

DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-2-1

ТОЧЕЧНЫЕ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОНАВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИИ**В. Б. Бетелин¹, В. А. Галкин², А. В. Ряховский^{2,3}**¹ *Федеральное государственное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация, betelin@niisi.msk.ru*² *Сургутский филиал Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Сургут, Российская Федерация, val-gal@yandex.ru*³ *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация, ryakhovskij_av@surgu.ru*

Аннотация: рассмотрены две модели для математического моделирования распространения инфекции. Первая модель — точечная, вторая модель — распределенная, с учетом зависимости от пространственных координат. Представлены результаты вычислительных экспериментов, основанных на применении предложенных моделей.

Ключевые слова: точечная модель, трехмерная модель, численное моделирование.

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта «Вирусы» № 20-04-60123.

Для цитирования: Бетелин В. Б., Галкин В. А., Ряховский А. В. Точечные и распределенные модели распространения коронавирусной инфекции. *Успехи кибернетики*. 2021;2(2):12–20. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-2-1.

LOCAL AND DISTRIBUTED MODELS OF THE CORONAVIRUS SPREAD**Vladimir B. Betelin¹, Valerii A. Galkin², Alexei V. Ryakhovskiy^{2,3}**¹ *Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation, betelin@niisi.msk.ru*² *Surgut Branch of Federal State Institute “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation, val-gal@yandex.ru*³ *Surgut State University, Surgut, Russian Federation, ryakhovskij_av@surgu.ru*

Abstract: two coronavirus spread models are proposed: local and distributed with a dependence on spatial coordinates. The results of the numerical experiments with these models are presented.

Keywords: local model, 3D model, simulation.

Acknowledgements: the study was supported by RFBR, project No. 20-04-60123.

Cite this article: Betelin V. B., Galkin V. A., Ryakhovskiy A. V. Local and Distributed Models of the Coronavirus Spread. *Russian Journal of Cybernetics*. 2021;2(2):12–20. DOI: 10.51790/2712-9942-2021-2-2-1.

Введение (вирусный реактор — Земля)

Пандемия, вызванная коронавирусом COVID-19, спровоцировала на планете Земля такие геотектонические изменения, что фраза «Мир уже никогда не будет прежним» из банальной превращается в пророческую. Этот зловещий вирус стал мировым триггером, спусковым крючком, который смог запустить здоровые процессы приоритета национальных интересов перед шизофренией глобализации [1].

По сути дела, наша планета с глобальной экономикой массового потребления представляет собой вирусный реактор — аналог огромного атомного реактора без стенок в фазе катастрофического развития неконтролируемой цепной реакции размножения нейтронов, роль которых играют вирусы. Такой планетарный вирусный реактор, в котором перемешиваются неуправляемые многомиллионные

потоки больных и здоровых, превращающихся в больных, принципиально неуправляем. Другими словами, чтобы справиться с пандемией, надо отказаться от основы глобальной экономики массового потребления — многомиллионных интернациональных человеческих потоков, и в пределах отдельных стран, регионов и городов, и в масштабах всей планеты. То есть действовать на основе модели планеты как множества управляемых изолированных вирусных реакторов — типа страны, региона, города и т. д., обеспечивающих эффективную изоляцию потоков больных от здоровых. И на примере Китая, стран Евросоюза и России мы видим, что чем более жесткие и даже жестокие меры обеспечения изоляции больных от здоровых применяются на уровне страны, региона, города и особенно в мегаполисах масштаба Уханя, Москвы, Нью-Йорка, тем более эффективно удается противостоять распространению вируса.

В настоящее время, учитывая масштаб проблемы, ведущие мировые университеты и исследовательские центры создают группы для изучения и моделирования распространения COVID-19, к ним относятся: университет Джонса Хопкинса (США), Имперский колледж Лондона, Сингапурский университет технологии и дизайна (SUTD Data-Driven Innovation Lab) и др. Разработчики прикладного программного обеспечения, например, Comsol Multiphysics, также принимают усилия для создания программного обеспечения моделирования распространения инфекции. Среди отечественных исследователей заявлены группы экспертов Сбербанка и НТИ СПбПУ. Одной из наиболее популярных моделей для исследования распространения инфекции является модель SIR (Susceptible-Infected-Recovered). Так, например, исследователи из Оксфорда построили модель COVID-19 в рамках подхода SIR на основе данных распространения инфекции в Италии и Великобритании [2].

