

DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-4

ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НА ЗАДАЧЕ С ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ

В. А. Галкин^{1,2}, **А. В. Гореликов**^{1,2}, **И. В. Бычин**^{1,2}, **А. О. Дубовик**^{1,2}, **А. В. Ряховский**^{1,2}

¹ Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, г. Сургут, Российская Федерация

² Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация
val-gal@yandex.ru

Аннотация: представлены результаты тестирования разработанного пакета программ для численного моделирования задач магнитной гидродинамики. Программный комплекс создан с использованием технологии CUDA Fortran и ориентирован на вычислительные системы с графическими процессорами. Получено точное трехмерное решение системы уравнений магнитной гидродинамики, которое использовалось для тестирования реализованных вычислительных алгоритмов. Результаты тестовых расчетов демонстрируют корректность получаемых численных решений.

Ключевые слова: вычислительная магнитная гидродинамика, точные решения.

Благодарности: работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 20-04-60123.

Для цитирования: Галкин В. А., Гореликов А. В., Бычин И. В., Дубовик А. О., Ряховский А. В. Тестирование алгоритмов вычислительной магнитной гидродинамики на задаче с точным решением. *Успехи кибернетики*. 2020;1(4):29–37. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-4.

TESTING COMPUTATIONAL MAGNETOHYDRODYNAMICS ALGORITHMS WITH A PROBLEM HAVING AN EXACT SOLUTION

Valery A. Galkin^{1,2}, **Andrey V. Gorelikov**^{1,2}, **Igor V. Bychin**^{1,2}, **Alexei O. Dubovik**^{1,2},
Alexei V. Ryakhovsky^{1,2}

¹ Surgut branch of SRISA, Surgut, Russian Federation

² Surgut State University, Surgut, Russian Federation
val-gal@yandex.ru

Abstract: the results of testing the magnetohydrodynamic simulation software package developed by the authors are presented. The software package was developed with CUDA Fortran and is intended for GPU computing systems. An exact 3D solution of the system of magnetohydrodynamic equations was obtained and applied to testing the computational algorithms. The test results demonstrate that the numerical solutions are valid.

Keywords: computational magnetohydrodynamics, exact solutions.

Acknowledgements: this study is supported by RFBR grant 20-04-60123.

Cite this article: Galkin V. A., Gorelikov A. V., Bychin I. V., Dubovik A. O., Ryakhovsky A. V. Testing Computational Magnetohydrodynamics Algorithms with a Problem Having an Exact Solution. *Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(4):29–37. DOI: 10.51790/2712-9942-2020-1-4-4.

Постановка задачи и математическая модель

Система уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости в изотермическом случае в прямоугольных координатах $\{x_1, x_2, x_3\} \in U$ имеет вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi\rho} (\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

где t — время; \mathbf{u} — скорость жидкости; p — давление; \mathbf{B} — индукция магнитного поля; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; ν_m — магнитная вязкость.

Пусть область U — это шар радиуса R . На границе области течения ∂U выполняется условие непротекания:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})| = 0, \quad (5)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности ∂U . Аналогичное условие выполняется для вектора напряженности магнитного поля:

$$(\mathbf{B}, \mathbf{n})| = 0. \quad (6)$$

Граничные условия в касательных направлениях к поверхности сферы получаются сужением ниже представленных точных решений на границу области U . Начальные условия имеют вид:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \begin{pmatrix} x_2 - 3x_2x_3 - x_3 + x_2 \sin x_3 - 2x_3 \cos x_2 + 4x_2 \sin \sqrt{2}x_3 - x_3 \sin \sqrt{2}x_2 \\ -x_1 + 3x_1x_3 + x_3 - x_1 \sin x_3 + 3x_3 \sin x_1 + x_3 \cos \sqrt{2}x_1 - 4x_1 \sin \sqrt{2}x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_1 \cos x_2 - 3x_2 \sin x_1 + x_1 \sin \sqrt{2}x_2 - x_2 \cos \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{B}|_{t=0} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{U}|_{t=0}. \quad (8)$$

