ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НОРМАЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

А. Л. Леготин[а], Г. К. Виноградов[б]

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»», г. Москва, Российская Федерация

[а] ✍ *andrlegotin@yandex.com,* [б] *vinogradovgk@mail.ru*

Аннотация: ставится задача интерполяции нормали вдоль ребра криволинейного треугольника, обсуждаются проблемы интерполяции нормалей. Решена интерполяция нормали пространственной кривой.

Ключевые слова: интерполяция нормали, PN-кривая, треугольник Безье, криволинейный треугольник.

Для цитирования: Леготин А. Л., Виноградов Г. К. Интерполяция нормали пространственной кривой. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):92–100.

Поступила в редакцию: 25.08.2026. В окончательном варианте: 27.09.2026.

INTERPOLATION OF NORMALS ALONG A 3D CURVE

A. L. Legotin[a], G. K. Vinogradov[b]

Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation

[a] ✍ *andrlegotin@yandex.com,* [b] *vinogradovgk@mail.ru*

Abstract: we solved the problem of interpolating the normal along the edge of a curvilinear and discusses other related problems.

Keywords: interpolation of the normal, PN-curve, Bezier triangle, curved point-normal triangles.

Cite this article: Legotin A. L., Vinogradov G. K. Interpolation of Normals Along a 3D Curve. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):92–100.

Original article submitted: 25.08.2026. Revision submitted: 27.09.2026.

Введение

При построении поверхности из криволинейных треугольников Безье требуется сшивка этих элементов на ребрах в целях обеспечения необходимой гладкости и непрерывности. Для этого производится расчет контрольных точек из соображений, изложенных в [1, с. 323, 368]. По этой методике два криволинейных треугольника сшиваются заданием тангенциальных плоскостей вдоль ребер — соответствующим расположением контрольных точек, определяющих эти плоскости. В итоге при построении контрольных точек криволинейного треугольника одновременно должны быть построены контрольные точки смежных треугольников.

Если тангенциальные плоскости у вершин определяются однозначно — по нормалям вершин, то срединные тангенциальные плоскости, а значит, и соответствующие контрольные точки — в зависимости от алгоритма. Контрольные точки могут быть рассчитаны отдельно для каждого смежного треугольника и сведены попарно по обеим сторонам ребра в ту или иную конфигурацию с помощью смешивающих функций, исходя из геометрии плоских треугольников и т.д.

Результат может быть искаженным, так как нормали в вершинах могут быть заданы одним способом (в том числе неизвестным) или произвольно (если требуется сформировать нужную геометрию), а тангенциальные плоскости на середине ребра в этом случае будут найдены другим способом, что *приведет к иной геометрии поверхности.* Все необходимые параметры корректнее определять начальными условиями — взаимным положением вершин и их нормалями, именно они в первую очередь должны влиять на вычисления.

Следовательно, если для точек ребра и нормалей ребра криволинейного треугольника существуют

$$f = r \tag{1}$$

и

$$g = \frac{N}{|N|}, \tag{2}$$

то они должны быть такими, чтобы совпадать для смежных треугольников, а значит, должны зависеть только от вершин ребра:

$$f = f(t,P_i,P_j,N_i,N_j) \tag{3}$$

$$g = g(t,P_i,P_j,N_i,N_j), \tag{4}$$

где P_i и P_j — вершины ребер, а N_i и N_j — нормали в этих вершинах, $i \neq j$, $0 \leq t \leq 1$.

При заданных в таком виде f и g для расчета внутренних контрольных точек не будет необходимости рассматривать смежные треугольники. Вычисленные с помощью g нормали на ребрах определят тангенциальные плоскости, с опорой на которые построятся внутренние контрольные точки. Задача упрощается, при этом соблюдаются начальные условия.

f может быть элементарно получена как сторона криволинейного треугольника.

g необходимо сформулировать.

Проблема интерполяции нормали вдоль ребра

Как описано выше, для корректного построения криволинейного треугольника на одном из этапов требуется значение нормали на точках ребра. Но так как криволинейный треугольник еще не определен, нет возможности произвести непосредственное вычисление нормали поверхности вдоль ребра.