Стандартная SIR-модель не учитывает рождаемость и смертность и задается системой ОДУ из трех уравнений. Данный тип моделей учитывает, что инфекционное заболевание завершается и человек «удаляется» из числа инфицированных и уязвимых, либо приобретая иммунитет (SIR), либо умирая (SID – Susceptible-Infected-Dead). В настоящий момент разработано множество различных детерминистических моделей распространения заболеваний и активно ведется разработка новых моделей. Так, модель SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) используется, если заболевание передается воздушно-капельным путем в большом городе (популяция относительно гомогенна) и не оставляет после себя иммунитета, т. е. вся популяция разбивается на две группы: инфицированных и уязвимых. SEIRD-модель учитывает латентный период заболевания. В этом случае вся популяция делится на пять классов: восприимчивые, латентные, инфицированные, невосприимчивые, умершие. SEIHFR-модель делит популяцию уже на шесть классов: восприимчивые, латентные, инфицированные, госпитализированные, непохороненные, невосприимчивые. Данная модель используется для изучения динамики передачи заболеваний после вакцинации. В SEIR-моделях (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered) в отличие от предыдущих учитывается инкубационный период. Модель записывается в виде системы трех уравнений в частных производных и учитывает распределение по возрасту индивидов. В работе группы из Италии [3] предложена модель SIDARTHE (Susceptible-Infected-Diagnosed-Ailing-Recognized-Threatened-Healed-Extinct), описывающая восемь стадий протекания заболевания. Другая восьмикомпонентная модель [4] была предложена группой из США, и результаты данной модели находятся в согласии с данными распространения инфекции в городе Ухане, Китай. Указанные модели представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые обычно решаются методами Рунге–Кутты. Альтернативный подход к моделированию основан на использовании нейронных сетей. Исследователи из Массачусетского технологического института [5] разработали нейронную сеть, обученную на данных по динамике инфекции из города Уханя, Италии, США и Южной Кореи и позволяющую моделировать последствия введения и снятия карантина.

Распределенная математическая модель задачи, рассматриваемая в данной работе, состоит из системы уравнений переноса, описывающих изменение во времени плотностей инфицированного, неинфицированного и иммунизированного населения, а также начальных условий. Изменение исследуемых величин в пространстве моделируется за счет введения в уравнения диффузионных и конвективных слагаемых. Для численного решения задач данной модели использовались многократно апробированные методы вычислительной гидродинамики (метод контрольного объема, неявная по времени схема) [6].

Математические модели «коронавирусного реактора»

Рассматривается популяция, в которой распространяется инфекционный процесс, основанный на взаимодействии процессов переноса и взаимных превращений (реакций) элементов системы. По своей природе динамика таких систем основана на соотношениях баланса (законов сохранения), типичных для кинетической теории, для уравнений Больцмана в теории газов, ядерных реакторов, кинетической теории коагуляции и т. п.

Конечно, разработка моделей столь масштабного и быстро протекающего явления изнутри дело сложное и многих данных не хватает. Но, в целом, можно усмотреть аналогию текущей ситуации с процессами, происходящими в ядерном реакторе, что позволяет рассматривать все происходящее как «вирусный» реактор, в котором «выгорает» топливо — люди, вступающие во взаимодействие с вирусной инфекцией. С этой точки зрения изолировавшиеся территории (страны) можно рассматривать как «вирусный котел» с непроницаемыми границами по перекрытому властями периметру, в котором взаимодействует смесь из здоровых и зараженных людей. Здоровые в результате перемешивания за счет контактов с зараженными также становятся зараженными. Последние могут превратиться в больных, часть из которых выздоравливает (возможно, приобретая иммунитет), а часть, увы, гибнет.

В рамках этой аналогии важно понять, что является реальным управляющим фактором наподобие управляющих стержней (СУЗ — система управления защитой) в ядерном реакторе. Наличие управления позволяет «погасить» реактор или его «разогнать». Из публикуемых статистических сводок можно пока выявить важный управляющий фактор — это коэффициент перемешивания здоровых и зараженных людей. Этот коэффициент существенно связан с наличием нелокальных связей в реакторе, прежде всего — с транспортными потоками (метро, наземный транспорт), поскольку именно они способствуют перемешиванию населения и сопутствующей передаче инфекции.

