ЭПСИЛОН-СЕТЕВОЙ АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КОМПЛЕКСАХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Н. Рожков[1,а], **А. С. Демидов**[2,3,б], **В. В. Галишникова**[3,в]

[1] *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Российская Федерация*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

[3] *Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0729-5644,* ✍ *rozhkovalex@hotmail.com*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0245-233X, demidov.alexandre@gmail.com*

[в] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-7255, galishni@yandex.ru*

Аннотация: в данной работе представлен ε-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов с заданной ранговой структурой. Основной проблемой при анализе высокодетализированных комплексов является рост вычислительной сложности, связанный с увеличением пространства состояний. Для ее сокращения предложен метод факторизации множества состояний с использованием ε-сетей, позволяющий заменить исходную структуру укрупненным графом. Элементы нулевого ранга объединяются в классы по заданной метрике, а классы элементов старших рангов формируются по классам составляющих их элементов. В статье использована лексикографическая оптимизация целевого функционала, при которой сначала минимизируется число переходов между ε-классами, а затем — длина маршрута в исходном комплексе. Работа алгоритма показана на примере полиэдрального комплекса при решении задачи маршрутизации в информационной модели реального здания. Рассматриваемая модель включает узлы, ребра, грани и пространственные ячейки здания. Программная реализация обеспечивает построение исходного и факторизованного графов, поиск обычного, ε-классового и лексикографического маршрутов, а также их визуальное сравнение. Предложенный подход может быть применен к другим функционалам, заданным на комплексах элементов, при выборе меры близости и правил формирования классов.

Ключевые слова: комплекс элементов, полиэдральный комплекс, эпсилон-сеть, факторизованный граф, лексикографическая оптимизация, маршрутизация.

Для цитирования: Рожков А. Н., Демидов А. С., Галишникова В. В. Эпсилон-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):118–125.

Поступила в редакцию: 05.08.2026. *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

AN EPSILON-NET-BASED ALGORITHM FOR MINIMIZING FUNCTIONALS ON COMPLEXES

A. N. Rozhkov[1,a], **A. S. Demidov**[2,3,b], **V. V. Galishnikova**[3,c]

[1] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[3] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0729-5644,* ✍ *rozhkovalex@hotmail.com*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0245-233X, demidov.alexandre@gmail.com*

[c] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-7255, galishni@yandex.ru*

Abstract: we developed an ε-net algorithm for minimizing functionals defined on complexes with a prescribed rank structure. A major challenge in analyzing highly detailed complexes is the rapid growth in computational complexity as the state space increases. To address this problem, we proposed a method for partitioning the state space into ε-net classes and replacing the original complex with a coarsened graph. We grouped rank-zero elements into classes according to a specified metric and constructed classes of higher-rank elements from the classes of their constituent elements. We used

lexicographic optimization of the objective functional: we first minimized the number of transitions between ε-classes and then minimized the route length in the original complex. We demonstrated the algorithm on a polyhedral complex representing an actual building and applied it to routing problems. The model included the building's nodes, edges, faces, and three-dimensional cells. Our software implementation supports the construction of the original and factorized graphs, the computation of conventional, ε-class-based, and lexicographically optimal routes, and their visual comparison. The proposed approach can also be applied to other functionals defined on complexes, provided that a suitable proximity measure and rules for forming classes are specified.

Keywords: complex, polyhedral complex, epsilon net, quotient graph, lexicographic optimization, routing.

Cite this article: Rozhkov A. N., Demidov A. S., Galishnikova V. V. An Epsilon-Net-Based Algorithm for Minimizing Functionals on Complexes. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):118–125.

Original article submitted: 05.08.2026. *Revision submitted: 20.09.2026.*

Введение

Широкий класс задач оптимизации связан с поиском экстремумов функционалов на объектах, обладающих сложной структурой. Такие объекты могут быть представлены в виде комплексов элементов, где каждый элемент характеризуется определенным рангом (размерностью). Это позволяет формализовать связи между элементами разных уровней и описывать сложные системы через совокупность их составляющих.

Основной проблемой при работе с высокодетализированными комплексами элементов является рост вычислительной сложности, обусловленный увеличением числа элементов пространства состояний. При высокой степени детализации прямой поиск оптимального решения на исходном графе требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому возникает необходимость в сокращении пространства состояний без потери существенных характеристик комплекса.