Точное решение задачи (1)–(4), удовлетворяющее заданным начальным условиям и условиям (5), (6), при $\nu = \nu_m = 1$ и $\rho = 1$ имеет вид:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_2 - 3x_2x_3 - x_3 \\ -x_1 + 3x_1x_3 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + e^{-\nu t} \begin{pmatrix} x_2 \sin x_3 - 2x_3 \cos x_2 \\ -x_1 \sin x_3 + 3x_3 \sin x_1 \\ 2x_1 \cos x_2 - 3x_2 \sin x_1 \end{pmatrix} + e^{-2\nu t} \begin{pmatrix} 4x_2 \sin \sqrt{2}x_3 - x_3 \sin \sqrt{2}x_2 \\ x_3 \cos \sqrt{2}x_1 - 4x_1 \sin \sqrt{2}x_3 \\ x_1 \sin \sqrt{2}x_2 - x_2 \cos \sqrt{2}x_1 \end{pmatrix}, \quad p = -\frac{\mathbf{u}^2}{2}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = 2\sqrt{\pi} \mathbf{u}. \quad (10)$$

Отметим, что для данного точного решения условия (5), (6) выполняются на сфере произвольного радиуса. Таким образом, течение жидкости в шаре стратифицируется на слои — сферы фиксированного радиуса.

Численное решение

Дискретные аналоги уравнений (1–4) получены методом контрольного объема [3–5] с использованием неявной схемы и схемы со степенным законом для аппроксимации конвективных и диффузионных потоков на гранях контрольных объемов. При получении дискретных аналогов уравнения Навье–Стокса и уравнения индукции использовались разнесенные расчетные сетки, т.е. компоненты скорости и индукции магнитного поля рассчитывались на гранях основных контрольных объемов. Если магнитное поле известно, то поля скорости и давления могут быть найдены по стандартным алгоритмам вычислительной гидродинамики (в данной работе используется алгоритм PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [6, 7]). Далее рассматривается метод нахождения индукции магнитного поля при заданном поле скорости. Используя известное соотношение векторного анализа $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u} \text{div} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u}$ для преобразования правой части уравнения (3), уравнения для компонент индукции магнитного поля можно записать в виде:

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u} B_\alpha - \nu_m \text{grad} B_\alpha) = \text{div}(\mathbf{B} u_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (11)$$

При построении дискретного аналога уравнение (11) интегрируется по контрольному объему D с центром в точке P и по времени с использованием полностью неявной схемы. Граница контрольного объема ∂D^+ ориентирована по внешней нормали \mathbf{n} и состоит из шести гладких поверхностей

S_b ($b = 1, \dots, 6$), ортогональных координатным осям. Индексы n и $n + 1$ обозначают сеточные значения функций в последовательные моменты времени t_n и t_{n+1} , ($\Delta t = t_{n+1} - t_n$) — шаг по времени. Дискретный аналог уравнения индукции (11) записывается в виде:

$$\frac{1}{\Delta t} (B_\alpha^{n+1} - B_\alpha^n) = H(B_\alpha^{n+1}) + Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где: $H(B_\alpha^{n+1}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{b=1}^6 a_b (B_\alpha^{n+1}(P_b) - B_\alpha^{n+1}(P))$ — конечно-разностный оператор, аппроксимирующий конвективные и диффузионные потоки на гранях контрольного объема, P_b — соседние с P точки; коэффициенты a_b рассчитываются по схеме со степенным законом [3] ($b = 1, \dots, 6$); Q_α — линейаризованные источниковые члены; ΔV — объем D .

Дискретный аналог уравнения неразрывности получается путем интегрирования (4) по контрольному объему D : $\int_D \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_{b=1}^6 B_b^{n+1} \Delta S_b = \Delta_\alpha B_\alpha^{n+1}$, где $B_b = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{S_b}$,

$$\Delta_\alpha B_\alpha^{n+1} = 0, \quad (13)$$

где Δ_α — разностный аналог частной производной $\partial/\partial x_\alpha$.