Vlachos A. и соавторы в [2] предлагают интерполировать нормаль треугольника Безье квадратичной функцией:

$$n(u,v) = \sum_{i+j+k=2} u^i v^j w^k n_{ijk} \quad = w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + v^2 n_{002} \quad + wun_{110} + uvn_{011} + wvn_{101}. \tag{5}$$

$$u,v,w \geq 0, w = 1 - u - v. \tag{6}$$

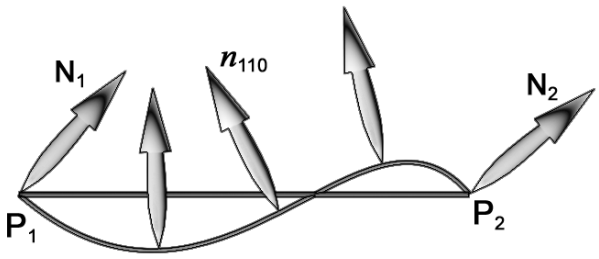


Рис. 1. *Заявленная интерполяция нормали [1]*

По ребрам криволинейного треугольника одна из барицентрических координат нулевая, возьмем для примера $v = 0$, и тогда нормаль:

$$n(u,0) = w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + wun_{110}, w = 1 - u. \tag{7}$$

Что можно записать как:

$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + (1-t)tN_{12}$, $0 \leq t \leq 1$, N_1 и N_2 — нормали вершин.

Коэффициент на середине ребра N_{12} является по построению отраженным вектором среднего нормалей вершин:

$$n_{110} = N_{12} = \frac{h_{12}}{|h_{12}|}, h_{12} \quad = N_1 + N_2 - 2\frac{(\Delta, N_1 + N_2)}{\Delta^2}\Delta, \qquad \Delta = P_2 - P_1. \tag{8}$$

Как нетрудно заметить из $N(t)$, если обе нормали наклонены в одну сторону, то нормаль никогда не пересечет перпендикуляр ребра.

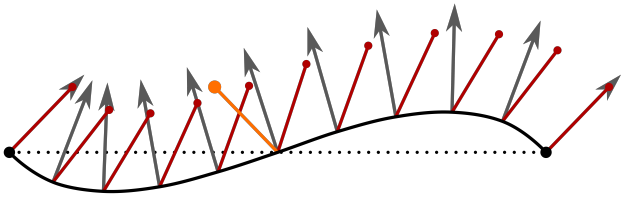


Рис. 2. *Интерполяция нормали по методу Vlachos — красным, отражение средней нормали — оранжевым, истинная нормаль — серым*

Примечание: здесь и далее под истинной нормалью подразумевается ожидаемая интерполяция нормали между вершинами. В каждой точке кривой такая нормаль должна быть перпендикулярна касательной и обеспечивать плавный переход от нормали N_1 к N_2 (нормали вершин лежат в пространстве в общем случае не в одной плоскости, то есть дополнительно могут быть перекручены относительно друг друга).

Если использовать полином Бернштейна второй степени

$$\begin{aligned} n(u,v) &= \sum_{i+j+k=2} b_{ijk,2} n_{ijk} = \sum_{i+j+k=2} \frac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k n_{ijk} \\ &= w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + v^2 n_{002} + 2wun_{110} + 2uvn_{011} + 2wvn_{101}, \end{aligned} \tag{9}$$

то после проведения аналогичных преобразований получим для ребра нормаль
$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + 2(1-t)tN_{12}$, где N_{12} находится тем же способом, как выше.

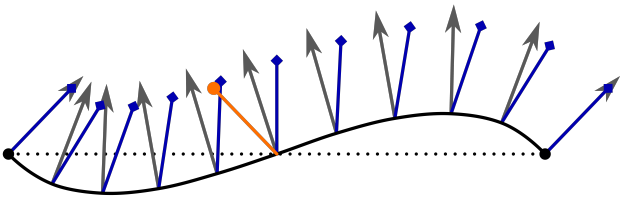


Рис. 3. *Интерполяция нормали полиномом Бернштейна второй степени — синим, отражение средней нормали — оранжевым, истинная нормаль — серым*

В работе van Overveld C. W. A. M. и Wyvill B. [3] используется квадратичный интерполянт:

$$N(t) = N_1 + at + bt^2, \tag{10}$$

где $a = N_2 - N_1 - b$, $b = 3\frac{(N_1+N_2,\Delta)}{\Delta^2}\Delta$, $\Delta = P_2 - P_1$.