Одним из способов упрощения пространства поиска является применение ε-сетей для факторизации множества состояний. Объединение элементов одного ранга, близких по заданной метрике, в классы позволяет перейти от анализа отдельных элементов к анализу их классов. В результате исходный граф заменяется факторизованным с меньшим числом состояний.

Целью данной работы является разработка алгоритма минимизации функционалов на комплексах элементов с использованием ε-сетей. Предложен метод лексикографической оптимизации, учитывающий приоритетно число переходов между ε-классами и затем длину маршрута в исходном комплексе.

Структурные характеристики: комплекс элементов

Комплекс элементов $\boldsymbol{K}$ — это структура, состоящая из элементов, ранжированных по «размерности» (рангу). Два различных элемента A и B из $\boldsymbol{K}$ одной размерности $k \geq 1$ называются смежными (обозначается как $A \sim B$), если их пересечение $A \cap B$ является элементом комплекса размерности $(k-1)$ и это пересечение не пусто [1, 2]. В работе будут введены и рассмотрены полиэдральные комплексы.

Структурные характеристики: целевые функционалы на комплексах элементов

Интерес представляет минимизация тех или иных числовых характеристик на комплексах. Они называются целевыми функционалами. Приведем примеры таких функционалов на комплексах элементов:

- функционал **маршрутизации** — длина того или иного пути (маршрута) на графе комплекса (например, кратчайший или самый «безопасный» маршрут между заданными узлами комплекса). Такой функционал характерен для навигационных задач, включая эвакуацию и логистику внутри сложных объектов;
- функционал **доступности** — это числовая характеристика доступности элементов комплекса. Например, количество ячеек $\left|N^{(t)}\left(\{c_0\}\right)\right|$, достижимых (доступных) из исходного узла за какое-то заданное или не превосходящее t шагов;

• функционал **математического ожидания распределения случайной величины на комплексе**;

• функционал **рассогласования** — численная мера различия между двумя распределениями на комплексе;

• функционал **числа переходов между различными классами** разбиений комплекса.

Перечисленные примеры иллюстрируют широкий спектр оптимизационных задач на комплексах — от классических проблем теории графов (пути, потоки, центральности) до специальных функционалов для машинного обучения на графах [3, 4]. Все они сводятся к оптимизации того или иного целевого показателя, определенного на элементах и связях комплекса.

Структурные характеристики: эпсилон-сети на комплексах элементов

Поскольку комплекс, как правило, состоит из весьма большого числа элементов, поиск минимума целевого функционала на этих элементах комплекса может потребовать весьма значительного времени. Поэтому целесообразно объединять близкие элементы в классы, расстояние между элементами которых не превышает заданного малого параметра ε, выбирать в каждом классе представителя и проводить факторизацию комплекса по полученным классам.

Расстояние между элементами комплекса определяется конкретной метрикой ρ, выбираемой в зависимости от решаемой задачи. В частности, для полиэдрального комплекса метрика задается следующим образом. Расстояние между элементами 0-го ранга (узлами) вычисляется как евклидово расстояние между их координатами:

$$\rho(n_i,n_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \tag{1}$$

Элементы 0-го ранга объединяются в классы, в каждом из которых выбирается представитель. Элемент включается в класс, если расстояние от него до представителя этого класса не превышает ε. Для элементов более высокого ранга прямое геометрическое сравнение не применяется. Элементы ранга $k \geq 1$ относятся к одному классу, если совпадают наборы классов, к которым принадлежат составляющие их элементы ранга $(k-1)$.