Для обеспечения соленоидальности магнитного поля используется метод искусственного скалярного потенциала [8, 9]. На первом шаге алгоритма (предиктор) находится первое приближение магнитного поля \mathbf{B}^* из уравнения (12):

$$\frac{1}{\Delta t} (B_\alpha^* - B_\alpha^n) = H(B_\alpha^*) + Q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (14)$$

На втором шаге производится корректировка поля \mathbf{B}^* так, чтобы новое поле \mathbf{B}^{**} было соленоидальным:

$$\Delta_\alpha B_\alpha^{**} = 0. \quad (15)$$

Поле \mathbf{B}^{**} ищется в виде $\mathbf{B}^{**} = \mathbf{B}^* + \delta \mathbf{B}$, причем поправочное поле $\delta \mathbf{B}$ полагается потенциальным: $\delta \mathbf{B} = -\operatorname{grad} \phi$. Уравнение на потенциал ϕ получается из условия соленоидальности \mathbf{B}^{**} :

$$\Delta_\alpha^2 \phi = \Delta_\alpha B_\alpha^*, \quad (16)$$

где Δ_α^2 — разностный аналог оператора Лапласа.

Предполагается, что на границе расчетной области G задана нормальная составляющая вектора магнитной индукции B_n , интегрально удовлетворяющая условию соленоидальности $\int_{\partial G} B_n dS = 0$, и $B_n^{**}|_{\partial G} = B_n^*|_{\partial G} = B_n$, тогда:

$$\delta B_n|_{\partial G} = \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial G} = 0, \quad (17)$$

т.е. потенциал ϕ определяется как решение краевой задачи на уравнение Пуассона (16) с однородными граничными условиями второго рода (17). Шаги алгоритма повторяются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость в уравнениях (6, 7) на данном временном слое. В частности, максимальное по модулю сеточное значение дивергенции \mathbf{B} должно быть меньше некоторого наперед заданного ε , т.е.:

$$\max_{\forall P \in G} |\operatorname{div} \mathbf{B}(P)| < \varepsilon, \quad \text{где } \operatorname{div} \mathbf{B}(P) \approx \frac{1}{V_D} \int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \approx \frac{1}{V_D} \sum_{b=1}^6 B_b \Delta S_b.$$

При достижении сходимости: $B_\alpha^{n+1} = B_\alpha^{**}$.

Результаты тестов

При разработке программного обеспечения для моделирования МГД-течений использована технология CUDA [10] с набором расширений к языку программирования Фортран (CUDA Fortran) [11], что позволяет использовать для расчетов вычислительные системы с графическими процессорами.

Тестовые расчеты проводились в кубе G со стороной, равной единице, до момента времени $T = 10$, на равномерных сетках $(n_1 \times n_2 \times n_3)$, где n_α – количество контрольных объемов вдоль соответствующей координатной линии. На каждом шаге по времени условие соленоидальности для \mathbf{u} и \mathbf{B} выполнялось с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$. Шаг по времени выбирался так, чтобы погрешность аппроксимации по времени была существенно меньше погрешности аппроксимации по пространственным переменным (во всех представленных расчетах $\Delta t = 10^{-5}$). Точность численного решения оценивалась по максимальной абсолютной погрешности $\Delta F = \max_{G \otimes (0, T]} |F - F_{an}|$.

На рис. 1–5 представлены некоторые результаты расчетов на сетке $40 \times 40 \times 40$ в сравнении с аналитическим решением. Результаты тестов на численную сходимость на последовательности вложенных расчетных сеток, приведенные в таблице, демонстрируют промежуточный результат между первым и вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным. Таким образом, в работе продемонстрирована корректность получаемых численных решений и возможность использования разработанного программного обеспечения для решения трехмерных задач магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

