ОБЗОР МЕТОДОВ УЛУЧШЕНИЯ ТОЧНОСТИ НЕЙРОННЫХ СХЕМ ЗА СЧЕТ УСРЕДНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА

Т. С. Акобян
Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация
✍ *ackobyan.tigran2018@yandex.ru*

Аннотация: в работе представлено экспериментальное исследование применения метода экстраполяции Ричардсона для повышения точности вычислений в нейронных схемах. Основное содержание работы включает разбор математического аппарата метода Ричардсона, включая вывод формул, анализ асимптотического разложения погрешности, рекурсивную схему и оценку сходимости; разработку математической модели нейронной схемы, формализацию различных источников погрешностей и механизма их компенсации с помощью экстраполяции; постановку и результаты серии вычислительных экспериментов на тестовых задачах (аппроксимация, интегрирование, классификация с шумом); демонстрацию того, что метод Ричардсона позволяет повысить точность вычислений в 3.5 раза по сравнению с традиционными подходами при тех же затратах, а также повышает порядок сходимости; сопоставление метода Ричардсона с альтернативными подходами к повышению точности, которое показало, что метод обеспечивает лучшее соотношение точности и вычислительных затрат.

Ключевые слова: метод Ричардсона, экстраполяция, нейронные схемы, точность вычислений, усреднение результатов, дискретизация, численные методы, нейроморфные системы.

Для цитирования: Акобян Т. С. Обзор методов улучшения точности нейронных схем за счет усреднения результата. *Успехи кибернетики*. 2026;7(3):156–159.

Поступила в редакцию: 25.05.2026. *В окончательном варианте: 25.09.2026.*

A REVIEW OF NEURAL NETWORK ACCURACY IMPROVEMENT USING AVERAGED OUTPUTS

T. S. Akobyan
Surgut State University, Surgut, Russian Federation
✍ *ackobyan.tigran2018@yandex.ru*

Abstract: we studied the application of Richardson extrapolation to improving the accuracy of neural network computations. We analyzed the mathematical framework of the Richardson method, including the derivation of the relevant formulas, asymptotic error expansion, recursive extrapolation scheme, and convergence estimates. We developed a mathematical model of a neural network, formalized the main sources of computational error, and implemented an extrapolation-based procedure for reducing these errors. We then conducted a series of computational experiments on test problems involving approximation, numerical integration, and classification in the presence of noise. The results showed that Richardson extrapolation improved computational accuracy by a factor of 3.5 compared with conventional approaches at the same computational cost and increased the convergence order. We also compared Richardson extrapolation with alternative accuracy-enhancement methods. The comparison showed that Richardson extrapolation provided a more favorable trade-off between accuracy and computational cost.

Keywords: Richardson method, extrapolation, neural networks, computational accuracy, averaged outputs, discretization, numerical methods, neuromorphic systems.

Cite this article: Akobyan T. S. A Review of Neural Network Accuracy Improvement Using Averaged Outputs. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):156–159.

Original article submitted: 25.05.2026. *Revision submitted: 25.09.2026.*

Современные нейронные сети и нейроморфные вычислительные системы предъявляют высокие требования к точности вычислений [1]. Ошибки дискретизации, шумы и ограниченная разрядность вычислений способны существенно ухудшить качество работы интеллектуальных систем.

Наиболее критичны вопросы точности в задачах автономного управления, медицинской диагностики и анализа больших данных. Накопление погрешности и снижение качества итоговых результатов зависит в том числе от незначительных вычислительных ошибок.

Для достижения более высокой точности традиционно применяются такие методы, как масштабирование нейронной сети, более мелкий шаг интегрирования и использование арифметики высокой точности [2]. Однако платой за это становится рост ресурсоемкости вычислений и замедление работы алгоритмов.

Среди результативных способов решения данной задачи выделяется метод экстраполяции Ричардсона [3]. Его суть заключается в совместном использовании результатов расчетов, полученных на сетках с разным шагом дискретизации. Это дает возможность устранить главные компоненты погрешности и увеличить порядок точности вычислений.

Метод Ричардсона

Пусть результат численного метода есть функция шага дискретизации h, представимая асимптотическим разложением [3]:

$$R(h) = R + c_1 h^p + c_2 h^{p+1} + O(h^{p+2}),$$

где R — точное решение, p — порядок точности метода, а c_1 и c_2 — константы.