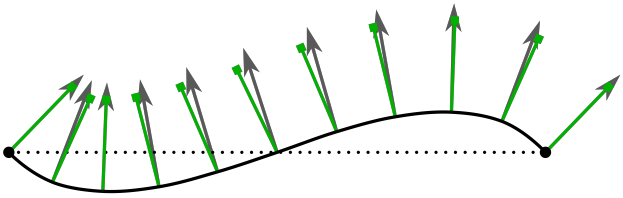


Рис. 4. *Интерполяция нормали по методу Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

Наиболее близкие к истинной нормали значения при данном расположении нормалей вершин дает интерполянт Overveld–Wyvill (см. рис. 5, где приведено сравнение методов интерполяции).

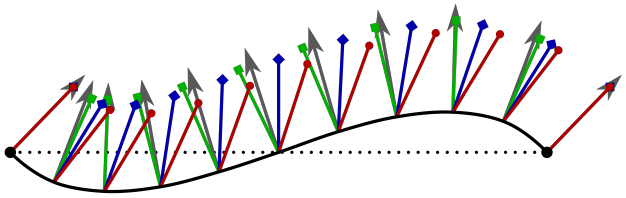


Рис. 5. *Сравнение методов интерполяции нормали. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

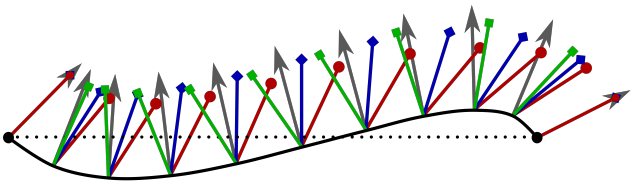


Рис. 6. *Сравнение методов интерполяции нормали при другом направлении нормалей в вершинах. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

Если задать несимметричное положение нормалей вершин, то значения разных методов интерполяции нормалей разойдутся сильнее (см. рис. 6).

Расхождение ожидаемо, так как типы/степени интерполирующих функций нормалей и кривых разные. Область применения вышеприведенных методов ограничена специфическими требованиями.

Для полноты картины на рис. 7 приведен результат методов интерполяции нормали на выпуклой кривой, когда нет точки перегиба.

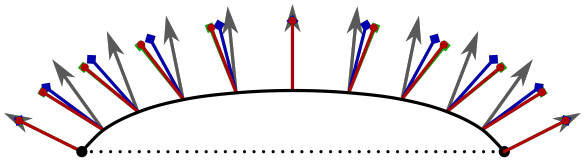


Рис. 7. *Сравнение методов интерполяции нормали на выпуклой кривой. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

В [4] предлагается интерполировать нормаль квадратичным полиномом Бернштейна:
$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + 2(1-t)tN_{12}$ (преобразовано для ребра)
с коэффициентом
$N_{12} = 2N(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(N_1 + N_2)$, где $N(\frac{1}{2})$ — нормаль на середине ребра.

Такая интерполяция описывает нормаль существенно корректнее из подобных методов, но требуется значение нормали на середине ребра, которая в этом алгоритме вычисляется непосредственно из поверхности. Поэтому данная интерполяция использоваться в нашем случае не может, так как поверхность еще не построена.

Воспользуемся понятием главной нормали кривой [5]:

$$N(t) = \left[\left[f'(t), f''(t)\right], f'(t)\right], \tag{11}$$

где $f(t)$ — пространственная кривая, $f'(t)$ и $f''(t)$ — первая и вторая производные соответственно.

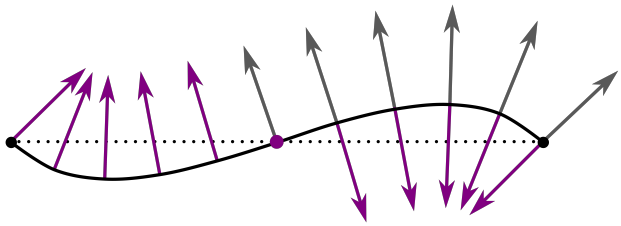


Рис. 8. *Главная нормаль кривой (нормализованный вектор), истинная нормаль — серым*

На плоской кривой направление главной нормали инвертируется в точке перегиба (см. рис. 8). Для наглядности перехода на рис. 9 показаны значения главной нормали без нормировки.

На кривой в пространстве главная нормаль поворачивается, следуя изгибам кривой, что в проекции выглядит аналогично рис. 9 (например, вогнутость вниз — ближе, вогнутость вверх — дальше, вектор главной нормали идет по спирали вдоль кривой и соответствующим образом укорачивается. *Примечание*: нормали при этом должны еще несколько больше сместиться в сторону кривизны, на схеме пренебрежем этим).