Таблица

Максимальные абсолютные погрешности

| $n_1 \times n_2 \times n_3$ | Δu_x | Δu_y | Δu_z | ΔB_x | ΔB_y | ΔB_z |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $20 \times 20 \times 20$ | $3,99 \cdot 10^{-4}$ | $4,12 \cdot 10^{-4}$ | $3,08 \cdot 10^{-4}$ | $2,83 \cdot 10^{-3}$ | $4,16 \cdot 10^{-3}$ | $2,76 \cdot 10^{-3}$ |
| $40 \times 40 \times 40$ | $1,56 \cdot 10^{-4}$ | $1,58 \cdot 10^{-4}$ | $7,41 \cdot 10^{-5}$ | $8,61 \cdot 10^{-4}$ | $1,46 \cdot 10^{-3}$ | $8,84 \cdot 10^{-4}$ |
| $80 \times 80 \times 80$ | $5,49 \cdot 10^{-5}$ | $5,81 \cdot 10^{-5}$ | $1,92 \cdot 10^{-5}$ | $3,41 \cdot 10^{-4}$ | $4,96 \cdot 10^{-4}$ | $2,35 \cdot 10^{-4}$ |

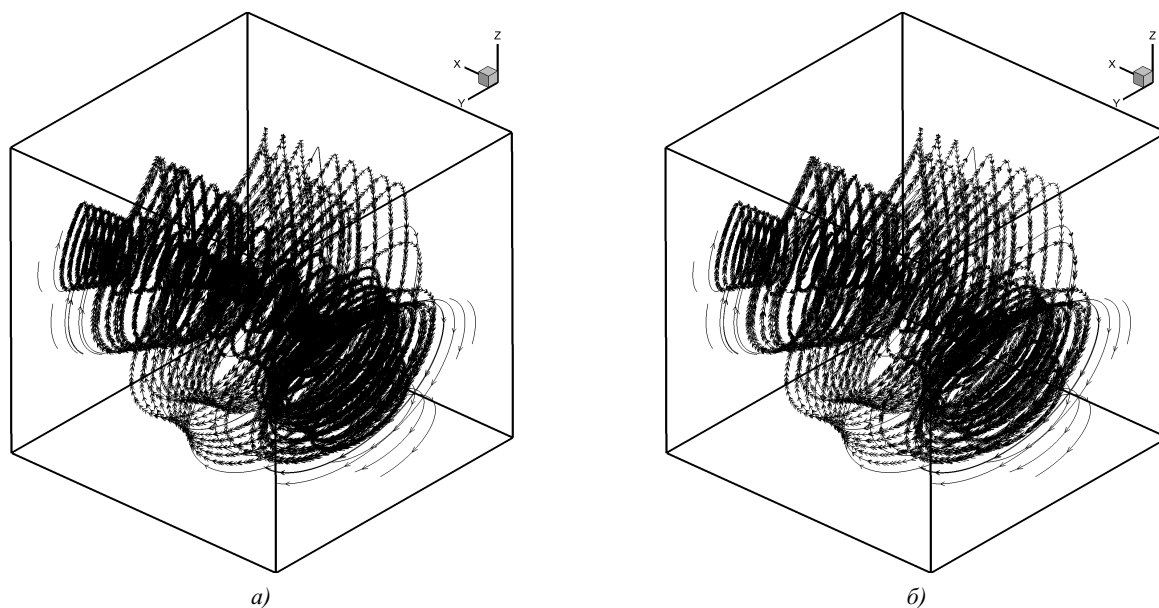


Рис. 1. Силовые линии индукции магнитного поля (а – численное решение, б – аналитическое решение)