Для описания распространения инфекции используются величины n_1, n_2, n_3 , соответственно обозначающие концентрации «неинфицированного», «инфицированного» и «иммунизированного» населения, именуемые ниже состояниями элементов системы. Ниже, там, где это не влечет за собой потери смысла, состояния элементов системы будем обозначать символами соответствующих концентраций. Рассматриваются две модели — первая модель точечная, не предусматривающая пространственного распределения величин, а вторая — распределенная, в которой зависимость от пространственных координат учитывается за счет введения диффузионных и конвективных слагаемых. Включение диффузионного блуждания приводит к моделям типа «reaction-diffusion», рассматривавшимся в работах по теории горения и детонации, цепных реакций и самоорганизации, в частности, см. [7–9].

1. Точечная модель коронавирусного реактора

Модель пространственно-однородной системы (без учета пространственного переноса) соответствует в задачах ядерной энергетики [10, 11] так называемому точечному реактору. Она основывается на системе обыкновенных дифференциальных уравнений для динамики неизвестных величин (концентраций) $n_1(t), n_2(t), n_3(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\lambda_1 n_1 n_2 + \alpha n_3 + q_1, \\ \frac{dn_2}{dt} = \lambda_1 n_1 n_2 - \gamma n_2 - \lambda n_2 + \beta n_3 + q_2, \\ \frac{dn_3}{dt} = \gamma n_2 - (\alpha + \beta) n_3 + q_3, \end{cases} \quad (1)$$

где t — время; $\alpha \geq 0$ — интенсивность перехода из состояния n_3 в состояние n_1 ; $\beta \geq 0$ — интенсивность перехода из состояния n_3 в состояние n_2 ; $\gamma \geq 0$ — интенсивность перехода из состояния n_2 в состояние n_3 ; $\lambda \geq 0$ — интенсивность смертности; λ_1 — интенсивность заражения, т.е. перехода элементов из состояния n_1 в состояние n_2 ; $q_i(t) \geq 0, i = 1, 2, 3$ — источниковые члены. По существу система (1) является балансом (системой законов сохранения) актов «рождения» и «гибели» элементов системы в результате их взаимодействия. Параметр $\lambda_1 \geq 0$ задает интенсивность заражения при перемешивании здоровых и инфицированных представителей популяции. В результате такого взаимодействия с интенсивностью λ_1 происходит превращение здоровых представителей системы в зараженных.

Начальные значения величин предполагаются известными:

$$n_i(0) = n_{i0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

причем $n_{i0} \geq 0, i = 1, 2, 3$.

Если $\lambda = 0$, $q_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, то система (1) определяет соотношение сохранения для суммы величин n_1, n_2, n_3 . Действительно, в этом случае сумма правых частей системы (1) будет равна нулю, т. е.:

$$\frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} + \frac{dn_3}{dt} = 0,$$

откуда следует, что

$$n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) \equiv \text{const.}$$

Теорема. Правая часть системы (1) является оператором больцмановского типа. Если параметры $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda$ и значения функций $q_i, i = 1, 2, 3$, неотрицательны, то оператор в правой части системы (1) обладает свойствами диссипативности и неотрицательности при $n_i \geq 0$ [12, 13]. Соответственно, система (1) при неотрицательных начальных данных обладает единственным, неотрицательным, гладким решением для всех значений времени $t \geq 0$.

2. Распределенная модель

Рассматривается задача переноса на сфере единичного радиуса $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$. Математической моделью задачи является система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) n_1 = -\lambda_1 n_1 n_2 + \alpha n_3 + \sigma_1 \Delta n_1 + q_1, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) n_2 = \lambda_1 n_1 n_2 - \gamma n_2 - \lambda n_2 + \beta n_3 + \sigma_2 \Delta n_2 + q_2, \\ \frac{\partial n_3}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) n_3 = \gamma n_2 - (\alpha + \beta) n_3 + \sigma_3 \Delta n_3 + q_3, \end{cases} \quad (2)$$

где t — время; $n_1(r, \theta, \phi, t), n_2(r, \theta, \phi, t), n_3(r, \theta, \phi, t)$ — неизвестные величины; $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \lambda_1$ — параметры задачи, определяемые так же, как и для системы (1); $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — коэффициенты диффузии; (r, θ, ϕ) — сферические координаты; $q_i(t) \geq 0, i = 1, 2, 3$ — источниковые члены. Поле скорости \mathbf{v} предполагается заданным.

