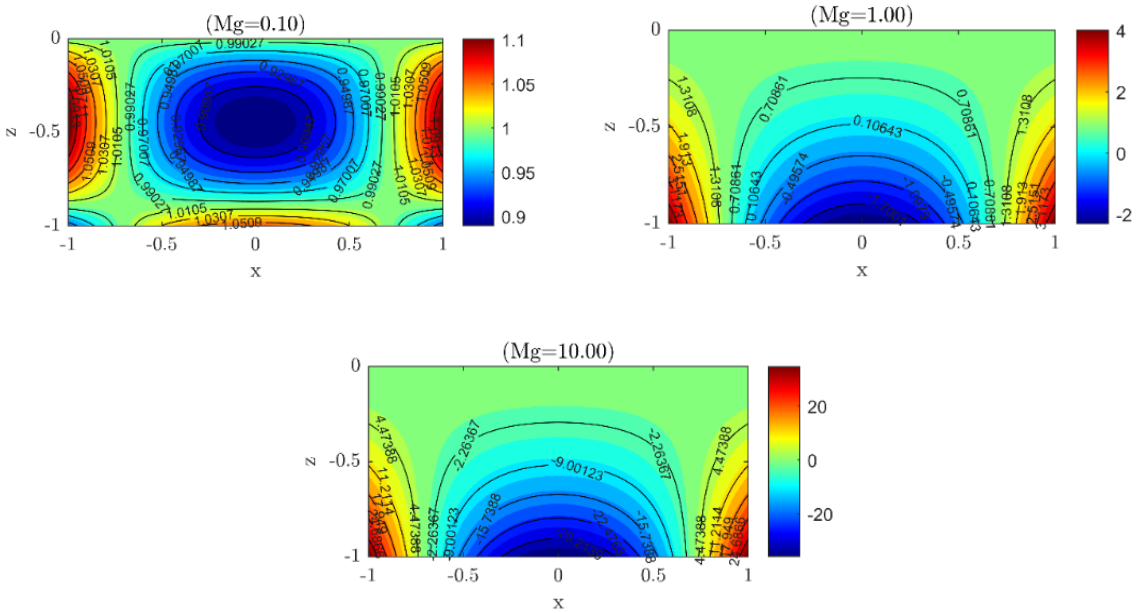


Рис. 3. *Изолинии давления* $P(x,z)$ *для* $Mg = 0.1, 1, 10$

Температурное поле приведено на рис. 4. Изотермы искривлены, что отражает конвективный перенос тепла. В приосевой области температура выше, чем у боковых границ, если $T_{11} > 0$, и наоборот. С ростом Mg градиенты температуры увеличиваются, особенно в верхней половине слоя.

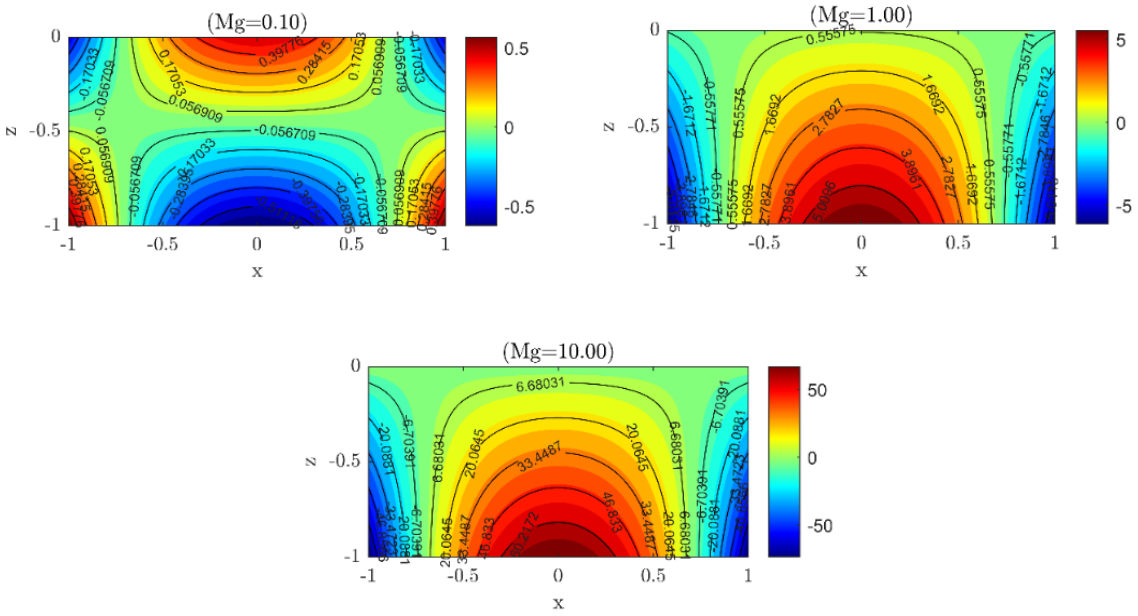


Рис. 4. *Изолинии температуры $T(x,z)$ для $Mg = 0.1, 1, 10$*

Внутренние нули функции $u\,(z)$ определены по перемене знака с линейной интерполяцией между соседними узлами сетки. Для каждого Mg найден ровно один корень внутри интервала $(-1{,}0)$; его координаты приведены в таблице.