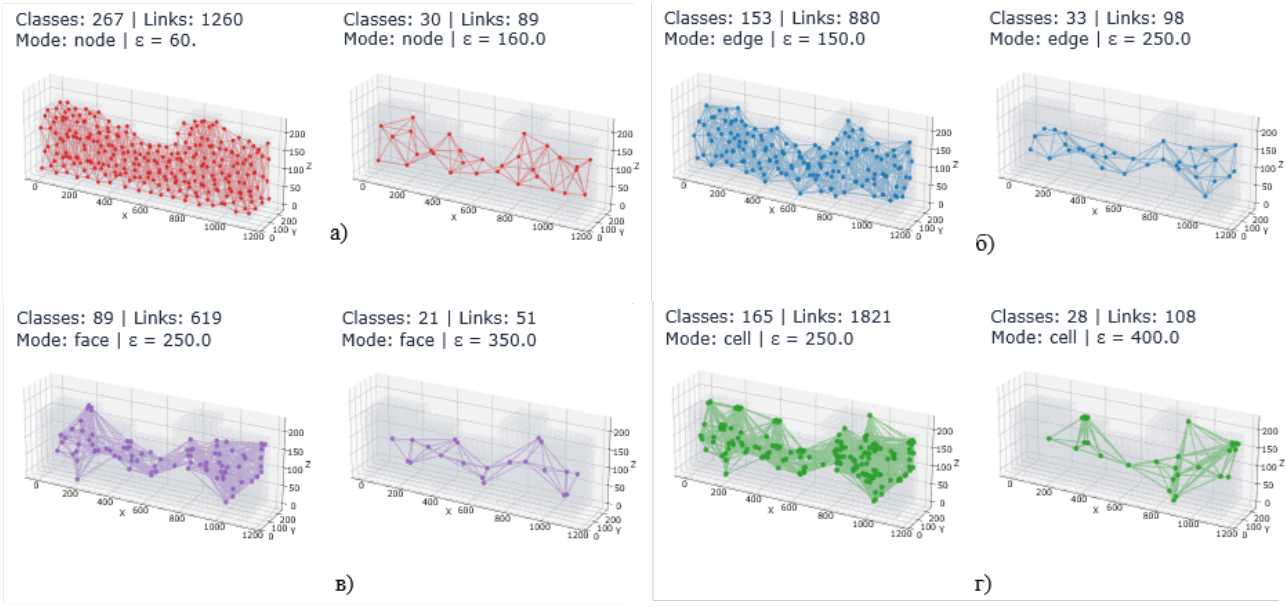

Рис. 1. *Факторизация полиэдрального комплекса для элементов:*
а) 0-го ранга, $\varepsilon_{\min} = 60$ *и* $\varepsilon_{\max} = 160$*; б) 1-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 150$ *и* $\varepsilon_{\max} = 250$*;*
в) 2-го ранга, $\varepsilon_{\min} = 250$ *и* $\varepsilon_{\max} = 350$*; г) 3-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 250$ *и* $\varepsilon_{\max} = 400$

Приведем пример факторизации комплекса элементов некого здания, жилого или общественного, например, гипермаркета, состоящего из элементов: 0 ранг — 7423, 1 ранг — 20697, 2 ранг — 19215, 3 ранг — 5940 элементов с минимальной и максимальной экспертной оценкой параметра ε, приведенных на рис. 1.

Структурные характеристики: графы на ε-сети комплекса элементов

Графы являются хорошо изученной структурой (например, [3, 5–7]) с множеством различных алгоритмов (обходы, кластеризация, маршрутизация и т.д.). Поэтому будем рассматривать комплекс элементов как комплекс-граф с явными связями между элементами. В дальнейшем на нем проведем факторизацию по ε-близким элементам.

Структурные характеристики: программная платформа

Общая концепция минимизации функционалов на комплексах элементов представлена на блок-схеме (рис. 2). Предложенная схема алгоритма базируется на принципе последовательного перехода от высокодетализированного представления объекта к его редуцированной форме (факторизованному графу), что позволяет существенно снизить вычислительную сложность задачи оптимизации без потери структурной целостности системы.

Рис. 2. *Блок-схема программной платформы минимизации функционала на комплексах элементов*

Предложенная концепция может быть применена к различным типам комплексов — от полиэдральных моделей пространственных объектов до алгебраических структур, что делает ее применимой для широкого спектра задач.

Полиэдральные комплексы

Определим полиэдральный комплекс как цифровую модель некого здания в виде объединения выпуклых многогранников с попарно непересекающимися внутренностями. В зависимости от их размерности (ранга), равной 0, 1, 2 или 3, будем их называть, соответственно, узел, ребро, грань или ячейка {node,edge,face,cell}. Каждый элемент n-го ранга определяется составляющими его элементами $(n-1)$ ранга. Множество элементов $(n-1)$ ранга будем обозначать через K_n [1, 2].