Считается, что в начальный момент времени $t = 0$ известны распределения величин $n_1(r, \theta, \phi, t), n_2(r, \theta, \phi, t), n_3(r, \theta, \phi, t)$:

$$n_i(r, \theta, \phi, 0) = \psi_i(r, \theta, \phi), i = 1, 2, 3.$$

Тестовые расчеты

1. Точечная модель

Численное решение системы (1) производилось при помощи схемы Эйлера. Значения параметров модели были выбраны следующими:

$$\lambda_1 = 5, \gamma = 5, \alpha = \beta = 0, \lambda = 0.1,$$

источниковый член был равен:

$$q(t) = 0.1.$$

Начальные условия имели вид:

$$n_1(0) = 0.99999, n_2(0) = 0.00001, n_3(0) = 0.$$

Результаты вычислительного эксперимента приведены на рис. 1, который демонстрирует осцилляционный режим, типичный для распространения COVID-19.

2. Распределенная модель

Дискретный аналог для системы (2) был построен при помощи метода контрольного объема с использованием полностью неявной схемы [6]. Для решения СЛАУ, полученной в результате дискретизации, был использован метод переменных направлений.

Далее приводятся результаты вычислительных экспериментов для распределенной модели. В проведенной серии расчетов были использованы следующие значения параметров:

$$\lambda_1 = 5, \gamma = 5, \alpha = \beta = 0, \lambda = 0.1.$$

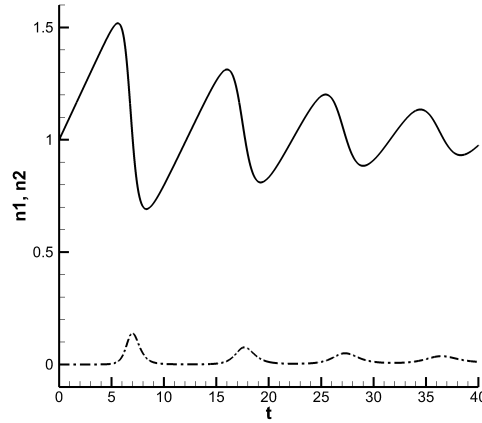


Рис. 1. Зависимости n_1 и n_2 от времени. Сплошная линия — n_1 , штрих-пунктирная линия — n_2

Коэффициенты диффузии предполагались постоянными и равными друг другу:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma = 1.$$

Заданное на сфере поле скорости $v = (v_x, v_y, v_z)$ имеет вид:

$$v_x = -z \sin y, \quad v_y = z \sin x, \quad v_z = x \sin y - y \sin x.$$

Начальные условия выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} n_1(r, \theta, \phi, 0) &= 1, \\ n_2(r, \theta, \phi, 0) &= \begin{cases} A, & \text{если } \theta \in \left[\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4} + \delta\right], \phi \in [\pi - \delta, \pi + \delta], \\ 0, & \text{если } \theta \notin \left[\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4} + \delta\right] \text{ или } \phi \notin [\pi - \delta, \pi + \delta], \end{cases} \\ n_3(r, \theta, \phi, 0) &= 0, \end{aligned}$$

где A и δ — параметры, определяющие величину и локализацию начального распределения n_2 . Их значения были выбраны равными $A = 1000$, $\delta = 0.05$. Начальные распределения n_1 и n_2 изображены соответственно на рис. 2 и 3. Результаты вычислительных экспериментов приведены на рис. 4 и 5, которые иллюстрируют соответственно уменьшение численности здорового населения и увеличение численности инфицированного.

В качестве интегральных характеристик величин $n_1(r, \theta, \phi, t)$, $n_2(r, \theta, \phi, t)$, $n_3(r, \theta, \phi, t)$ были рассчитаны поверхностные интегралы от этих функций по сфере S :

$$N_i(t) = \iint_S n_i(r, \theta, \phi, t) dS, \quad (i = 1, 2, 3).$$

На рис. 6 приведена зависимость интегральных характеристик $N_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ от времени для расчета при значении $\sigma = 1$.