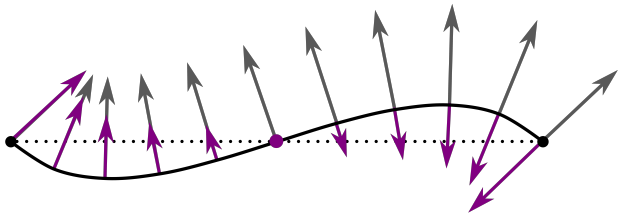


Рис. 9. *Главная нормаль кривой, истинная нормаль — серым*

Так как главная нормаль:

а) направлена в сторону вогнутости пространственной кривой;

б) при нулевой кривизне не определена,

то напрямую использовать главную нормаль в качестве интерполятора нормалей вершин нецелесообразно.

Проинтерполируем нормаль по кривой с помощью смешивающей функции.

Пусть $f(t)$ — пространственная кривая, $f'(t)$ — ее производная, на концах кривой заданы нормали. Определим нормаль вдоль кривой следующим образом:

$$N(t) = \left[\left[f'(t), n(t)\right], f'(t)\right], \tag{12}$$

где $n(t)$ — смешивающая функция нормалей вершин,

$$n(0) = N_1 \tag{13}$$

$$n(1) = N_2 \tag{14}$$

(см. рис. 10, где показаны основные элементы построения).

Результат совпадает с истинной нормалью на схемах выше (см. рис. 2–9, нормаль серым цветом).

Но в таком построении нормали есть особенность. Если $n(t)$ и $f'(t)$ коллинеарны, нормаль вырождается, а при смене относительного наклона $n(t)$ и $f'(t)$ нормаль инвертируется. В общем случае — не плоской кривой в пространстве — при изменении относительного наклона $n(t)$ и $f'(t)$ нормаль поворачивается тем быстрее, чем меньше угол между ними.

На рис. 11 показана область инвертирования нормали. При приближении к этой области нормаль в пространстве начинает, закручиваясь по спирали (в случае неплоской кривой), переходить в инвертированное состояние (при выходе из области — обратный процесс).

Сделать нормализацию направления и реинвертировать нормаль простыми способами не представляется возможным.

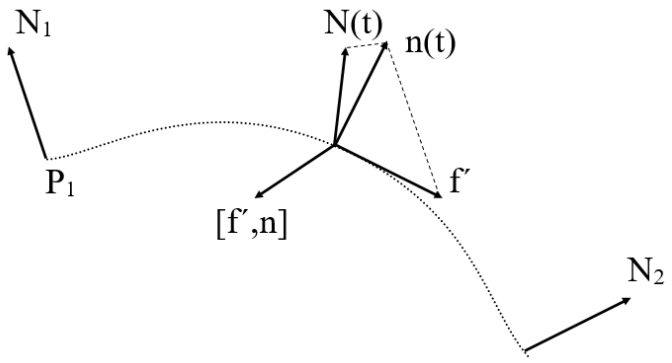


Рис. 10. *Интерполяция нормали*

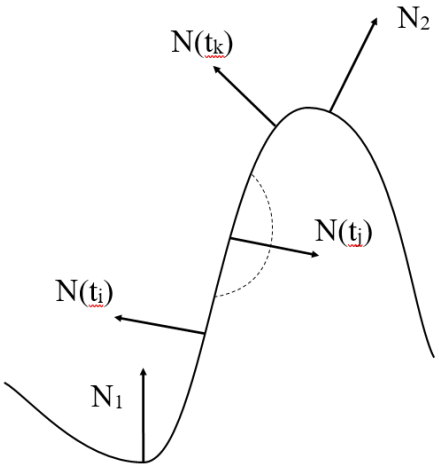


Рис. 11. *Инвертирование нормали. Пунктиром — область, где нормаль инвертирована*

Чтобы избежать этой особенности, несколько изменим построение.

Нормаль кривой

На пространственной кривой $f(t)$ введем нормаль
$N(t) = [\beta(t), f'(t)]$, где $\beta(t)$ — смешивающая функция бинормалей вершин,

$$\beta(0) = \frac{[f'(0), N_1]}{|f'(0)|}, \beta(1) = \frac{[f'(1), N_2]}{|f'(1)|}. \tag{15}$$

Примечание: под бинормалью здесь имеется в виду вышеприведенное построение, бинормаль кривой $[f'(t), f''(t)]$ в целом (в том числе и в вершинах) отлична от $\beta(t)$.

