ISSN 2712-9942

# УСПЕХИ КИБЕРНЕТИКИ

## RUSSIAN JOURNAL OF CYBERNETICS

2026
Т. 7 № 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ «ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

# Успехи кибернетики

# Russian Journal of Cybernetics

**Том 7**
**№ 3**

**Vol. 7**
**No. 3**

Москва

2026

**Учредитель и издатель**
Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»
(НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ)

«Успехи кибернетики» — это рецензируемый научный журнал, в котором публикуются научные статьи по следующим специальностям (физико-математические, технические науки):

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ;
2.2.2. Электронная компонентная база микро- и наноэлектроники, квантовых устройств;
2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации.

Миссия журнала — развитие научных направлений по заявленной тематике в России и за рубежом, соответствующих приоритетным направлениям научно-технологического развития Российской Федерации, а также перечню важнейших наукоемких технологий.

Журнал ориентирован на пропаганду передовых идей в области физики, математики, технических наук, участие в реализации задач Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, обеспечение печатными площадями высококвалифицированных кадров, повышение качества диссертационных исследований в данных отраслях путем развития механизма профессионального и общественного обсуждения их научных результатов, воспитание молодого поколения ученых.

Журнал принимает к публикации оригинальные статьи; переводы статей, опубликованных в зарубежных журналах (при согласии правообладателя на перевод и публикацию); обзоры; эссе; комментарии; другие информационные материалы.

Издание будет полезно ученым, работающим в соответствующих областях наук, а также аспирантам и студентам.

**Главный редактор**
*Бетелин Владимир Борисович*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва
**Заместитель главного редактора**
*Галкин Валерий Алексеевич*, д. ф.-м. н., профессор, директор, Сургутский филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Сургут
**Члены редакционной коллегии**
*Панченко Владислав Яковлевич*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, вице-президент РАН, председатель Высшей аттестационной комиссии при Минобрнауки России, вице-президент НИЦ «Курчатовский институт», заведующий кафедрой медицинской физики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
*Власов Сергей Евгеньевич*, д. т. н., заместитель директора по стратегическим инфокоммуникационным и квантовым технологиям, НИЦ «Курчатовский институт», Москва
*Савин Геннадий Иванович*, академик РАН, д. ф.-м. н., профессор, научный руководитель, МСЦ — филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва
*Сойфер Виктор Александрович*, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории автоматизированных систем научных исследований, Самарский национальный исследовательский университет им. ак. С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН, Самара
*Чубариков Владимир Николаевич*, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
*Чаплыгин Юрий Александрович*, академик РАН, д. т. н., профессор, президент, Московский институт электронной техники, Москва
*Петров Игорь Борисович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой информатики, Московский физико-технический институт, Москва
*Смирнов Николай Николаевич*, д. ф.-м. н., профессор, заместитель декана механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, заместитель директора по стратегическим информационным технологиям, НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва
*Тишкин Владимир Федорович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры вычислительных методов, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
*Губайдуллин Амир Анварович*, д. ф.-м. н., профессор, директор, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича Сибирского отделения РАН, Тюмень
*Якобовский Михаил Владимирович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва
*Шагалиев Рашит Мирзагалиевич*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., заместитель директора Федерального научного центра
*Старков Сергей Олегович*, д. ф.-м. н., профессор, начальник отделения интеллектуальных кибернетических систем, Обнинский институт атомной энергетики, Обнинск
*Еськов Валерий Матвеевич*, д. ф.-м. н., д. б. н., профессор, заведующий отделом, Сургутский филиал НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Сургут
*Кабанихин Сергей Игоревич*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
*Лаврентьев Михаил Михайлович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., профессор, заместитель директора по научной работе, Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, Новосибирск
*Пятков Сергей Григорьевич*, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
*Ильин Валерий Павлович*, д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры прикладной математики, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
*Крыжановский Борис Владимирович*, член-корреспондент РАН, д. ф.-м. н., руководитель, Центр оптико-нейронных технологий НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, Москва
*Нагорнов Олег Викторович*, д. ф.-м. н., профессор, первый проректор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва
*Земпо Ясунари*, PhD (Physics), Университет Хосэй, Токио, Япония
*Пападопулос Атанас*, Doctorat d'Etat (Habilitation), mathematics, Университет Страсбурга, Национальный центр научных исследований Франции, Страсбург, Франция

**Ответственный секретарь**
Гавриленко Тарас Владимирович, к. т. н.
**Ответственный редактор**
Чалова Анна Петровна, к. филол. н.
**Технические редакторы**
Моргун Дмитрий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент; Горбунов Дмитрий Владимирович, к. т. н.
Амелин Максим Евгеньевич, Батуро Серафим Александрович, Бобровская Ольга Павловна, Гавриленко Михаил Тарасович
**Переводчик**
Троицкий Дмитрий Игоревич, к. т. н., доцент
**Художественное оформление обложки**
© Горбунов Александр Сергеевич

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ЭЛ № ФС 77-78857 от 04.08.2020.
Решением Высшей аттестационной комиссии с 27 июня 2022 года журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук».

Издается с 2020 года. Выпускается 4 раза в год.

Адрес редакции:
НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1.
Телефон: +7 9226-54-57-88, факс: +7 (495) 719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Сайт: jcyb.ru.

© НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ
© Авторы

**Founder and Publisher**
Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute"
(NRC "Kurchatov Institute" – SRISA)

Russian Journal of Cybernetics is peer-reviewed.
The journal publishes papers on physics, mathematics, and engineering. The key areas of interest are:
– simulation, numerical methods, and simulation software
– electronic components for micro- and nanoelectronics, and quantum devices
– system analysis, control, and information processing.
Our mission is advancing these research areas in Russia and globally, supporting Russia's national science and technology priorities, and science-intensive sectors.
The Journal promotes advanced concepts in physics, mathematics, engineering, and facilitates Russia's Science and Technology Development Strategy. We offer an opportunity for professional researchers to publish. We improve the doctorate research quality through public peer review and educate the new generation of researchers.
The Journal accepts original papers; translations of papers from international journals (consent of the right holders for the translation and publication is required); reviews; essays; remarks, and event reports.
The Journal is intended for researchers, university, and doctorate students.