Заключение

Предложены две модели для распространения коронавирусной инфекции — точечная (1) и распределенная (2), учитывающая пространственную зависимость неизвестных. Проведена серия вычислительных экспериментов с использованием данных моделей, которые указывают на возможность близкой к периодической (рис. 1) динамики в точечной модели. Эта модель соответствует реактору без пространственных границ. Эволюция коронавирусной инфекции (новых заражений) в планетарном масштабе качественно подтверждает это наблюдение (см. рис. 7).

Для полной настройки моделей необходимы верифицированные экспериментальные данные, позволяющие достоверно оценить коэффициенты.

Расчеты показывают, что с течением времени практически все население станет инфицированным (доля инфицированного населения в популяции приближается к единице). Для модели вирусного

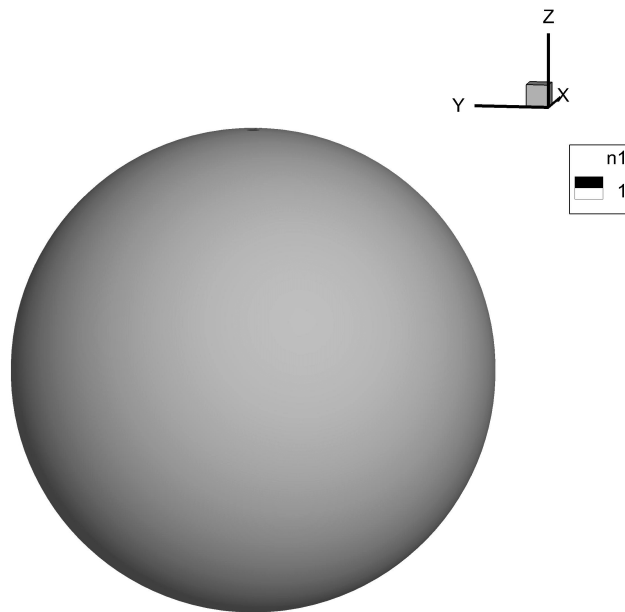


Рис. 2. Распределение n_1 на момент времени $t = 0$

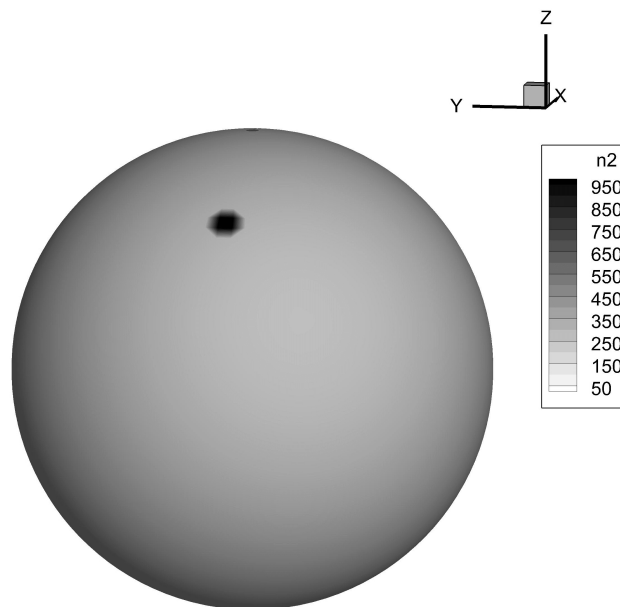


Рис. 3. Распределение n_2 на момент времени $t = 0$

реактора (без учета пространственного распределения населения и предположений о естественной иммунизации) на основе подсчитанной величины коэффициента перемешивания 0,118136 оценка численности больных на ранней стадии наблюдений распространения инфекции (19 апреля 2020 г.) получилась равной 23 966 чел. Фактическое число больных в Москве с практически непроницаемой на эту дату границей, по официальным данным, было равно 24 433. На дальнейший прогноз начал влиять пропускной режим, который изменил коэффициент перемешивания.