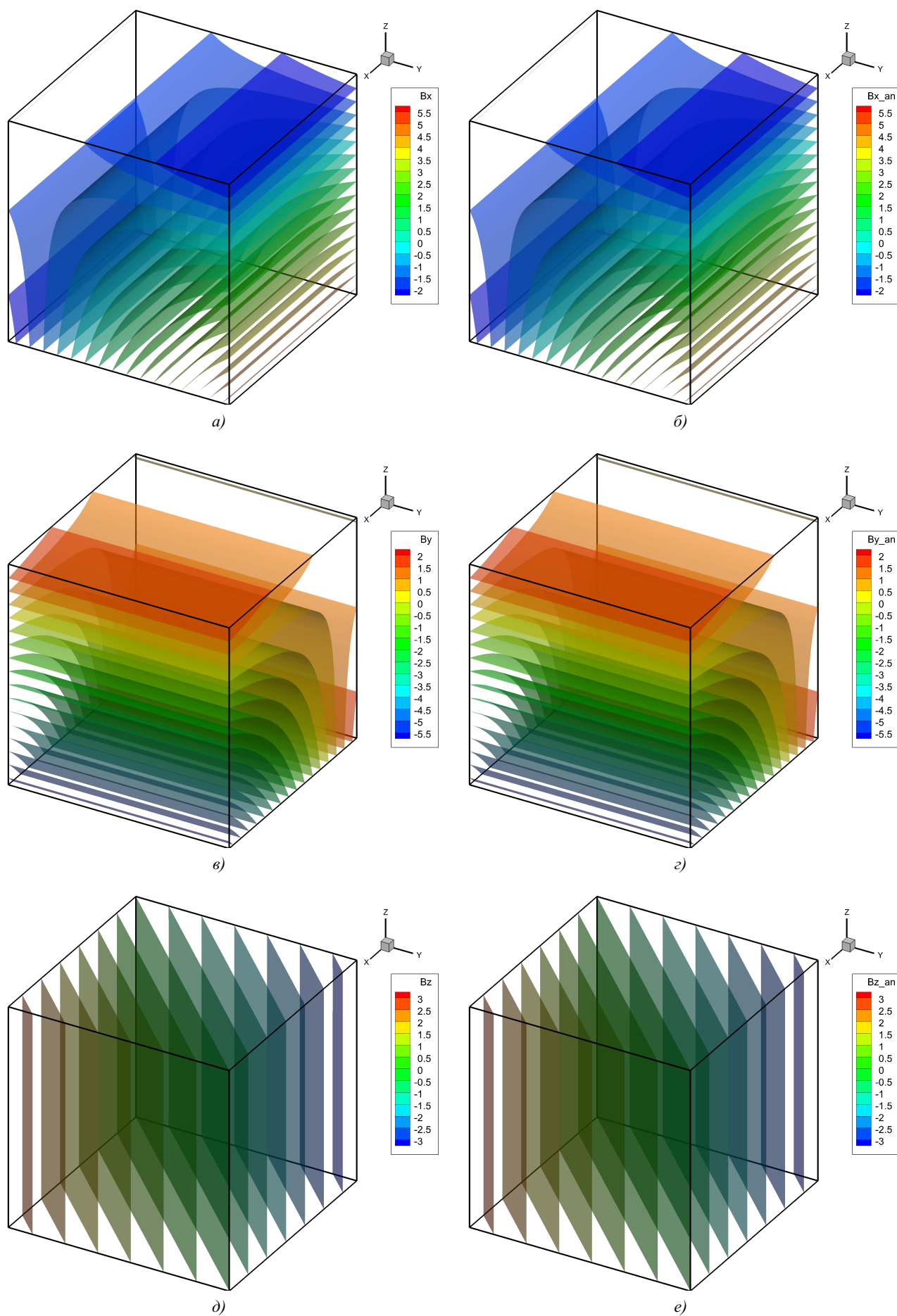


Рис. 2. Изоповерхности компонент индукции магнитного поля (а, в, д — численное решение; б, г, е — аналитическое решение)