**Chief Editor**
Prof. *Vladimir B. Betelin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS),
Doctor of Science (Phys&Math), Academic Director, NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Moscow
**Vice Chief Editor**
Prof. *Valery A. Galkin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Surgut Branch of NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Surgut
**Editorial Board**
Prof. *Vladislav Ya. Panchenko*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Vice President of the Russian Academy of Sciences, Head of the National Academic Degrees Authority, Russian Ministry of Science and Education, Vice President of the NRC "Kurchatov Institute", Chairperson of the Department of Medical Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow
Prof. *Sergey E. Vlasov*, Deputy Director for Strategic Information, Communication, and Quantum Technologies, NRC "Kurchatov Institute", Moscow
Prof. *Gennady I. Savin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math),
Academic Director, Joint Supercomputer Center – Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow
Prof. *Viktor A. Soifer*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, Chief Researcher Lab for Automated Research Systems, Korolev Samara National Research University, Academic Director, Institute of Image Processing Systems, RAS, Samara
Prof. *Vladimir N. Chubarikov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Mathematical and Computer Analysis Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow
Prof. *Yuri A. Chaplygin*, member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Engineering), President, National Research University of Electronic Technology, Moscow
Prof. *Igor B. Petrov*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Informatics,
Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow
Prof. *Nikolay N. Smirnov*, Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Dean, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Deputy Director for Strategic Information Technology, NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Moscow
Prof. *Vladimir F. Tishkin*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Computational Methods, Lomonosov Moscow State University, Moscow
Prof. *Amir A. Gubaidullin*, Doctor of Science (Phys&Math), Director, Tyumen Division, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, RAS Siberian Branch, Tyumen
Prof. *Mikhail V. Iakobovski*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow
Prof. *Rashit M. Shagaliyev*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director, Federal Research Center
Prof. *Sergey O. Starkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Head, Division of Intelligent Cybernetic Systems, Obninsk Institute of Atomic Energy, Obninsk
Prof. *Valery M. Eskov*, Doctor of Science (Phys&Math), Doctor of Science (Biology), Head of Division, Surgut Branch of NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Surgut
Prof. *Sergey I. Kabanikhin*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Principal Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk
Prof. *Mikhail M. Lavrentiev*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Deputy Director for Research, Institute of Automation and Electrometry, RAS Siberian Branch, Novosibirsk
Prof. *Sergey G. Pyatkov*, Doctor of Science (Phys&Math), Chairperson, Department of Further Mathematics, Yugra State University, Khanty-Mansiysk
Prof. *Valerii P. Ilyin*, Doctor of Science (Phys&Math), Professor, Department of Applied Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk
Prof. *Boris V. Kryzhanovskii*, corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Science (Phys&Math), Director, Opto-neural Technologies Center, NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Moscow
Prof. *Oleg V. Nagornov*, Doctor of Science (Phys&Math), First Vice-Rector, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow
Prof. *Yasunari Zempo*, PhD (Physics), Hosei University, Tokyo, Japan
Prof. *Athanase Papadopoulos*, Doctorat d'Etat (Habilitation), Mathematics, University of Strasbourg, French National Centre for Scientific Research, Strasbourg, France

**Executive Editor**
Taras V. Gavrilenko, Ph.D. (Engineering)
**Managing Editor**
Anna P. Chalova, Ph.D. (Linguistics)
**Technical Editors**
Dmitry A. Morgun, Ph.D. (Phys&Math), Assoc. Prof.; Dmitry V. Gorbunov, Ph.D. (Engineering)
Maksim E. Amelin, Serafim A. Baturo, Olga P. Bobrovskaya, Mikhail T. Gavrilenko
**Translator**
Dmitry I. Troitsky, Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.
**Cover Design**
© Alexander S. Gorbunov

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.
Mass media registration certificate EL No. FS 77-78857 dated on 04.08.2020.
On June 27, 2022 the National Board for Academic Degrees and Titles put the Russian Journal of Cybernetics on the list of leading journals for publishing papers by doctorate students.

Published since 2020. 4 issues per year.

Editorial Board Address:
NRC "Kurchatov Institute" – SRISA, Russia 117218, Moscow, Nakhimovsky pr., 36/1.
Tel.: +7(922)654-5788, fax: +7(495)719-76-81, e-mail: taras.gavrilenko@gmail.com. Web: jcyb.ru.

© NRC "Kurchatov Institute" – SRISA
© Authors

# СОДЕРЖАНИЕ

**Р. Д. Гимранов, В. А. Галкин, Т. В. Гавриленко, Д. А. Моргун, М. Т. Гавриленко, М. Е. Амелин, С. А. Батуро, А. И. Грюнталь**
Подсистема визуализации и настройки интеграционных компонентов для АСУ ТП: архитектурные решения и прототип . . . . . 8

**В. А. Галкин, А. В. Гореликов, М. А. Гореликов**
Параметрическая по расходу закачки физически информированная нейронная сеть для моделирования одномерной нестационарной задачи двухфазной фильтрации с учетом капиллярного давления . . . . . 17

**Г. К. Толоконников**
Логические основания нейронных сетей как категорных склеек, аксиоматика, дуальности и приложения . . . . . 26

**В. П. Кощеев, Ю. Н. Штанов**
Новый подход к расчету сечения радужного рассеяния атомов и ионов . . . . . 40

**А. Ю. Бабкин, А. И. Солдатов**
Гибридный подход к сжатию данных ультразвуковой многоканальной решетки на основе динамически изменяемой разрядности и пирамидальных методов . . . . . 45

**С. Н. Яцук, С. Г. Еловой**
Информационная система диагностики процессов разработки программного обеспечения на основе метрик DORA и SPACE с архитектурной сегрегацией видимости данных . . . . . 50

**В. В. Полухин, М. А. Попова, С. А. Третьяков, М. А. Филатов**
Проблема реальности динамического хаоса в биомеханике . . . . . 56

**М. И. Гапеев**
Параллельный алгоритм численного моделирования деформационных процессов в зонах подготовки землетрясений . . . . . 64

**К. В. Губарева, Е. Ю. Просвиряков**
Численное моделирование стационарного термокапиллярного течения в плоском канале в линейном приближении . . . . . 71

**Э. М. Исмайлов, Т. В. Гавриленко, О. Ю. Семенов**
Моделирование виртуальной IoT-системы удаленного мониторинга, а также управления двигателем на основе температурного гистерезиса и в ручном режиме . . . . . 79

**Д. В. Краюшкин**
Алгоритм обратимого сжатия серий медицинских изображений с выборочным устранением межкадровой избыточности . . . . . 86

**А. Л. Леготин, Г. К. Виноградов**
Интерполяция нормали пространственной кривой . . . . . 92

**Д. А. Михалевич**
Прогнозирование загрузки вычислительного кластера методами анализа временных рядов 101

**К. К. Новичков, О. И. Федин, Н. А. Шубин**
Обоснование прочности комплекта упаковочного ТУК-27/1 при испытаниях, имитирующих аварийные условия перевозки ловушек, содержащих гексафторид урана . . . . . 110

**А. Н. Рожков, А. С. Демидов, В. В. Галишникова**
Эпсилон-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов . . . . 118

**Р. Б. Рыбка, Д. Г. Крикунов, Я. П. Ивина**
Сравнение методов кодирования аудиосигналов для многослойных спайковых нейронных сетей в задачах классификации . . . . . 126
**С. Е. Щигал, В. И. Соловьев**
Автоматическое построение словаря типизированных канонических шаблонов управляющего кода по промышленному корпусу . . . . . 133
**Ю. Н. Штанов, В. П. Кощеев**
Моделирование полной энергии молекулы углерода в первом порядке теории возмущений с помощью алгоритма искусственного интеллекта . . . . . 139
**А. В. Титова, А. И. Карпов**
Математическое моделирование переходных процессов в пневмогидравлических устройствах систем подрессоривания на основе сопряженной гидродинамико-термодинамической модели . . . . . 148
**Т. С. Акобян**
Обзор методов улучшения точности нейронных схем за счет усреднения результата . . . 156

# CONTENTS

**R. D. Gimranov, V. A. Galkin, T. V. Gavrilenko, D. A. Morgun, M. T. Gavrilenko, M. E. Amelin, S. A. Baturo, A. I. Gryuntal**
Visualization and Configuration Subsystem for Integration Components in Process Control Systems: Architecture and Prototype . . . . . 8

**V. A. Galkin, A. V. Gorelikov, M. A. Gorelikov**
Physics-Informed Neural Network for Modeling One-Dimensional Transient Two-Phase Flow with Capillary Pressure at Varying Injection Rates . . . . . 17

**G. K. Tolokonnikov**
Logical Foundation of Neural Networks as Categorical Splices, Axiomatics, Dualities, and Applications . . . . . 26