Возможен сценарий управления коэффициентом перемешивания, когда он становится практически нулевым. В этом случае доля инфицированных может быть зафиксирована на заданном уровне меньше единицы, т. е. ситуация может быть «заморожена» с выходом графика числа инфицированных людей на горизонтальное плато, но только в течение времени действия малости коэффициента перемешивания. Тогда система застывает в метастабильном состоянии. Но это чревато потрясениями уже в иной области – в экономике. Как только ограничения будут сняты, вирусный реактор снова пустится в разгон!

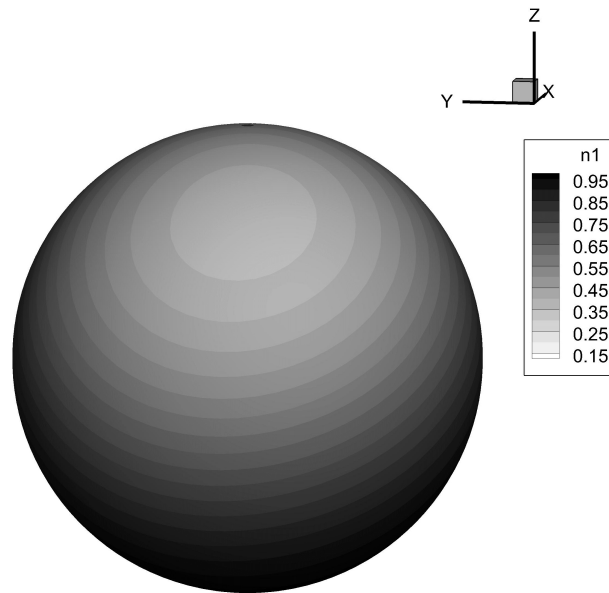


Рис. 4. Распределение n_1 на момент времени $t = 0.25$ при $\sigma = 1$

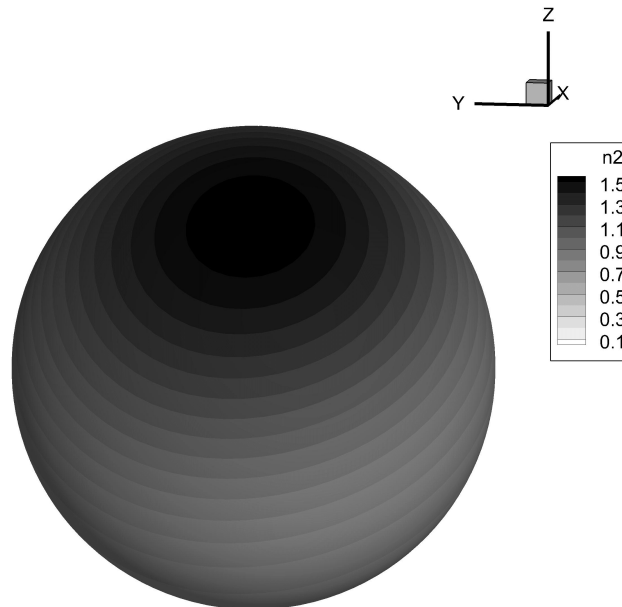


Рис. 5. Распределение n_2 на момент времени $t = 0.25$ при $\sigma = 1$

Проблему решает только вакцинация населения (при условии разработки эффективной вакцины, либо естественная иммунизация населения, конечно, если она имеет место за счет приобретенного иммунитета у переболевших), что позволяет существенно снизить долю инфицированных и подавить эпидемию.

Послесловие

После отправки данной статьи в редакцию журнала события, связанные с распространением коронавирусной инфекции в РФ (см. рис. 8), побудили авторов вновь обратить внимание на существенное влияние фактора перемешивания на возбуждение колебательных режимов в популяции. Открытая граница с Индией привела в течение мая-июня 2021 г. к значительному всплеску количества инфицированных коронавирусной инфекцией на уровне, превосходящем эффекты годовой давности. Так что это является очередным подтверждением явления коронавирусного реактора в глобальном масштабе, которое требует детального исследования на основе точных статистических данных.