Так как форма кривой задана нормалями в вершинах, этим ограничена, в результате интерполируемая бинормаль $\beta(t)$ в общем случае меняется слабее (см. рис. 12) интерполированной нормали $n(t)$ (здесь $n(t)$ совпадает с $N(t)$ на схеме). Таким образом, интерполяция бинормалью вносит меньше потенциальных искажений при большей гибкости — отсутствии особенности $n(t)$.

На рис. 13 показана пространственная кривая, позиции вершин расположены и нормали в вершинах направлены так, чтобы проявилась упомянутая выше особенность. Нормаль, полученная с помощью смешивающей функции нормалей вершин, инвертируется при пересечении области, где проявляется особенность. Нормаль, определенная через бинормали, интерполируется корректно.

Искомая функция g есть:

$$g(t) = \frac{N(t)}{|N(t)|} = \frac{[\beta(t), f'(t)]}{|[\beta(t), f'(t)]|}. \tag{16}$$

По аналогии с [1] совокупность $\{f, g\}$ можно назвать PN-кривой.

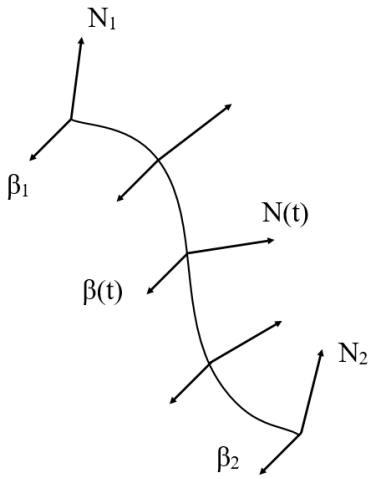
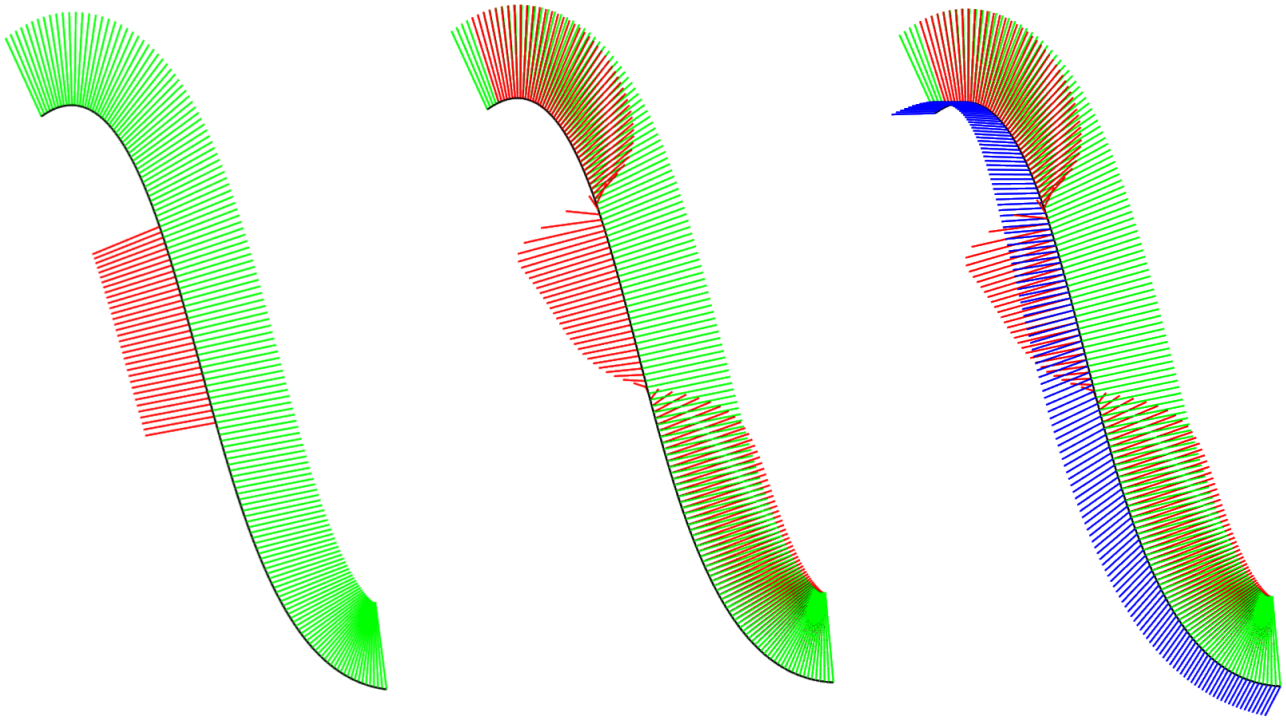