**V. P. Koshcheev, Yu. N. Shtanov**
A New Approach to Determining Rainbow Scattering Cross Sections for Atoms and Ions . . . 40

**A. Yu. Babkin, A. I. Soldatov**
Hybrid Approach to Compression of Multichannel Ultrasonic Array Data Using Dynamically Adjustable Bit Depth and Multiresolution Methods . . . . . 45

**S. N. Yatsuk, S. G. Elovoi**
Information System for Software Development Process Analysis Using DORA and SPACE Metrics . . . . . 50

**V. V. Poluhin, M. A. Popova, S. A. Tretyakov, M. A. Filatov**
Reality of Dynamic Chaos in Biomechanics . . . . . 56

**M. I. Gapeev**
Parallel Numerical Simulation of Preseismic Deformation in Earthquake-Prone Areas . . . . . 64

**K. V. Gubareva, E. Yu. Prosviryakov**
Numerical Simulation of Steady Thermocapillary Flow in a Flat Channel Using Linear Approximation . . . . . 71

**E. M. Ismailov, T. V. Gavrilenko, O. Yu. Semenov**
Simulation of a Virtual IoT System for Remote Engine Monitoring and Control Using Temperature Hysteresis and Manual Control . . . . . 79

**D. V. Krayushkin**
Lossless Compression Algorithm for Medical Image Sequences with Selective Inter-Frame Redundancy Reduction . . . . . 86

**A. L. Legotin, G. K. Vinogradov**
Interpolation of Normals Along a 3D Curve . . . . . 92

**D. A. Mikhalevich**
Computing Cluster Load Prediction from Time-Series Data . . . . . 101

**K. K. Novichkov, O. I. Fedin, N. A. Shubin**
Structural Integrity of the TUK-27/1 Packaging System in Simulated Transportation Accidents Involving Uranium Hexafluoride Traps . . . . . 110

**A. N. Rozhkov, A. S. Demidov, V. V. Galishnikova**
An Epsilon-Net-Based Algorithm for Minimizing Functionals on Complexes . . . . . 118
**R. B. Rybka, D. G. Krikunov, Ya. P. Ivina**
Comparison of Audio Signal Encoding Methods for Classification with Multilayer Spiking Neural Networks . . . . . 126
**S. E. Shchigal, V. I. Soloviev**
Typed Canonical Pattern Dictionary for Static Comparison of Structured Text PLC Programs 133
**Yu. N. Shtanov, V. P. Koshcheev**
Calculation of the Total Energy of a Carbon Molecule Using First-Order Perturbation Theory and Machine Learning . . . . . 139
**A. V. Titova, A. I. Karpov**
Simulation of Transient Processes in Pneumohydraulic Suspensions Using a Coupled Hydrodynamic and Thermodynamic Model . . . . . 148
**T. S. Akobyan**
A Review of Neural Network Accuracy Improvement Using Averaged Outputs . . . . . 156

# ПОДСИСТЕМА ВИЗУАЛИЗАЦИИ И НАСТРОЙКИ ИНТЕГРАЦИОННЫХ КОМПОНЕНТОВ ДЛЯ АСУ ТП: АРХИТЕКТУРНЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРОТОТИП

**Р. Д. Гимранов**[1,а], **В. А. Галкин**[2,3,б], **Т. В. Гавриленко**[2,3,в], **Д. А. Моргун**[2,г], **М. Т. Гавриленко**[2,3,д], **М. Е. Амелин**[2,3,е], **С. А. Батуро**[2,3,ж], **А. И. Грюнталь**[4,з]

[1] *ПАО «Сургутнефтегаз», г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Сургутский филиал федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*

[3] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[4] *Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9928-8416, gimranov_rd@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru*

[в] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3243-2751, taras_gavrilenko@office.niisi.tech*

[г] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0692-1583,* ✍ *morgun_da@office.niisi.tech*

[д] *ORCID: https://orcid.org/0009-0008-4789-7376, gavrilenko.michail.t@office.niisi.tech*

[е] *ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9831-2112, amelin_me@office.niisi.tech*

[ж] *ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9270-9207, baturo_sa@office.niisi.tech*

[з] *grntl@niisi.ras.ru*

*Аннотация:* в статье представлены результаты разработки подсистемы визуализации и настройки интеграционных компонентов для автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП). Проведен сравнительный анализ архитектурных подходов к построению настольных приложений: слоистой архитектуры, чистой и гексагональной архитектур, модульного монолита и плагинно-ориентированной архитектуры. Обоснован выбор модульного монолита как оптимального решения для данного класса задач. Описан разработанный прототип – «Конфигуратор интеграционных компонентов», реализующий визуальное проектирование конфигураций интеграционных компонентов с поддержкой семи типов компонентов, трех протоколов взаимодействия и нескольких форматов экспорта. Рассмотрены вопросы хранения данных в PostgreSQL, организации API на базе FastAPI и обеспечения межкомпонентной интеграции.

*Ключевые слова:* АСУ ТП, интеграционные компоненты, модульный монолит, подсистема визуализации, GTK, FastAPI, PostgreSQL, UML, BPMN, OWL, DFD, архитектура программного обеспечения, технологический суверенитет.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках НИОКР «Разработка прототипа программной платформы генерации прикладных систем управления» № 1814 от 28.12.2024.

*Для цитирования:* Гимранов Р. Д., Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Моргун Д. А., Гавриленко М. Т., Амелин М. Е., Батуро С. А., Грюнталь А. И. Подсистема визуализации и настройки интеграционных компонентов для АСУ ТП: архитектурные решения и прототип. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):8–16.

*Поступила в редакцию: 16.08.2026.* *В окончательном варианте: 23.09.2026.*

# VISUALIZATION AND CONFIGURATION SUBSYSTEM FOR INTEGRATION COMPONENTS IN PROCESS CONTROL SYSTEMS: ARCHITECTURE AND PROTOTYPE

**R. D. Gimranov**[1,a], **V. A. Galkin**[2,3,b], **T. V. Gavrilenko**[2,3,c], **D. A. Morgun**[2,d], **M. T. Gavrilenko**[2,3,e], **M. E. Amelin**[2,3,f], **S. A. Baturo**[2,3,g], **A. I. Gryuntal**[4,h]

[1] *"Surgutneftegas" Public Joint Stock Company, Surgut, Russian Federation*

[2] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation*

[3] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[4] *Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation*

[a] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9928-8416, gimranov_rd@mail.ru
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru
[c] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3243-2751, taras_gavrilenko@office.niisi.tech
[d] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0692-1583, ✍ morgun_da@office.niisi.tech
[e] ORCID: https://orcid.org/0009-0008-4789-7376, gavrilenko.michail.t@office.niisi.tech
[f] ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9831-2112, amelin_me@office.niisi.tech
[g] ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9270-9207, baturo_sa@office.niisi.tech
[h] grntl@niisi.ras.ru

*Abstract:* we developed a subsystem for visualizing and configuring integration components in automated process control systems (PCS). We compared several architectural approaches to desktop application development, including layered, clean, and hexagonal architectures, as well as the modular monolith and plug-in architectures. Based on this comparison, we selected the modular monolith architecture for the subsystem. We developed a prototype, the Integration Component Configurator, which supports visual configuration of integration components, seven component types, three interaction protocols, and several export formats. We also developed a data storage system based on PostgreSQL and an API based on FastAPI, and implemented mechanisms for inter-component integration. The results demonstrate the feasibility of the proposed architecture and prototype for configuring and integrating components in PCS.