Маршрутизация в здании описывает допустимые перемещения внутри его пространственной структуры. Примером таких задач являются внештатные и аварийные ситуации — например, эвакуация при пожаре, задымлении, утечке газа, землетрясении или угрозе теракта. В этих условиях необходимо быстро и безопасно вывести людей из здания, выбирая маршруты с учетом

блокировок, зон повышенного риска и ограниченной проходимости. Другим важным примером являются задачи роботизированной навигации: мобильные платформы и сервисные роботы должны планировать безопасные и эффективные траектории движения по внутренним пространствам, избегая препятствий и учитывая ограничения среды. Кроме того, методы маршрутизации применяются [8] при моделировании людских потоков в зданиях, где анализируются закономерности перемещения людей с целью повышения комфорта, предотвращения заторов и оценки пропускной способности помещений и маршрутов.

Как было сказано ранее, для комплекса, представляемого в виде графа, возможно использование стандартных алгоритмов маршрутизации, в частности Дейкстры и A* [5, 7]. Ранговая структура комплекса дает возможность поиска путей не только по узлам и ребрам, но и по элементам более высоких размерностей.

Полиэдральные комплексы: постановка задачи

Пусть задан полиэдральный комплекс $\boldsymbol{K}$ и выбран режим маршрутизации $m \in$ {node,edge,face,cell}. Для каждого такого режима строится соответствующий ему граф смежности $G_m = (X_m,\Gamma_m)$, где $S_m \subseteq X_m$ и $T_m \subseteq X_m$ множества допустимых стартовых и финишных состояний. Графы смежности всех режимов определяют пространство допустимых состояний задачи маршрутизации.

Под маршрутом будем понимать последовательность состояний $P = (x_0,x_1,\cdots,x_k)$, где $x_0 \in S_m$, $x_k \in T_m$, $(x_i,x_{i+1}) \in \Gamma_m$ (Γ_m — допустимый переход). Тогда задача маршрутизации в комплексе $\boldsymbol{K}$ формулируется как задача минимизации функционала пути:

$$\min_{P\in\mathcal{P}(S_m,T_m)} J(P), \qquad J(P) = |P| - 1, \tag{2}$$

где $\mathcal{P}(S_m,T_m)$ — множество всех допустимых маршрутов из S_m в T_m, $|P|$ — число состояний в маршруте P.

Полиэдральные комплексы: факторизация множества состояний

Множество допустимых состояний факторизуется по ε-близким элементам в соответствии с определением, данным в разделе «**Структурные характеристики: эпсилон-сети на комплексах элементов**». Элементы 0-го ранга (узлы) объединяются в классы, в каждом из которых отбирается 1 представитель. Элементы старших рангов отождествляются последовательно по рангам: элементы ранга k относятся к одному классу, если совпадают наборы классов, к которым принадлежат составляющие их элементы ранга $(k-1)$. В рассматриваемой модели полиэдрального комплекса это определение эквивалентно отождествлению элементов старших рангов при совпадении классов всех составляющих их элементов 0-го ранга. Таким образом, исходное множество состояний X_m заменяется укрупненным множеством классов, сопоставляющим каждому состоянию его ε-класс:

$$\tilde{X}_m = X_m/{\sim_\varepsilon} \tag{3}$$

по операции отождествления, обозначенной символом $\sim_\varepsilon$.

На редуцированном пространстве поиска $\tilde{X}_m$ строится факторизованный граф $\tilde{G}_m = \left(\tilde{X}_m,\tilde{\Gamma}_m\right)$, где $\tilde{\Gamma}_m = \Gamma_m/{\sim_\varepsilon}$. Исходная задача заменяется факторизованной, т.е. поиском оптимального маршрута на $\tilde{G}_m$ факторизованной задачи:

$$\min_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{S}_m,\tilde{T}_m)} \tilde{J}(\tilde{P}), \qquad \tilde{J}(\tilde{P}) = |\tilde{P}| - 1. \tag{4}$$

В ней следует обеспечить выполнение двух требований:

- минимизация числа переходов между классами ε-факторизации;
- минимизация длины маршрута в исходном графе.

Поскольку приоритет этих требований неодинаков, оптимизация проводится лексикографически: сначала минимизируется число переходов между ε-классами, затем число шагов реального маршрута.

Помимо длины маршрута, существенным становится число переходов между классами ε-факторизации. Введем функционал числа переходов между различными ε-классами вдоль маршрута, минимизация которого естественна для нашей задачи, а именно:

$$\chi_\varepsilon(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta\big(\pi_\varepsilon(x_i), \pi_\varepsilon(x_{i+1})\big), \tag{5}$$

где $\delta(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 1, & \alpha_i \neq \alpha_j \\ 0, & \alpha_i = \alpha_j \end{cases}$ — индикаторная функция, а $\pi_\varepsilon \colon X_m \to \tilde{X}_m$.