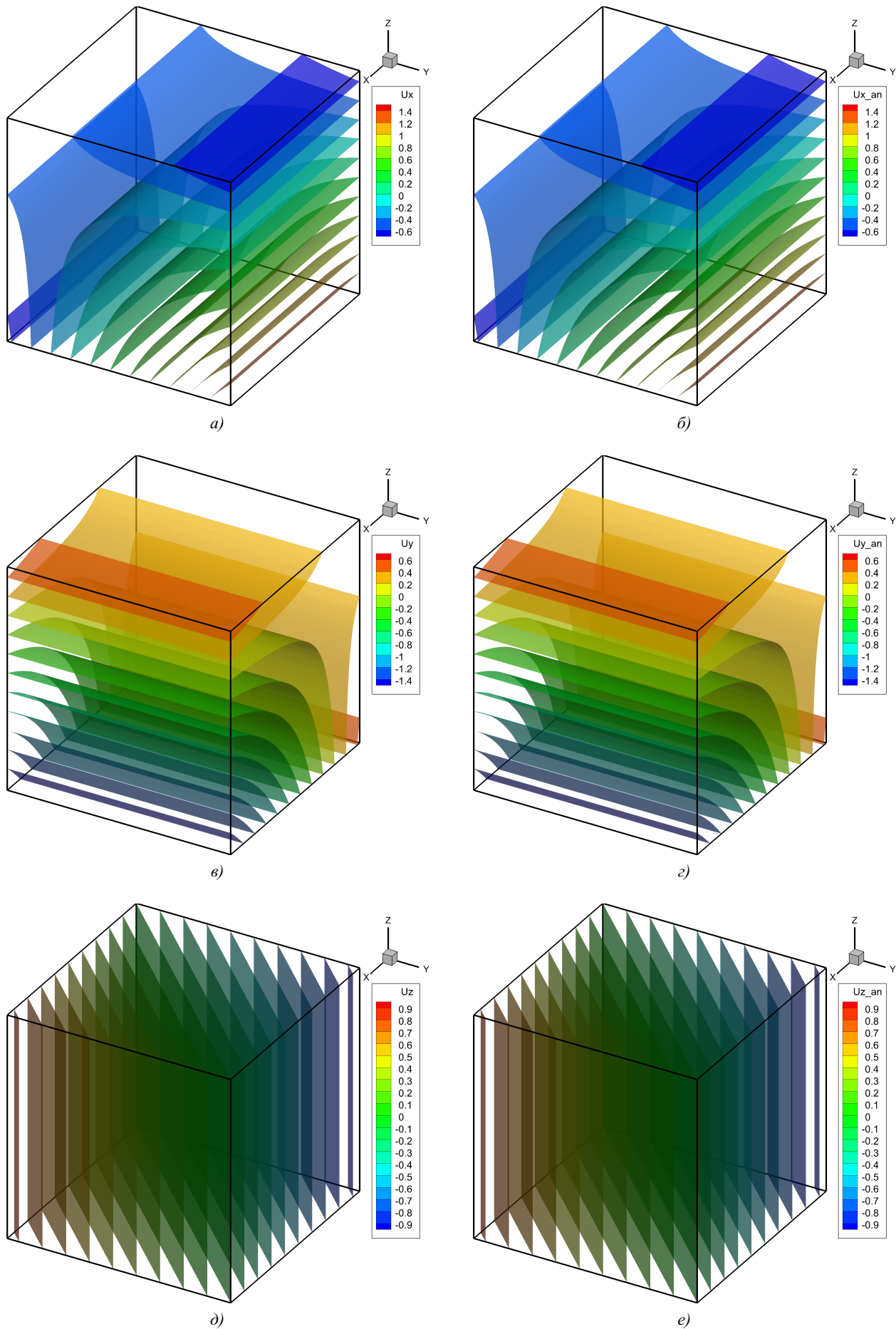


Рис. 3. Изоповерхности компонент поля скоростей (а, в, д — численное решение; б, г, е — аналитическое решение)