*Keywords:* process control system, integration components, modular monolith, visualization subsystem, GTK, FastAPI, PostgreSQL, UML, BPMN, OWL, DFD, software architecture, technological sovereignty.

*Acknowledgements:* the work was performed as part of the R&D “Development of a prototype software platform for generating applied control systems” No. 1814 dated 12/28/2024.

*Cite this article:* Gimranov R. D., Galkin V. A., Gavrilenko T. V., Morgun D. A., Gavrilenko M. T., Amelin M. E., Baturo S. A., Gryuntal A. I. Visualization and Configuration Subsystem for Integration Components in Process Control Systems: Architecture and Prototype. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):8–16.

*Original article submitted: 16.08.2026.* *Revision submitted: 23.09.2026.*

## Введение

Современные автоматизированные системы управления технологическими процессами нефтегазовой отрасли представляют собой сложные комплексы, объединяющие разнородное оборудование, протоколы передачи данных и прикладное программное обеспечение. Ключевым элементом таких систем являются интеграционные компоненты — программные элементы, реализующие преобразование форматов и протоколов на границах взаимодействия подсистем [1, 2].

В условиях обеспечения технологического суверенитета задача разработки инструментальных средств проектирования и конфигурирования интеграционных компонентов приобретает особую актуальность. Специалист по АСУ ТП должен иметь возможность описать структуру интеграционной конфигурации декларативно, то есть без погружения в детали программной реализации каждого компонента. Подходы к онтологиям были определены в первой статье «Концепция платформы генерации прикладных систем управления» [3].

Настоящая статья посвящена разработке прототипа подсистемы визуализации и настройки интеграционных компонентов: анализу архитектурных подходов, реализации настольного приложения «Конфигуратор интеграционных компонентов» на Python/GTK, а также API для его интеграции с внешними подсистемами обработки.

## Анализ архитектурных подходов

Выбор архитектуры программного обеспечения является одним из наиболее критичных решений на этапе проектирования системы. Архитектурные решения напрямую влияют на поддерживаемость, тестируемость, расширяемость и понятность программного кода [4, 5]. При выборе архитектуры разрабатываемого конфигуратора учитывались следующие аспекты: необходимость четкого разделения бизнес-логики и представления, а также потенциал для будущего расширения — добавления новых типов интеграционных компонентов, форматов экспорта и интеграций с внешними системами.

**Слоистая архитектура**

Слоистая архитектура предполагает организацию компонентов в горизонтальные слои представления, бизнес-логики и доступа к данным [4]. Каждый слой взаимодействует только с соседними. Достоинство подхода — простота, однако жесткая связанность слоев порождает проблему при разработке визуального редактора: часть бизнес-логики неизбежно «перетекает» в слой представления и соблюсти принцип однонаправленности практически невозможно.

**Чистая и гексагональная архитектуры**

Чистая архитектура Мартина [6] и гексагональная архитектура Коберна [7] выносят доменную логику в независимое ядро. Внешние слои реализуют абстрактные интерфейсы (порты), что обеспечивает тестируемость и гибкость замены технологий. Гексагональная архитектура рассматривает систему как ядро бизнес-логики, окруженное реализациями портов взаимодействия с внешним миром. Интеграционный компонент рассматривается как настраиваемый элемент визуальной модели, задающий тип, параметры, протокол взаимодействия и связи с другими элементами схемы. Основной недостаток: необходимость проектировать множество интерфейсов и реализаций портов избыточна при фиксированном наборе функций.

**Модульный монолит**

Модульный монолит – единое развертываемое приложение, внутренне организованное в слабосвязанные модули с четкими публичными интерфейсами [8]. Для конфигуратора выделены четыре модуля:

- доменный модуль — сущности предметной области (интеграционный компонент, соединение, проект) и бизнес-правила, независимые от технических деталей;
- модуль инфраструктуры — работа с файловой системой, сериализация JSON, взаимодействие с PostgreSQL;
- модуль пользовательского интерфейса — компоненты GTK, отрисовка холста;
- модуль прикладных сценариев — координация взаимодействия остальных модулей, реализация use-cases.

Зависимости направлены от внешних модулей к внутренним: доменный модуль ни от чего не зависит. Это гарантирует изоляцию бизнес-логики и упрощает ее тестирование.

**Плагинно-ориентированная архитектура**

Плагинно-ориентированная (микроядерная) архитектура [9] обеспечивает максимальную расширяемость через динамически подключаемые плагины. Для прототипа с фиксированным набором типов интеграционных компонентов такой подход избыточен. При дальнейшем развитии и необходимости поддержки расширений от сторонних разработчиков этот подход может быть рассмотрен.

**Сравнительный анализ и выбор**

Результаты сравнения подходов по ключевым критериям представлены в таблице 1.

*Таблица 1*

*Сравнение архитектурных подходов*

| Архитектура | Простота | Тестируемость | Расширяемость | Применимость |
|---|---|---|---|---|
| Слоистая | Высокая | Средняя | Средняя | Средняя |
| Чистая/ гексагональная | Низкая | Высокая | Высокая | Низкая |
| Модульный монолит | Средняя | Высокая | Высокая | Высокая |
| Плагинно-ориентированная | Низкая | Средняя | Максимальная | Низкая |

По совокупности критериев выбран **модульный монолит**. Он обеспечивает оптимальный баланс структурированности и простоты реализации.

**Прототип подсистемы визуализации и настройки**

Разработанный прототип — «Конфигуратор интеграционных компонентов» — настольное приложение на Python с использованием библиотеки GTK 4. Приложение реализует принципы визуального программирования [10].

**Архитектура и состав модулей**

Структура приложения строго следует принципам модульного монолита. Точка входа (*main.py*) инициализирует приложение и систему аутентификации. Компоненты интерфейса сосредоточены в пакете *ui/*, модели данных — в *models/*, утилиты — в *utils/*, слой БД — в *database/*.

Ключевые модули:

- ui/windows/main_window.py — главное рабочее окно, трехпанельная компоновка;
- ui/widgets/canvas.py — масштабируемая рабочая область с поддержкой drag-and-drop;
- models/integration_component.py, models/connection.py, models/project.py — доменные сущности;
- utils/uml_exporter.py — экспорт в PlantUML / текстовый UML / XMI;
- database/database.py — слой доступа к PostgreSQL.

**Главное окно и рабочая область**

Главное окно реализует трехпанельную компоновку (рисунок 1). Левая панель разделена на каталог типов интеграционных компонентов (рисунок 2) и список созданных интеграционных компонентов текущего проекта. Центральная область — масштабируемый холст с привязкой к сетке. Правая панель отображает детали выбранного интеграционного компонента.