Таблица

Численные координаты внутренних нулей $u(z)$

Mg	0.01	0.10	1.00	5.00	10.00
z_0	-0.505188	-0.312916	-0.384264	-0.388382	-0.388878

При $Mg = 0.01$ нуль расположен вблизи середины канала; с ростом Mg до 0.1 он смещается вверх, а затем, при $Mg \geq 1$, его положение стабилизируется около $z \approx -0.388$. Толщина нижней зоны встречного потока составляет примерно 0.61 высоты слоя, верхней — около 0.39. Это соотношение практически не меняется при дальнейшем усилении термокапиллярного эффекта.

Внутренняя точность численного решения проверялась путем вычисления невязки правых частей системы ОДУ в точках коллокации. Для примера, при $Mg = 1.00$ максимальная невязка среди всех девяти уравнений составила 0.0010^0 при выводе с двумя десятичными знаками, что соответствует значениям порядка 10^{-15} — машинному нулю. Это свидетельствует о том, что полученное решение с высокой точностью удовлетворяет исходным дифференциальным уравнениям.

Обсуждение результатов

Результаты численного моделирования дают физически согласованное представление о термокапиллярном течении в линейном приближении. При численном исследовании установившихся конвективных потоков в слое жидкости регистрируются два встречных потока. Противотечения в жидкости возникают как прямое следствие баланса вязких и термокапиллярных сил. Их количество остается неизменным во всем рассмотренном диапазоне чисел подобия Mg. Положение уровня (границы), разделяющего эти противотоки, быстро стабилизируется с ростом параметра, что указывает на структурную устойчивость конвективного режима.

Разработанный численный алгоритм на основе метода коллокации четвертого порядка со 151 узлом продемонстрировал отличные вычислительные характеристики: невязка уравнений сведена к машинному нулю. Это особенно важно для последующего применения метода к нели-

нейным задачам, поскольку минимальная невязка в линейном случае гарантирует корректную работу численной схемы с основными операторами задачи.

Заключение

С помощью метода коллокации выполнено численное моделирование установившегося (стационарного) термокапиллярного течения в плоском горизонтальном канале в линейном приближении. Иными словами, рассмотрены конвективные течения Марангони в приближении Стокса. Получены профили скорости $w(z)$ и пространственного градиента $u(z)$, модовой температуры $T_{11}(z)$ и модового давления $P_{11}(z)$ для пяти характерных значений числа Марангони в диапазоне от 0.01 до 10. Построены изолинии гидродинамических полей для функции тока, давления и температуры. Анализ гидродинамических полей показал наличие двух встречных потоков, разделенных уровнем нулевой горизонтальной скорости. Таким образом, в жидкости существует застойная точка (точка покоя). При исследовании медленных конвективных течений Марангони были определены координаты внутренних нулей горизонтальной скорости, показавшие слабую зависимость от Mg при $Mg \geq 1$. Максимальная невязка уравнений не превышает машинного нуля, что подтверждает высокую внутреннюю точность решения. Разработанный численный аппарат может служить основой для последующего анализа нелинейных и нестационарных режимов термокапиллярной конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ferziger J. H., Perić M., Street R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer; 2002. 596 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99693-6.
2. Temam R. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland; 2001. 500 p.
3. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer; 1988. 567 p. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8.
4. Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. New York: McGraw-Hill; 1995. 547 p.
5. Davis S. H. Thermocapillary Instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1987;19:403–435. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002155.
6. Schatz M. F., Neitzel G. P. Experiments on Thermocapillary Instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2001;33:93–127. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.93.
7. Kuhlmann H. C. *Thermocapillary Convection in Models of Crystal Growth*. Berlin: Springer; 1999. 226 p. DOI: 10.1007/BFb0109562.
8. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers. Part 1. Convective Instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*. 1983;132:119–144. DOI: 10.1017/S0022112083001512.
9. Wanschura M., Kuhlmann H. C., Rath H. J. Three-Dimensional Instability of Axisymmetric Buoyant Convection in Cylinders Heated from Below. *Journal of Fluid Mechanics*. 1996;326:399–415. DOI: 10.1017/S0022112096008373.
10. Peyret R. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. New York: Springer; 2002. 432 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-6557-1.
11. Ascher U. M., Mattheij R. M. M., Russell R. D. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Philadelphia: SIAM; 1995. 595 p. DOI: 10.1137/1.9781611971231.
12. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP Solver Based on Residual Control and the MATLAB PSE. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2001;27(3):299–316. DOI: 10.1145/502800.502801.
13. De Boor C., Swartz B. Collocation at Gaussian Points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1973;10(4):582–606. DOI: 10.1137/0710052.
14. Gladwell I., Shampine L. F., Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge: Cambridge University Press; 2003. 263 p. DOI: 10.1017/CBO9780511615542.
15. Shampine L. F., Gladwell I., Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB*. New York: Cambridge University Press; 2003.

16. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM; 2000. 165 p. DOI: 10.1137/1.9780898719598.
17. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd ed. New York: Dover Publications; 2001. 688 p.
18. Shampine L. F., Reichelt M. W., Kierzenka J. *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c*. 2000. Режим доступа: https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/index.html.
19. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP Solver That Controls Residual and Error. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2008;3(1–2):27–41.
20. Ascher U. M., Petzold L. R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Philadelphia: SIAM; 1998. 314 p. DOI: 10.1137/1.9781611971392.
21. Gubareva K. V., Eremin A. V. Numerical Solution of the Heat Conduction Problem in a Porous Plate with Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.
22. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Y., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow of a Viscous Incompressible Fluid in an Infinite Horizontal Layer with Permeable Boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025;(5):6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028.
23. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017;21(4):736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568.
24. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations with the Linear Dependence of Velocity Components on Two Space Variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2009;43(5):642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.