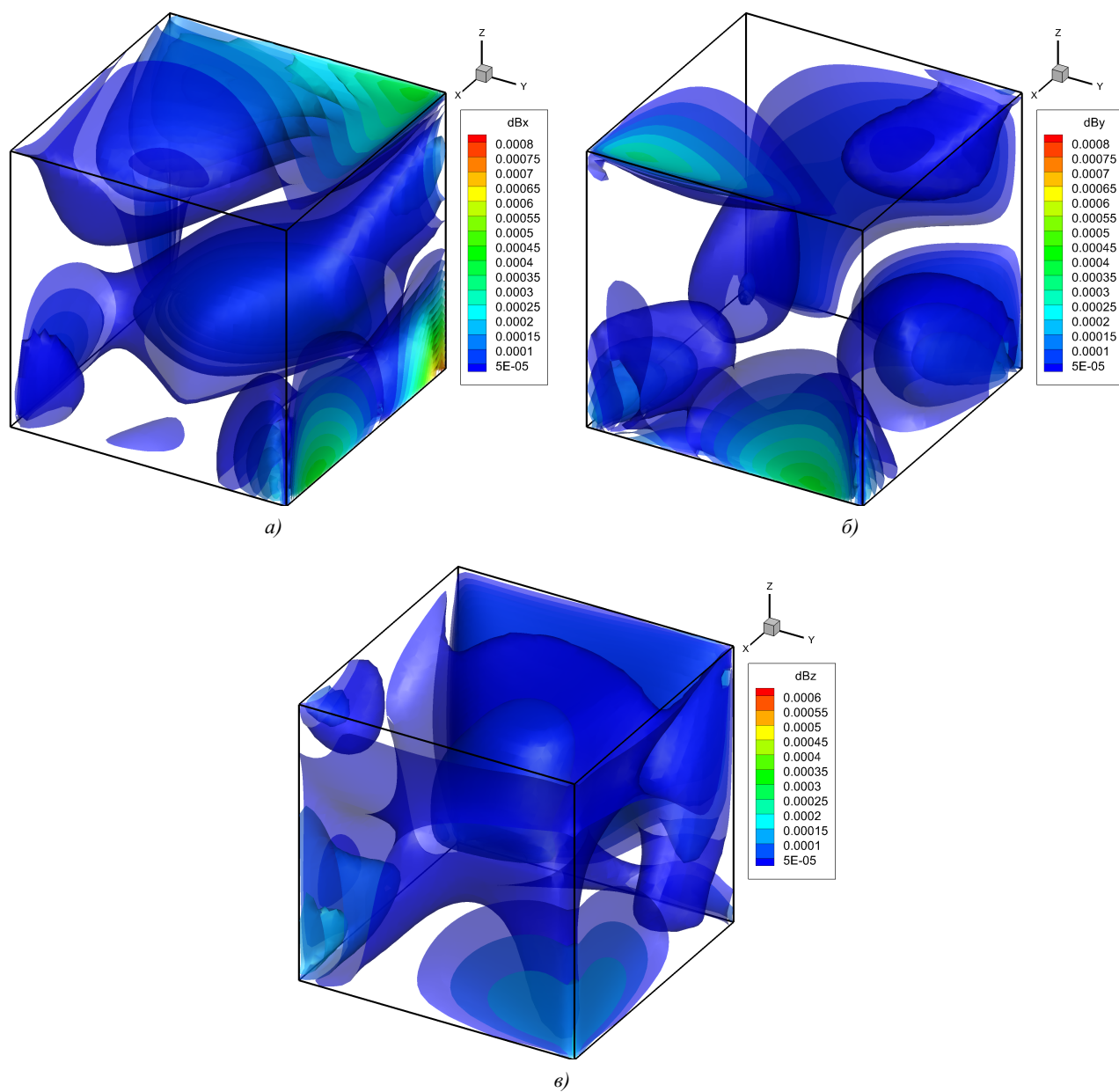


Рис. 4. Распределение абсолютной ошибки для компонент индукции магнитного поля (а — ΔB_x , б — ΔB_y , в — ΔB_z)