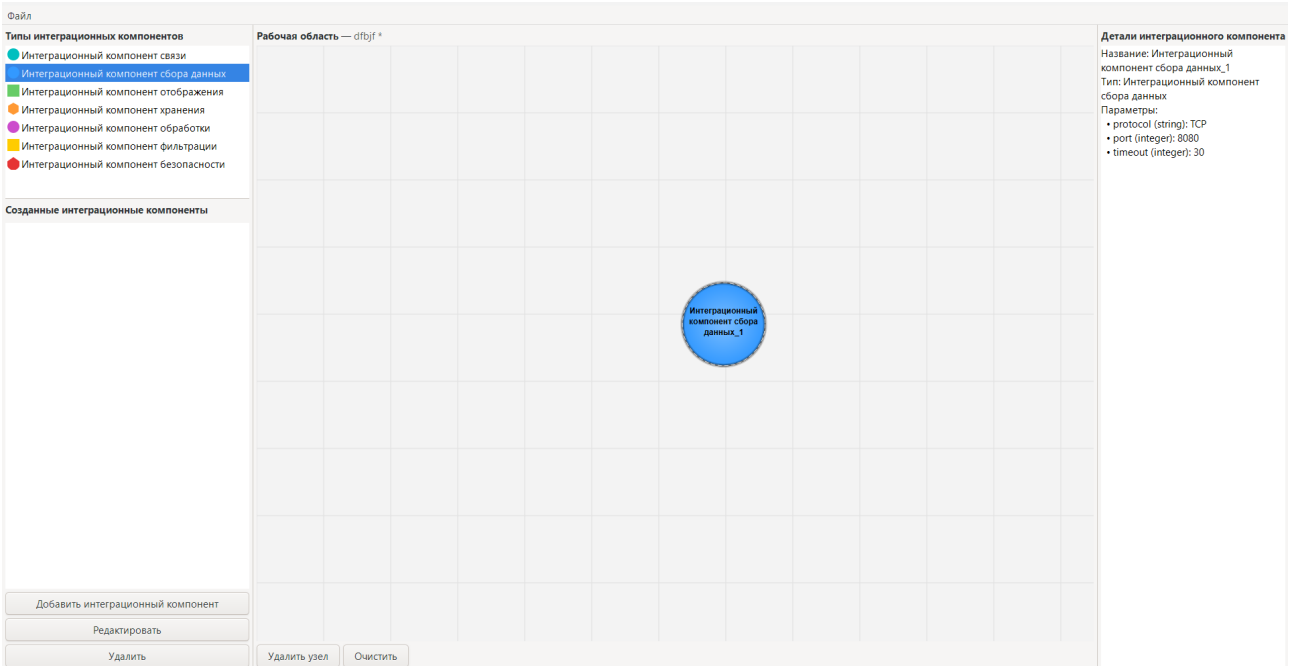



**Рис. 1.** *Главное окно «Конфигуратора интеграционных компонентов»: каталог типов (слева), холст (центр), детали компонента (справа)*

**Система связей**

Реализованы три типа направленных связей между интеграционными компонентами. Каждая связь визуально отображается стрелкой с подписью на холсте (рисунок 3).

Параметры каждой связи настраиваются в специализированном диалоге (рисунок 4). Поддерживается добавление пользовательских параметров без ограничений.

**Управление проектами и хранение данных**

Приложение реализует: создание, открытие, сохранение. Состояние несохраненных изменений отображается символом «*» в заголовке окна.

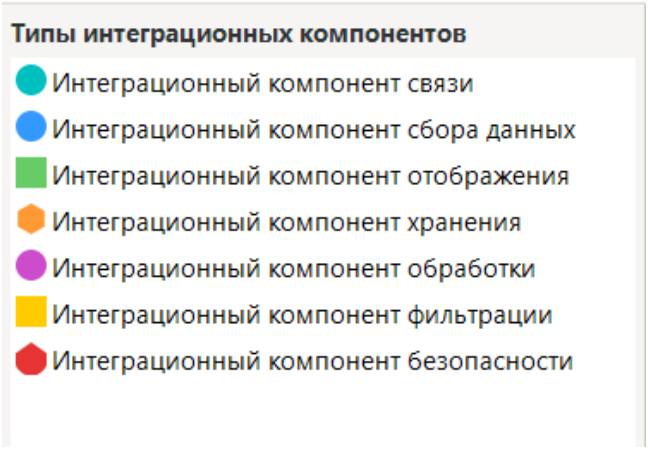



**Рис. 2.** *Цветовая кодировка типов интеграционных компонентов*

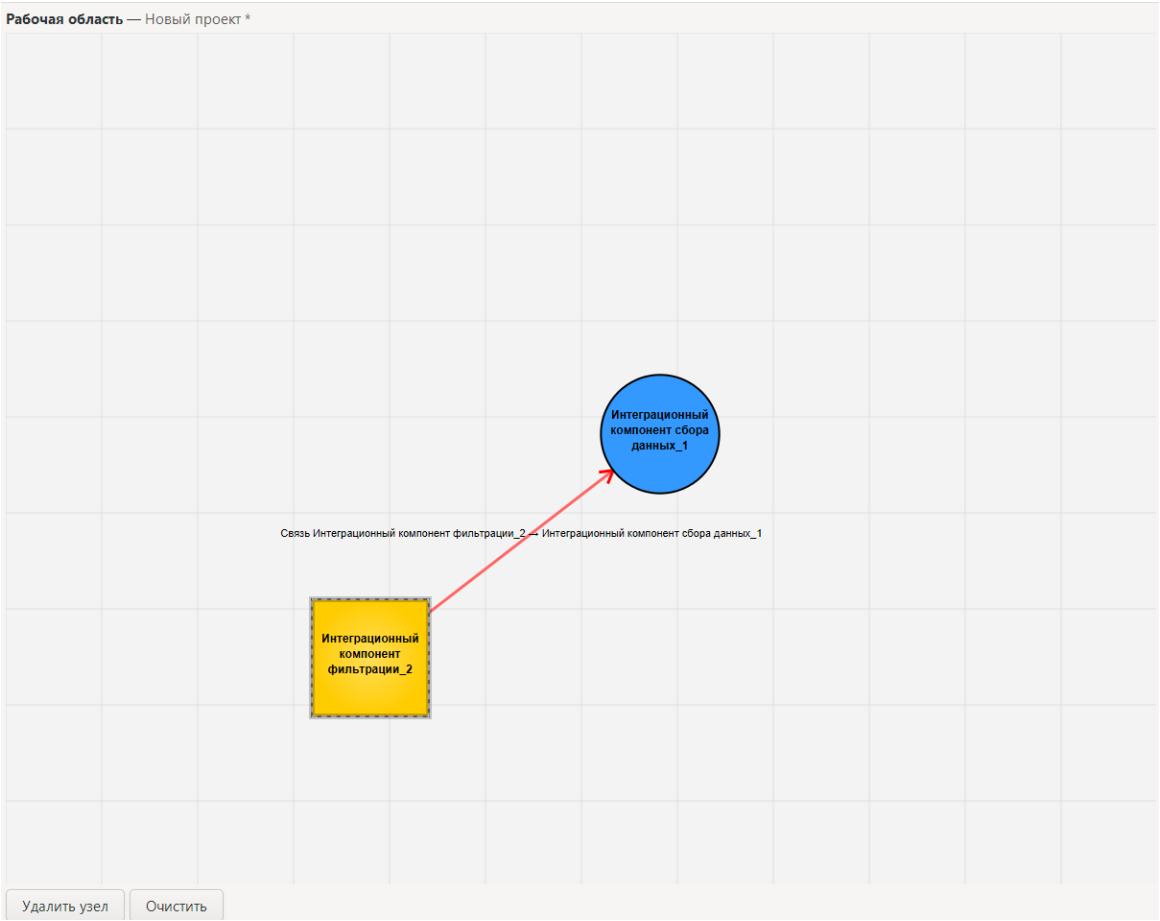



**Рис. 3.** *Пример связи «Поток данных» между двумя интеграционными компонентами на рабочей области*

*Таблица 2*

*Типы связей и их параметры*

| Тип связи | Протокол |
|---|---|
| Поток данных | TCP |
| Управляющая связь | gRPC |
| Событийная шина | Kafka |