Рис. 12. *Сравнение изменения интерполируемой нормали и бинормали на кривой*



а) б) в)

Рис. 13. *Интерполяция нормали смешивающей функцией бинормалей (зеленым), смешивающей функцией нормалей вершин (красным), бинормаль (синим). а) случай плоской кривой; б–в) нормали в вершинах слегка смещены от общей плоскости; в) вид с бинормалью*

Для примера рассмотрим кубическую PN-кривую Безье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t) p_i \\ &= (1-t)^3 p_0 + 3(1-t)^2 t p_1 + 3(1-t) t^2 p_2 + t^3 p_3 \end{aligned} \tag{17}$$

и линейную смешивающую функцию бинормалей:

$$\beta(t) = (1-t)\beta_0 + t\beta_3, \tag{18}$$

где $\beta_0 = \frac{[f'(0),n_0]}{|f'(0)|}$, $\beta_3 = \frac{[f'(1),n_3]}{|f'(1)|}$ — бинормали на концах кривой — соответственно в точках p_0 и p_3 с заданными нормалями n_0 и n_3. Контрольные точки p_1 и p_2 рассчитаны по алгоритму выше.

Подставив производную кубической кривой Безье

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t)(p_{i+1} - p_i) \\ &= 3(1-t)^2(p_1 - p_0) + 6(1-t)t(p_2 - p_1) + 3t^2(p_3 - p_2) \end{aligned} \tag{19}$$

и смешивающую функцию β в N, получим:

$$\begin{aligned} N(t) &= \big[\beta(t),f'(t)\big] \\ &= 3(1-t)^3\big[\beta_0,p_1 - p_0\big] + 3(1-t)^2t\big[\beta_3,p_1 - p_0\big] \\ &\quad + 6(1-t)^2t\big[\beta_0,p_2 - p_1\big] + 6(1-t)t^2\big[\beta_3,p_2 - p_1\big] \\ &\quad + 3(1-t)t^2\big[\beta_0,p_3 - p_2\big] + 3t^3\big[\beta_3,p_3 - p_2\big]. \end{aligned} \tag{20}$$

После перегруппировки выражение примет вид

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i \\ &= (1-t)^3c_0 + 3(1-t)^2tc_1 + 3(1-t)t^2c_2 + t^3c_3 \end{aligned} \tag{21}$$

кубической кривой Безье с коэффициентами

$$c_0 = 3\,[\beta_0,p_1 - p_0] \tag{22}$$

$$c_1 = [\beta_3,p_1 - p_0] + 2\,[\beta_0,p_2 - p_1] \tag{23}$$

$$c_2 = [\beta_0,p_3 - p_2] + 2\,[\beta_3,p_2 - p_1] \tag{24}$$

$$c_3 = 3\,[\beta_3,p_3 - p_2] \tag{25}$$

$$\beta_0 = \frac{[f'(0),n_0]}{|f'(0)|} = \frac{[p_1 - p_0,n_0]}{|p_1 - p_0|} \tag{26}$$

$$\beta_3 = \frac{[f'(1),n_3]}{|f'(1)|} = \frac{[p_3 - p_2,n_3]}{|p_3 - p_2|}. \tag{27}$$

При малых углах перекручивания нормалей вершин (перекручивание по оси кривой, углы расхождения нормалей при этом могут быть много большими) линейной интерполяции вполне достаточно для многих применений.

Для лучшей точности или при экстремальных углах перекручивания линейную интерполяцию стоит заменить кватернионом поворота или поворотом вектора по формуле Родрига.