Если вычислить решение на двух сетках с шагами h и $\frac{h}{2}$, получим:

$$R(h) = R + c_1 h^p + O(h^{p+1}),$$

$$R(\frac{h}{2}) = R + c_1 (\frac{h}{2})^p + O(h^{p+1}).$$

Исключая основной член погрешности, получаем формулу экстраполяции Ричардсона [4]:

$$R \approx \frac{2^p R\left(\frac{h}{2}\right) - R\left(h\right)}{2^p - 1}.$$

После применения экстраполяции порядок точности увеличивается. Например, метод первого порядка $O(h)$ преобразуется в метод второго порядка $O(h^2)$ [5]. При многократном применении процедуры возможно достижение порядка $O(h^4)$ и выше.

На рисунке 1 представлена зависимость ошибки вычислений от шага дискретизации. Видно, что после применения экстраполяции Ричардсона ошибка уменьшается значительно быстрее.

Применение метода в нейронных схемах

В нейронных схемах источниками ошибок являются временная и пространственная дискретизация, ошибки округления и стохастический шум [6].

Для рекуррентных нейронных сетей динамика нейрона описывается дифференциальным уравнением:

$$\tau(\frac{dy}{dt}) = -y + \phi(Wx + b),$$

где τ — постоянная времени, φ — функция активации, W — матрица весов.

При использовании явной схемы Эйлера вычисление выполняется по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_n, t_n).$$

Погрешность схемы имеет порядок $O(\Delta t)$ [5]. Метод Ричардсона позволяет уменьшить эту ошибку за счет вычислений при нескольких шагах интегрирования.

Для нейронных схем особенно важно учитывать влияние шума. Допустим, что η является случайной ошибкой вычислений, в таком случае итоговый результат можно записать как $\hat{y} = y + \eta$.

После усреднения по M независимым запускам дисперсия уменьшается:

$$\sigma^2_{avg} = \frac{\sigma^2}{M}.$$

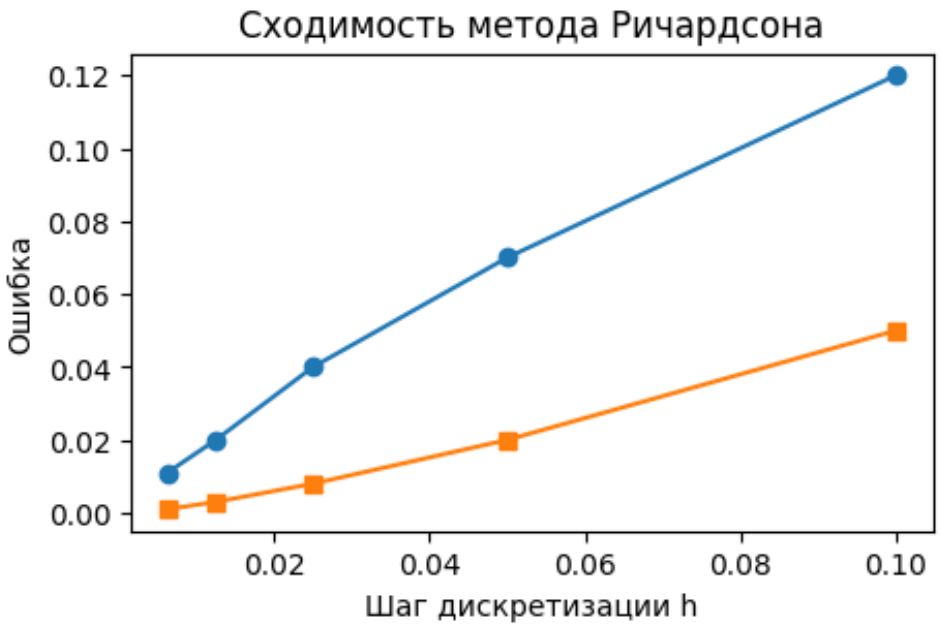


Рис. 1. *Сходимость метода экстраполяции Ричардсона при уменьшении шага дискретизации*