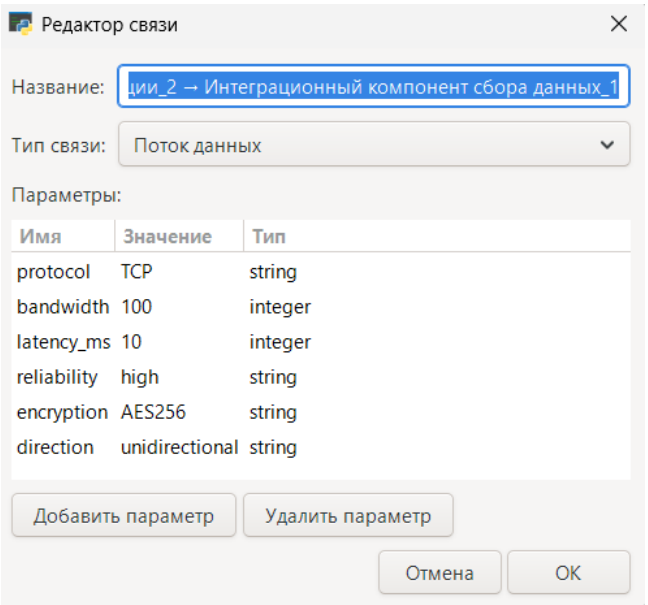



**Рис. 4.** *Диалог редактирования связи: тип, протокол и параметры взаимодействия*

Каждый проект хранится в виде директории со следующей структурой:

- project.json — метаданные;
- components/ — интеграционные компоненты;
- canvas.json — полная конфигурация каждого интеграционного компонента;
- connections.json — массив объектов со связями.

Применение формата JSON обеспечивает читаемость конфигурации человеком, упрощает отладку и совместимость с системами контроля версий.

**Экспорт и импорт**

Функция экспорта в UML (рисунок 5) поддерживает три формата:

- PlantUML (.puml) — текстовые описания диаграмм для систем контроля версий и code-review;
- текстовый UML (.txt) — читаемые описания для технической документации и спецификаций;
- XMI (.xmi) — бинарный XML-формат для профессиональных CASE-инструментов.

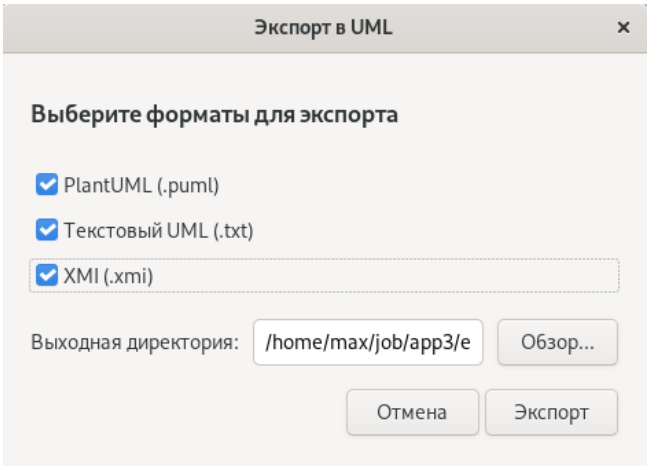



**Рис. 5.** *Диалог выбора форматов и директории для экспорта в UML*

После завершения экспорта пользователь получает подтверждение с указанием результата по каждому формату (рисунок 6).

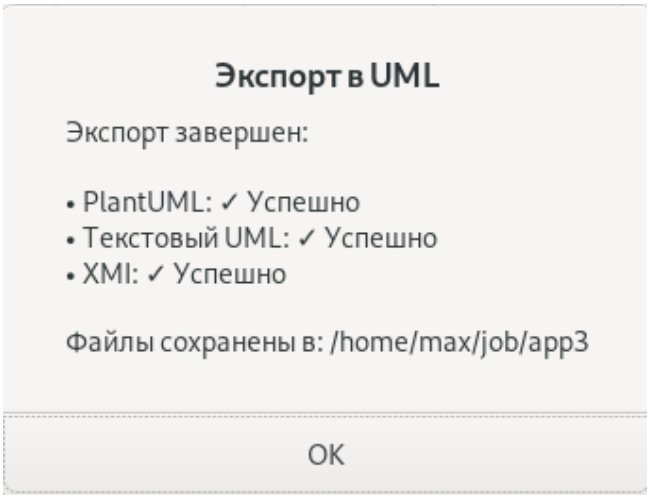



**Рис. 6.** *Сообщение об успешном экспорте в форматы PlantUML, текстовый UML и XMI*

Экспорт в SVG сохраняет схему в масштабируемом векторном формате с поддержкой прозрачности. Полученный SVG может быть применен в качестве подложки рабочей области.

Функция импорта иерархии интеграционных компонентов позволяет загружать JSON-файлы с иерархической структурой компонентов. Приложение автоматически разбирает структуру.

**Интеграция с СУБД PostgreSQL**

Для хранения справочных данных используется PostgreSQL [11] — выбор обусловлен надежностью, производительностью и поддержкой формата JSONB для хранения гибких наборов параметров. Физическая модель базы данных включает три таблицы (рисунок 7).

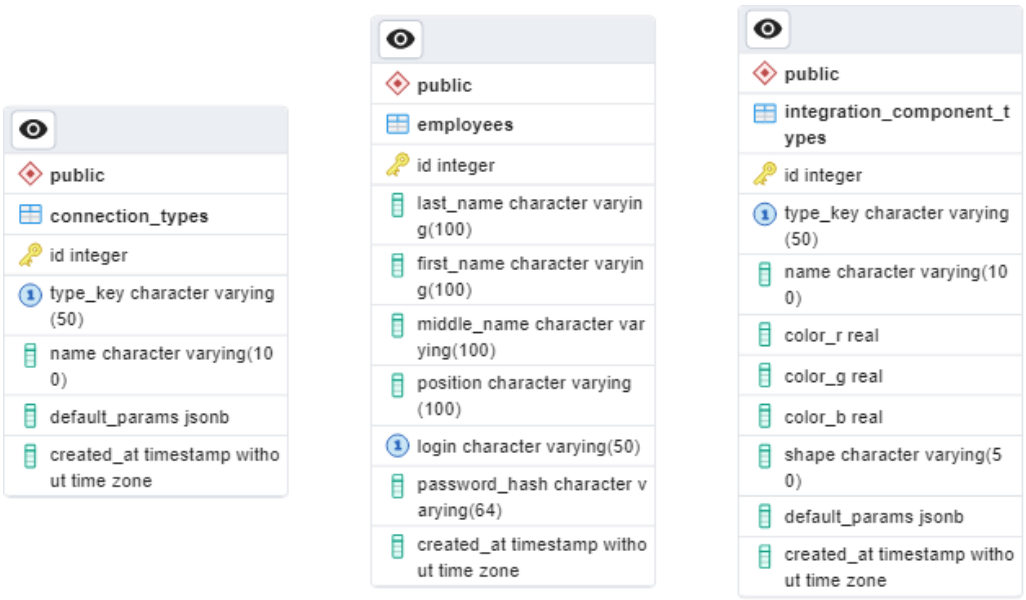



**Рис. 7.** *Физическая схема базы данных*

Таблица *integration_component_types* содержит тип интеграционного компонента (символьный ключ, имя), RGB-компоненты цвета (тип REAL, диапазон 0–1), форму визуального представления и параметры по умолчанию в JSONB. Использование JSONB позволяет расширять набор параметров без изменения схемы.

Таблица *connection_types* по аналогичной схеме хранит типы связей.

Таблица *employees* обеспечивает аутентификацию: логин, хэш пароля (SHA-256), Ф. И. О. и должность. Все таблицы содержат метку *created_at* для аудита изменений.