Таким образом, маршруту P сопоставляются две характеристики: $\chi_\varepsilon(P)$ и $J(P)$, которые необходимо учитывать одновременно. Так как данные характеристики имеют разный смысл, то целесообразно использование лексикографического порядка. Первичным будет являться число переходов между ε-классами $\chi_\varepsilon(P)$, вторичной — длина маршрута $J(P)$. Тогда задача принимает вид:

$$\min_{P \in \mathcal{P}(S_m,T_m)} \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big). \tag{6}$$

Оптимальный маршрут P^* определяется условием:

$$\big(\chi_\varepsilon(P^*),J(P^*)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big) \iff \big(\chi_\varepsilon(P^*) < \chi_\varepsilon(P)\big) \vee \big(\chi_\varepsilon(P^*) = \chi_\varepsilon(P) \ \wedge \ J(P^*) \leq J(P)\big). \tag{7}$$

Иначе говоря, среди всех допустимых маршрутов сначала выбираются те, для которых минимально число переходов между ε-классами, а затем среди них выбирается маршрут минимальной длины.

Аналогично рассматривается векторная стоимость каждого перехода $x \to y$:

$$\boldsymbol{c}(x,y) = \big(\delta(\pi_\varepsilon(x),\pi_\varepsilon(y)),1\big). \tag{8}$$

А стоимости маршрута P ставится в соответствие сумма:

$$\boldsymbol{C}(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{c}(x_i,x_{i+1}) = \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big). \tag{9}$$

Задача сведена к поиску маршрута минимальной векторной стоимости в лексикографическом порядке.

Полиэдральные комплексы: восстановление оптимального маршрута и его интерпретация

Пусть в результате решения лексикографической задачи найдено оптимальное конечное состояние $x^* \in T_m$.

Введем отображение parent: $X_m \to X_m \cup \{\emptyset\}$, которое каждому состоянию из X_m сопоставляет предшествующее ему состояние, а начальному состоянию x_0 — значение $\emptyset$.

Оптимальный маршрут восстанавливается обратным проходом от x^* до x_0:

$$x_n = x^*, \quad x_{n-1} = \text{parent}(x_n), \quad x_{n-2} = \text{parent}(x_{n-1}), \quad \ldots, x_0. \tag{10}$$

После чего полученная последовательность инвертируется. В результате получается оптимальный маршрут:

$$P^* = \{x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n\}. \tag{11}$$

Поскольку каждое состояние x_i обладает образом $\pi_\varepsilon(x_i)$, маршруту P^* сопоставляется последовательность классов $\{\pi_\varepsilon(x_0),\pi_\varepsilon(x_1),\ldots,\pi_\varepsilon(x_n)\}$. Маршрут определяется переходами от одного класса к следующему. Поэтому вводится операция сжатия (факторизация ε-классов):

$$\mathrm{Comp}_\varepsilon(P^*) = (q_0, q_1, \ldots, q_k), \tag{12}$$

где $q_i = \pi_\varepsilon(x_i)$, а каждый следующий класс q_j добавляется в случае, если он отличен от предыдущего.

Таким образом, оптимальное решение интерпретируется как пара $(P^*, \mathrm{Comp}_\varepsilon(P^*))$ с числовыми характеристиками $\chi_\varepsilon(P^*)$ и $J(P^*)$.

Полиэдральные комплексы: численная реализация маршрутизации на ЭВМ

Объект здания, например гипермаркет, моделируется как полиэдральный комплекс. При построении оптимального маршрута из узла $n1$ в узел $n7163$ используются три варианта маршрутизации:

1. Простой маршрут (рис. 3а), без ε-факторизации.
2. Маршрут по ε-классам (рис. 3б). В этом случае путь строится в факторизованном пространстве, где близкие элементы объединяются в классы. Такой маршрут отражает общую схему перемещения и показывает укрупненную структуру пути.
3. Маршрут с учетом лексикографической структуры (рис. 3в): сначала минимизируется число переходов между ε-классами, затем — длина маршрута. В результате получается реальный путь, согласованный с ε-факторизацией.