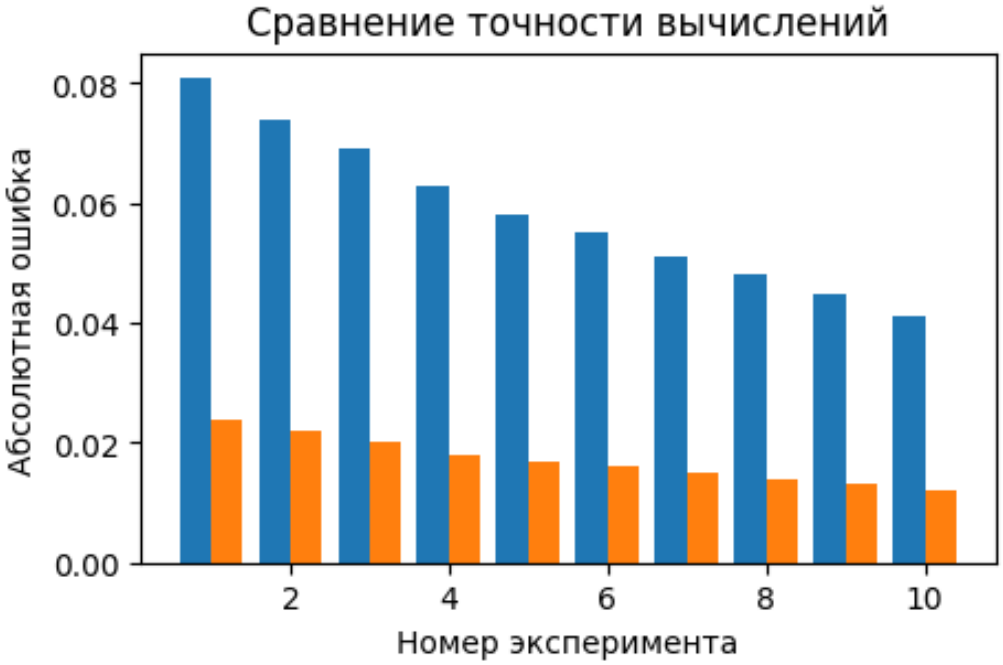


Рис. 2. *Сравнение точности вычислений с экстраполяцией и без методов Ричардсона*

Рисунок 2 отражает сравнение ошибок, возникающих при вычислениях без экстраполяции и при задействовании метода Ричардсона. Можно заметить, что экстраполяция неизменно ведет к снижению ошибки почти во всех экспериментах.

Результаты вычислений

В ходе проведения серии вычислительных экспериментов была оценена эффективность метода с разными параметрами нейронных сетей. Уровень стохастического шума изменялся параллельно с дискретизацией с шагами $\Delta t \in \{0.1;\ 0.05;\ 0.025;\ 0.0125\}$. На основании полученных результатов было определено, что повышение точности составляет 3.5 раза, то есть ошибка без метода Ричардсона составляет 0.0523, а с ним 0.0147. Учитывая результаты эксперимента, мож-

но сделать вывод, что метод позволяет эффективно подавлять ошибки дискретизации, при этом затраты на ресурсы для вычислений растут медленнее, чем при уменьшении шага интегрирования. Из этого можно сделать вывод, что экстраполяция Ричардсона обеспечивает ускорение сходимости.

Сопоставление с другими подходами

Метод Ричардсона в первую очередь выигрывает за счет баланса между точностью и вычислительными издержками. В нейросетевых альтернативах, напротив, память и время вычислений растут при увеличении числа нейронов. Если же попытаться использовать арифметические методы, то с повышением точности также растут требования к вычислительной мощности процессора. В случае с использованием ансамбля предполагается работа с нейронными сетями, а ранее уже было определено, что такой подход требует больше вычислений.

Заключение

Метод Ричардсона показал себя как эффективное решение для повышения точности в задачах экстраполяции. Результаты наблюдений показывают, что такое решение может без существенного роста затрат на вычисления снизить погрешность дискретизации. Квантованные архитектуры, рекуррентные нейронные сети и нейронные ОДУ создают благоприятную базу для использования метода экстраполяции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука; 1989. 608 с.
2. Калиткин Н. Н. *Численные методы.* 2-е изд., испр. СПб.: БХВ-Петербург; 2014. 592 с.
3. Richardson L. F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* 1911;210:307–357.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
5. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems.* 2nd rev. ed. Berlin: Springer; 1993. 512 p.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии.* 4-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»; 2015. 248 с.