**API для интеграции подсистем**

API для интеграции подсистем обеспечивает взаимодействие конфигуратора с подсистемами обработки онтологий (OWL), бизнес-процессами (BPMN) и диаграммами потоков данных (DFD). Подходы к онтологическому моделированию и использованию языка OWL были определены в первой статье «Концепция платформы генерации прикладных систем управления» [3].

**Технологический стек**

В качестве основного фреймворка выбран **FastAPI** (лицензия MIT) — современное ASGI-решение со встроенной поддержкой асинхронности, автогенерацией OpenAPI-документации и строгой типизацией через аннотации Python [12]. Для валидации данных применяется **Pydantic v2** [13] (MIT) с Rust-ядром, обеспечивающим значительный прирост скорости валидации по сравнению с первой версией. ASGI-сервер **Uvicorn** (BSD) построен на *uvloop* — быстрой реализации цикла событий asyncio. Весь стек распространяется под разрешающими open-source лицензиями, что соответствует требованиям технологического суверенитета.

**Структура и маршруты**

API версионируется через префикс */api/v1*. Маршруты сгруппированы по функциональным доменам: *Conversion* (конвертация форматов), *Validation* (валидация моделей), *Analysis* (анализ структуры), *Health* (мониторинг состояния).

*Таблица 3*

*Основные конечные точки API*

| Метод | Путь | Описание |
|---|---|---|
| POST | `/api/v1/convert/visual-to-owl` | Конвертация VISUAL → OWL |
| POST | `/api/v1/convert/owl-to-bpmn` | Конвертация OWL → BPMN |
| POST | `/api/v1/convert/bpmn-to-dfd` | Конвертация BPMN → DFD |
| POST | `/api/v1/convert/chain` | Полная цепочка VISUAL → DFD |
| POST | `/api/v1/validate/visual` | Валидация визуальной модели |
| POST | `/api/v1/analyze/visual` | Анализ структуры схемы |
| GET | `/api/v1/health` | Статус подсистем |
| GET | `/api/v1/capabilities` | Возможности API |

Цепочка конвертации VISUAL→OWL→BPMN→DFD обеспечивает сквозное преобразование. Конечная точка */convert/chain* возвращает все промежуточные представления.

**Заключение**

В статье описаны архитектурные решения и прототип подсистемы визуализации и настройки интеграционных компонентов для АСУ ТП. По результатам сравнительного анализа четырех архитектурных подходов выбран модульный монолит. Разработанный «Конфигуратор интеграционных компонентов» реализует полный цикл работы с проектом. API на базе FastAPI предоставляет структурированный каркас интеграции с подсистемами OWL, BPMN и DFD с заранее определенными контрактами данных. Полученные результаты создают методологическую и программную основу для последующей реализации процессоров обработки онтологий и бизнес-процессов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гамма Э. и др. *Паттерны объектно-ориентированного проектирования.* Санкт-Петербург: Питер; 2023.
2. Hohpe G., Woolf B. *Enterprise Integration Patterns: Designing, Building, and Deploying Messaging Solutions.* Boston: Addison-Wesley; 2003. 659 с.
3. Гимранов Р. Д., Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Моргун Д. А., Гавриленко М. Т., Амелин М. Е., Батуро С. А., Грюнталь А. И. Концепция платформы генерации прикладных систем управления. *Успехи кибернетики.* 2026;7(2):41–51.

4. Fowler M. *Patterns of Enterprise Application Architecture*. Boston: Addison-Wesley Professional; 2002. 560 с.
5. Bass L., Clements P., Kazman R. *Software Architecture in Practice*. 3rd ed. Upper Saddle River: Addison-Wesley; 2012. 640 с.
6. Martin R. C. *Clean Architecture: A Craftsman's Guide to Software Structure and Design*. Upper Saddle River: Prentice Hall; 2017. 432 с.
7. Cockburn A. *Hexagonal Architecture*. 2005. Режим доступа: https://alistair.cockburn.us/hexagonal-architecture/.
8. Newman S. *Monolith to Microservices: Evolutionary Patterns to Transform Your Monolith*. Sebastopol: O'Reilly Media; 2019. 270 с.
9. Richards M. *Software Architecture Patterns*. Sebastopol: O'Reilly Media; 2015. 46 с.
10. Burnett M. M. Visual Programming. *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. New York: John Wiley & Sons Inc.; 1999.
11. The PostgreSQL Global Development Group. *PostgreSQL 16 Documentation*. 2023. Режим доступа: https://www.postgresql.org/docs/16/.
12. Ramírez S. *FastAPI Documentation*. 2023. Режим доступа: https://fastapi.tiangolo.com.
13. *Pydantic v2 Documentation*. 2023. Режим доступа: https://docs.pydantic.dev/latest/.

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПО РАСХОДУ ЗАКАЧКИ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

**В. А. Галкин**[1,2,а], **А. В. Гореликов**[1,2,б], **М. А. Гореликов**[3,в]

[1] *Сургутский филиал федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[3] *Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0009-0006-8946-7396, gorelikov_ av@surgu.ru*

[в] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-6196-5735,* ✍ *gorelikov.matvey@mail.ru*

*Аннотация*: разработана параметрическая по расходу закачки физически информированная нейронная сеть для моделирования двухфазной фильтрации. Обучение основано на уравнении переноса насыщенности, начальных и граничных условиях и интегральном водном балансе без подгонки к наблюдаемым кривым. Для проверки применялись данные, полученные гидродинамическим симулятором tNavigator, и результаты расчетов независимо разработанного конечно-объемного кода. Сопоставлены шесть интегральных характеристик в трех режимах закачки. Максимальная среднеквадратическая ошибка нейронной сети относительно данных tNavigator, нормированная на размах эталонного ряда, составила 1,5 %. На промежуточном расходе получено согласование интегральных характеристик вытеснения, рассчитанных нейронной сетью, с данными симулятора tNavigator без дообучения.

*Ключевые слова:* параметрическая физически информированная нейронная сеть, двухфазная фильтрация.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

Эта статья стала возможной благодаря использованию ПО тНавигатор, разработанного ООО «ИРМ».

*Для цитирования:* Галкин В. А., Гореликов А. В., Гореликов М. А. Параметрическая по расходу закачки физически информированная нейронная сеть для моделирования одномерной нестационарной задачи двухфазной фильтрации с учетом капиллярного давления. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):17–25.

*Поступила в редакцию: 26.08.2026.* *В окончательном варианте: 27.09.2026.*

# PHYSICS-INFORMED NEURAL NETWORK FOR MODELING ONE-DIMENSIONAL TRANSIENT TWO-PHASE FLOW WITH CAPILLARY PRESSURE AT VARYING INJECTION RATES

**V. A. Galkin**[1,2,a], **A. V. Gorelikov**[1,2,b], **M. A. Gorelikov**[3,c]

[1] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation*

[2] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[3] *Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9721-4026, val-gal@yandex.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0009-0006-8946-7396, gorelikov_av@surgu.ru*

[c] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-6196-5735,* ✍ *gorelikov.matvey@mail.ru*

*Abstract:* we developed a physics-informed neural network parameterized by injection rate for modeling two-phase flow. We trained the network using the saturation transport equation, initial and boundary conditions, and the integral water balance, without fitting it to observed curves. For validation, we used data generated by the tNavigator reservoir simulator and results obtained with an independently developed finite-volume code. We compared six integral characteristics for three injection regimes. The maximum root-mean-square error of the neural network relative to the tNavigator data, normalized by the range of the corresponding reference series, was 1.5%. At the intermediate injection rate, the neural network reproduced the integral displacement characteristics obtained with tNavigator without retraining.