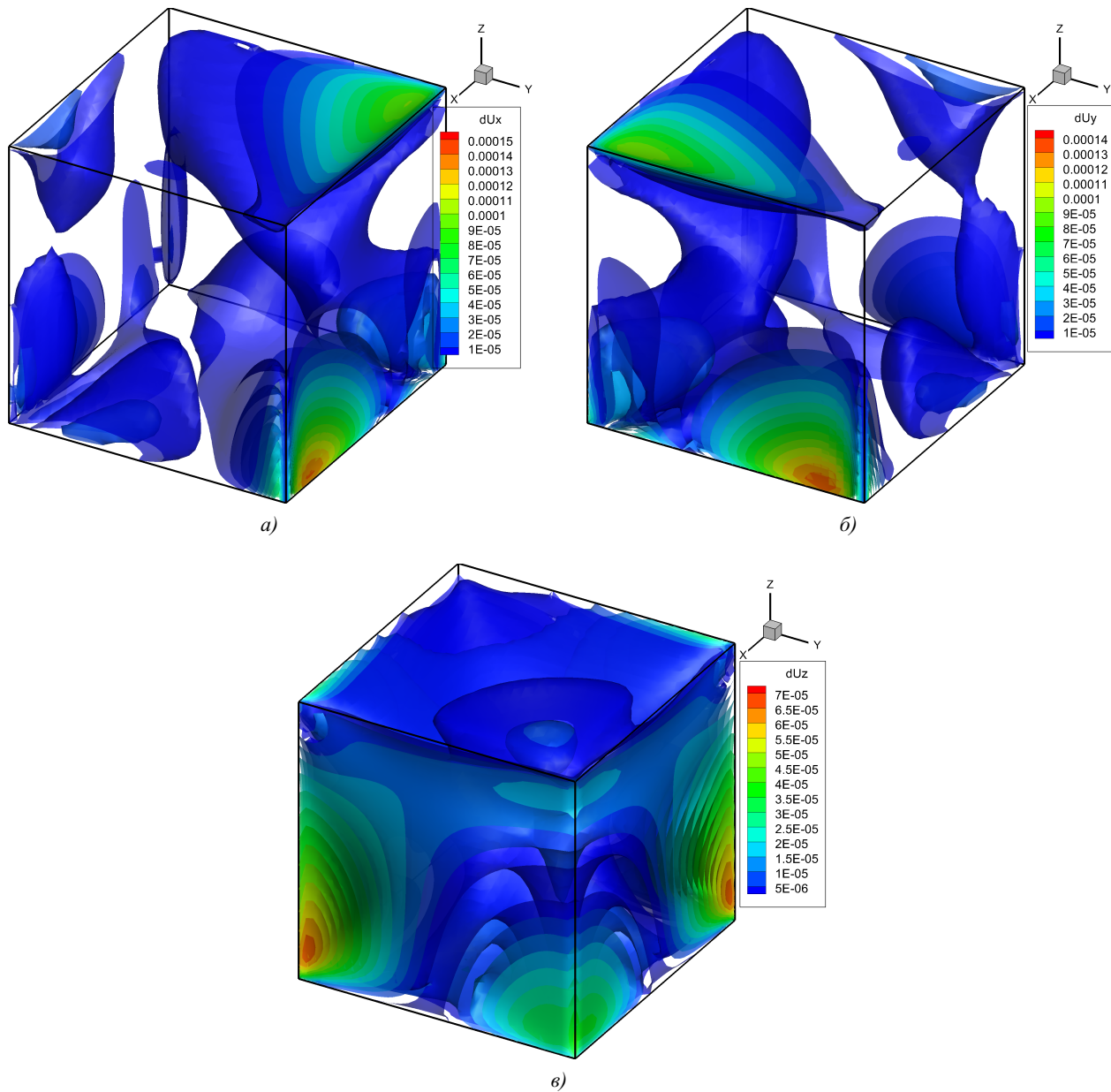


Рис. 5. Распределение абсолютной ошибки для компонент поля скоростей (а — ΔU_x , б — ΔU_y , в — ΔU_z)

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика*. 3-е изд. М.: Логос; 2011. 324 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2005. 656 с.
3. Patankar S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington DC: Hemisphere Publishing; 1980. 197 p.
4. Versteeg H. K., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Harlow: Pearson Education Limited; 2007. 503 p.
5. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer; 2002. 423 p.
6. Issa R. I. Solution on the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. *Journal of Computational Physics*. 1985;61:40–65.
7. Issa R. I., Gosman A. D., Watkins A. P. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-Iterative Implicit Scheme. *Journal of Computational Physics*. 1986;62: 66–82.
8. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. М: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 608 с.
9. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Гореликов А. В. Алгоритм типа предиктор-корректор для численного решения уравнения индукции в задачах магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. *Доклады Академии наук*. 2015;464(5):525–528.
10. Sanders J., Kandrot E. *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. Boston: Addison-Wesley Professional; 2010. 312 p.
11. Ruetsch G., Fatica M. *CUDA Fortran for Scientists and Engineers*. Boston: Morgan Kaufmann; 2013. 339 p.