Смешивающая функция поворота бинормалей по формуле Родрига:

$$\beta(t) = \cos(t\varphi)\beta_0 + \sin(t\varphi)\,[\vartheta,\beta_0]\,, \tag{28}$$

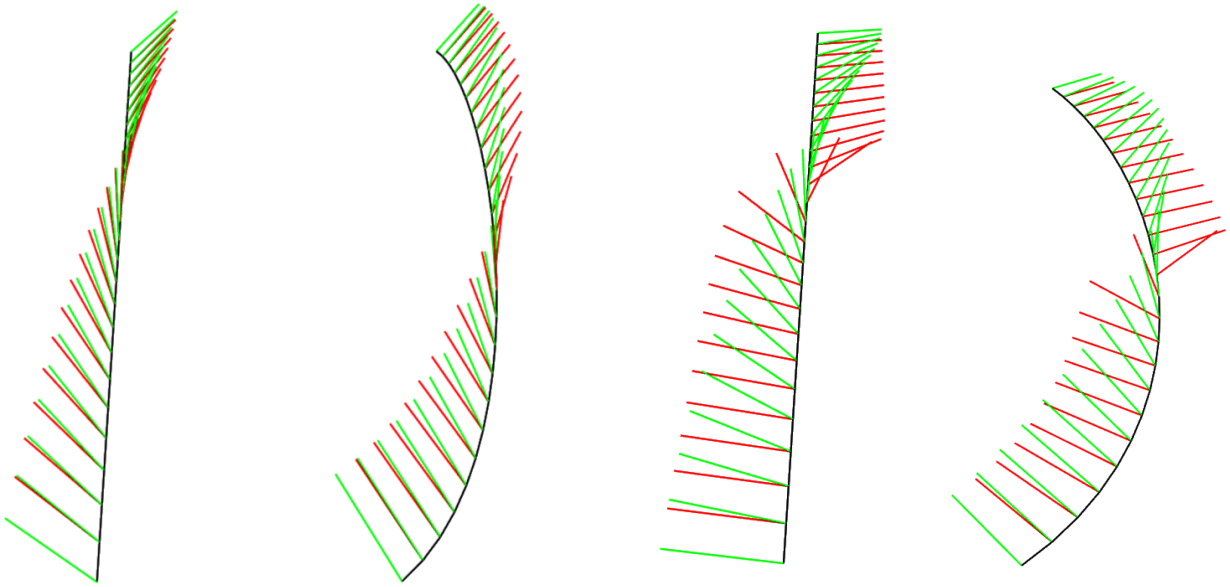
где $\varphi = \arccos\frac{(\beta_0,\beta_3)}{|\beta_0||\beta_3|}$, $\vartheta = \frac{[\beta_0,\beta_3]}{|[\beta_0,\beta_3]|}$.

На рис. 14 приведен результат интерполяции при экстремальных осевых кручениях нормалей вершин. При угле перекручивания в 90 градусов разница сравнительно небольшая между линейной смешивающей функцией и смешивающей функцией Родрига, при другом положении нормалей вершин, когда кривая дополнительно изгибается, отличие возрастает. Для сравнения на рис. 14б интерполяция с разворотом нормалей вершин в ∼180 градусов.

Результаты

Интерполяция нормали по кривой получилась устойчивой и универсальной, есть потенциал для расширения и обобщения.

PN-кривая может быть полезна и в других применениях. Например, в алгоритмах следования по пути (follow path) в пространстве, где необходимо сохранение естественной ориентации объекта, нормаль послужит осью ориентации. В таких алгоритмах применяются итерационные методы вычисления, а при использовании PN-кривой результат в любой точке кривой определяется непосредственно.



а) б)

Рис. 14. *Интерполяция нормали по кривой с экстремально развернутыми нормалями вершин (формулой Родрига — зеленым, линейной функцией — красным)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. E. *Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide.* 5th edition. San Francisco: Morgan Kaufmann; 2002. 520 p.
2. Vlachos A., Peters J., Boyd C., Mitchell J. L. Curved PN Triangles. *Proceedings of the 2001 Symposium on Interactive 3D graphics (I3D '01).* 2001:159–166. DOI: 10.1145/364338.364387.
3. Van Overveld C. W. A. M., Wyvill B. Phong Normal Interpolation Revisited. *ACM Trans. on Graphics.* 1997;16(4):397–419. DOI: 10.1145/263834.263849.
4. Fünfzig C., Müller K., Hansford D., Farin G. PNG1 Triangles for Tangent Plane Continuous Surfaces on the GPU. *Proceedings of Graphics Interface.* 2008:219-226. DOI: 10.1145/1375714.1375751.
5. Кудрявцев Л. Д. *Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной.* М.: Физматлит; 2015. 444 с.