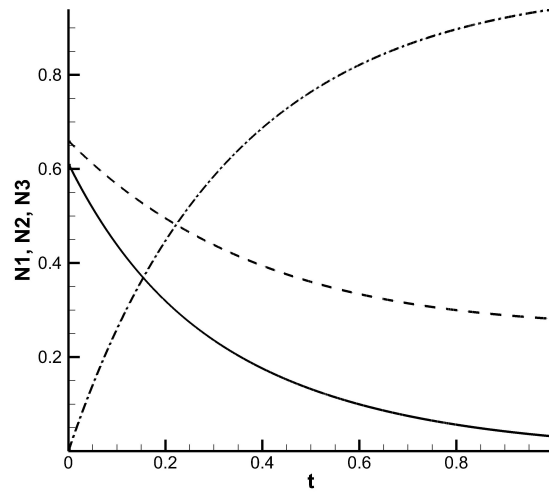


Рис. 6. Зависимость величин N_1, N_2, N_3 от времени в случае $\sigma = 1$. Штриховая линия — N_1 , сплошная линия — N_2 , штрих-пунктирная линия — N_3

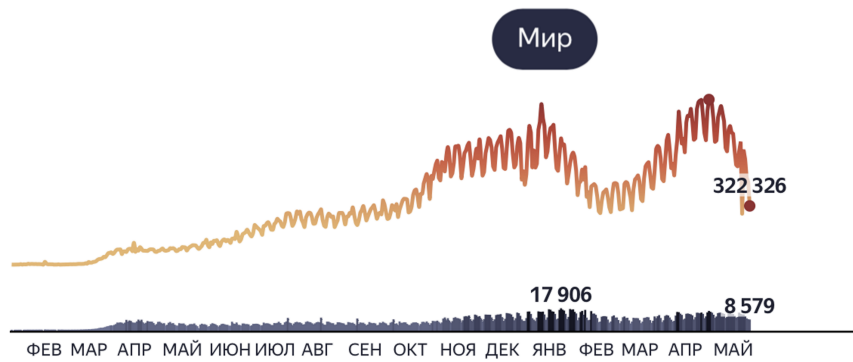


Рис. 7. Данные на 26.05.2021: число новых заражений — красный график и смертей — черный график (из открытых источников: Яндекс. Коронавирус: статистика)



Рис. 8. Данные по РФ на 23.06.2021 (из открытых источников: Яндекс. Коронавирус: статистика)

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А. Вирусный реактор Земля. *Аргументы недели. Экономика*. 13.05.2020;18(712).
2. Lourenço J., Paton R., Thompson C., Klenerman P., Gupta S. Fundamental Principles of Epidemic Spread Highlight the Immediate Need for Large-Scale Serological Surveys to Assess the Stage of the SARS-CoV-2 Epidemic. 2020. Preprint at <https://www.medrxiv.org/content/early/2020/03/26/2020.03.24.20042291>.
3. Giordano G., Blanchini F., Bruno R., Colaneri P., Di Filippo A., Di Matteo A., Colaneri M. Modelling the COVID-19 Epidemic and Implementation of Population-Wide Interventions in Italy. *Nat. Med.* 2020;26:855–860. DOI: 10.1038/s41591-020-0883-7.
4. Ndairou F., Area I., Nieto J. J., Torres D. F. M. Mathematical Modeling of COVID-19 Transmission Dynamics with a Case Study of Wuhan. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;135. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109846.
5. Dandekar R., Barbastathis G. Quantifying the Effect of Quarantine Control in COVID-19 Infectious Spread Using Machine Learning. 2020. Preprint at <https://doi.org/10.1101/2020.04.03.20052084>.
6. Патанкар С. *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*. М.: Энергоатомиздат; 1984. 152 с.
7. Kolmogorov A., Petrovskii I., Piskunov N. Study of a Diffusion Equation That Is Related to the Growth of a Quality of Matter and Its Application to a Biological Problem. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 1937;1:1–26.
8. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. *Журн. физ. химии*. 1938;12(1):100–105.
9. Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации*. М.: Мир; 1979. 512 с.
10. Шихов С. Б. *Вопросы математической теории ядерных реакторов (линейный анализ)*. М.: Атомиздат; 1973. 374 с.
11. Ершов Ю. И., Шихов С. Б. *Математические основы теории переноса. Т. 1. Основы теории*. М.: Атомиздат; 1985. 231 с.
12. Галкин В. А. *Уравнение Смолуховского*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2001. 336 с.
13. Галкин В. А. *Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2009. 408 с.