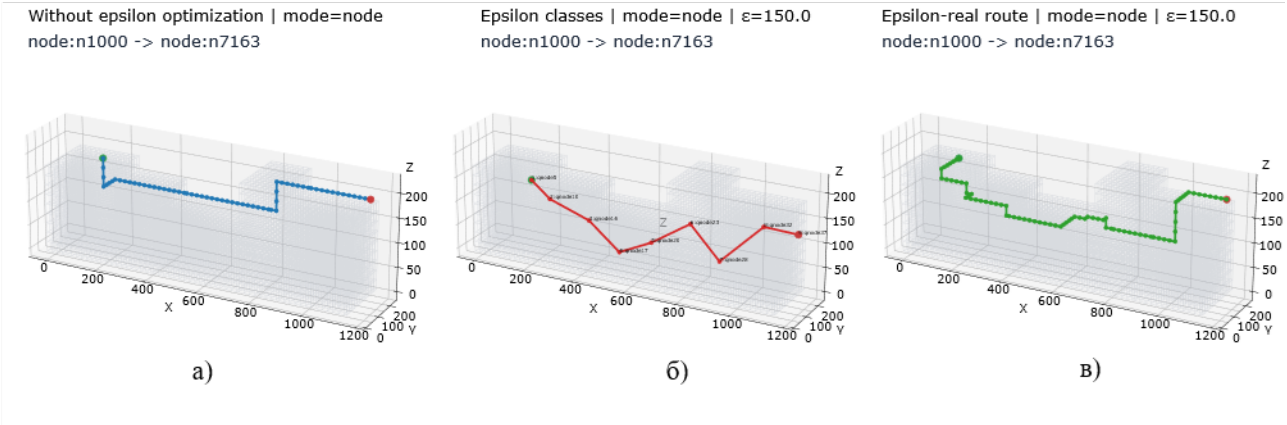

Рис. 3. *Маршрут из узла $n1$ в узел $n7163$: а) простой маршрут; б) факторизованный маршрут; в) лексикографический маршрут*

Заключение

В данной работе представлен ε-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов. Разработанный подход к факторизации пространства состояний позволяет эффективно снизить размерность задачи оптимизации, сохраняя при этом связность исходной структуры и ее основные свойства. Предложенный метод универсален и может быть применен к широкому классу задач, где данные представимы в виде комплекса элементов.

Использованный в работе лексикографический порядок позволяет решать задачи с выполнением нескольких требований, а именно: приоритетное сокращение числа переходов между ε-классами в сочетании с минимизацией длины маршрута. Работа алгоритма показана на примере маршрутизации в полиэдральном комплексе здания. Дальнейшим направлением исследования является применение алгоритма к другим типам комплексов, в том числе к полиномиальным комплексам при решении задач физики плазмы.

Построение решений оптимизационных задач посредством перебора по эпсилон-сетям и эффективное построение таких сетей было изначально предложено в работах [9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozhkov A. N., Galishnikova V. V. Explicit Digital Models of Linear Complexes. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022;18(4):101–110. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-4-101-110.
2. Rozhkov A. N., Galishnikova V. V. Construction and Modification of Topological Tables for Digital Models of Linear Complexes. *Mathematical and Computational Applications*. 2023;28(2):37. DOI: 10.3390/mca28020037.
3. Bondy J. A., Murty U. S. R. *Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics*. London: Springer; 2008. 655 p.
4. Hamilton W. L., Ying R., Leskovec J. Representation Learning on Graphs: Methods and Applications. *IEEE Data Engineering Bulletin*. 2017;40(3):52–74.
5. Dijkstra E. W. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. *Numerische Mathematik*. 1959;1:269–271. DOI: 10.1007/BF01386390.
6. Fortunato S. Community Detection in Graphs. *Physics Reports*. 2010;486(3–5):75–174. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.11.002.
7. Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*. 1968;4(2):100–107. DOI: 10.1109/TSSC.1968.300136.
8. Helbing D., Molnár P., Farkas I. J., Bolay K. Self-Organizing Pedestrian Movement. *Environment and Planning B: Planning and Design*. 2001;28(3):361–383. DOI: 10.1068/b2697.
9. Demidov A. S., Kochurov A. S., Popov A. Yu. To the Problem of the Recovery of Nonlinearities in Equations of Mathematical Physics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009;163(1):46–77. DOI: 10.1007/s10958-009-9658-x.
10. Demidov A. S., Savel'ev V. V. Essentially Different Distributions of Current in the Inverse Problem for the Grad-Shafranov Equation. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2010;17(1):56–65. DOI: 10.1134/S106192081001005X.