*Keywords:* parametric physics-informed neural network, two-phase flow.

*Acknowledgements:* this study is a part of the government contract No. FNEF-2024-0001 Development and Implementation of Trusted AI Systems Using New Mathematical and Algorithmic Methods; Fast Computing Models on Domestic Hardware awarded to the Kurchatov Institute (1023032100070-3-1.2.1).

This study was enabled by the tNavigator software from IRM.

*Cite this article:* Galkin V. A., Gorelikov A. V., Gorelikov M. A. Physics-Informed Neural Network for Modeling One-Dimensional Transient Two-Phase Flow with Capillary Pressure at Varying Injection Rates. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):17–25.

*Original article submitted: 26.08.2026.* *Revision submitted: 27.09.2026.*

**Введение**

Актуальность использования физически информированных нейронных сетей (PINN, Physics-Informed Neural Networks) для моделирования процессов фильтрации обусловлена возможностями ускорения получения результатов, построения единого параметризованного приближения семейства решений и решения обратных задач по восстановлению неизвестных свойств пласта [1, 2]. Целью данной работы является разработка и верификация параметрической PINN для моделирования нестационарной двухфазной фильтрации в заданном диапазоне режимов закачки. Анализ результатов PINN проводился путем сопоставления с результатами, полученными в промышленном гидродинамическом симуляторе tNavigator (разработка компании Rock Flow Dynamics) и с независимым численным решением, полученным методом конечного объема (FV) [3].

**Постановка задачи и математическая модель**

Рассматривается изотермический процесс вытеснения нефти водой в однородном горизонтальном образце пористой среды длиной $L$, площади сечения $A$. Координата вдоль образца — $x$, $(0<x<L)$, $t$ — время $(0<t\leq T)$. Фазы $w$ (вода) и $o$ (нефть) — несмешивающиеся и несжимаемые. Пористость $m$, абсолютная проницаемость $k$ и динамические вязкости нефти и воды $\mu_w$, $\mu_o$ постоянны. Предполагается, что деформация породы, внутренние источники масс и сила тяжести вдоль образца отсутствуют. Учитываются вязкостный перенос фаз, относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление. На входе $(x = 0)$ задается постоянный расход закачиваемой воды $Q>0$. Начальная водонасыщенность однородна и равна связанной водонасыщенности $S_{wc}$ [4].

Задача состоит в нахождении поля водонасыщенности $S_w\,(x,t)$ при заданных свойствах среды, фазовых зависимостях и расходе закачки. Давление восстанавливается по полю насыщенности. Объемные коэффициенты фаз $B_\alpha = 1$ $(\alpha\in\{w,o\})$.

Поровый объем $V_p$ и суммарная скорость фильтрации $U$, м/с, определяются как

$$V_p=mAL, \qquad U=\frac{Q}{A}. \tag{1}$$

Подвижности фаз $\lambda_\alpha$, полная подвижность $\lambda_t$, доля воды в суммарном потоке (функция Баклея–Леверетта) $f_w$ и коэффициент капиллярного переноса $\lambda_c$ определяются по формулам:

$$\lambda_\alpha=\frac{kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha}, \qquad \lambda_t=\lambda_w+\lambda_o, \qquad f_w=\frac{\lambda_w}{\lambda_t}, \qquad \lambda_c=\frac{\lambda_w\lambda_o}{\lambda_t}. \tag{2}$$

Здесь $\alpha\in\{w,o\}$; $k_{r\alpha}(S_w)$ — относительные фазовые проницаемости.

Водонасыщенность должна удовлетворять условию $S_{wc}\leq S_w\leq 1-S_{or}$, где $S_{or}$ — остаточная нефтенасыщенность. Диапазон изменения насыщенности $\Delta S>0$, эффективная насыщенность $S_e$ и ее регуляризированное значение $\hat{S}_e$ определяются как

$$\Delta S=1-S_{wc}-S_{or},\qquad S_e=min\left(max\left(\frac{S_w-S_{wc}}{\Delta S},0\right),1\right),\quad \hat{S}_e=\max\left(S_e,\varepsilon\right),\quad \varepsilon\in(0,1). \tag{3}$$

Степенные зависимости для относительных фазовых проницаемостей и модель капиллярного давления $P_{cow}$ имеют вид

$$k_{rw}=S_e^{n_w},\qquad k_{ro}=(1-S_e)^{n_o},\qquad P_{cow}=P_{c0}\sqrt{\max\left(\hat{S}_e^{-n_c}-1,\ 0\right)}. \tag{4}$$

Капиллярное давление определяется как $P_{cow}=p_o-p_w$, где $p_o$, $p_w$ — физические давления нефти и воды.

Уравнение для водонасыщенности:

$$m\frac{\partial S_w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[Uf_w\left(S_w\right)+\lambda_c\left(S_w\right)\frac{\partial P_{cow}\left(S_w\right)}{\partial x}\right]=0. \tag{5}$$

Начальное и граничные условия имеют вид

$$S_w\left(x,0\right)=S_{wc},\qquad 0\leq x\leq L, \tag{6}$$

$$w_w\left(0,t\right)=U,\qquad w_o\left(0,t\right)=0,\qquad \lambda_c\frac{\partial P_{cow}}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0,\qquad t>0. \tag{7}$$

Здесь $w_\alpha$ — фазовые скорости фильтрации. На входе ($x=0$) задан полный поток воды, поток нефти равен нулю. Граничное условие на выходе ($x=L$) соответствует отсутствию капиллярной составляющей потока.

По найденной водонасыщенности восстанавливаются глобальное давление $p_g$ и его перепад $\Delta p_g$:

$$p_g\left(x,t\right)=p_*+\int_x^L\frac{U}{\lambda_t\left(S_w\left(\xi,t\right)\right)}\,d\xi,\quad \Delta p_g\left(t\right)=p_g\left(0,t\right)-p_g\left(L,t\right). \tag{8}$$

Здесь $p_*$ — заданное давление на выходе.

Нефтенасыщенность $S_o$ и фазовые скорости фильтрации $w_w$, $w_o$ определяются по формулам:

$$S_o=1-S_w,\qquad w_w=Uf_w+\lambda_c\frac{\partial P_{cow}}{\partial x},\qquad w_o=U-w_w. \tag{9}$$

Выходные дебиты $q_w$,$q_o$ и обводненности $f_{\text{out}}$:

$$q_w\left(t\right)=Qf_w\left(S_w\left(L,t\right)\right),\qquad q_o\left(t\right)=Q-q_w\left(t\right),\qquad f_{\text{out}}\left(t\right)=\frac{q_w\left(t\right)}{Q}. \tag{10}$$

Накопленные объемы добычи фаз $V_\alpha$ и закачки воды $V_{\text{inj}}$:

$$V_\alpha\left(t\right)=\int_0^t q_\alpha\left(\tau\right)\,d\tau,\qquad V_{\text{inj}}\left(t\right)=Qt. \tag{11}$$

PVI (pore volume injected) определяется отношением накопленного объема закачанной воды $V_{\text{inj}}$ к поровому объему образца $V_p$:

$$\text{PVI}\left(t\right)=\frac{V_{\text{inj}}\left(t\right)}{V_p}. \tag{12}$$

Средняя водонасыщенность $\overline{S}_w$ — безразмерная величина, определяемая по формуле:

$$\overline{S}_w\left(t\right)=\frac{1}{L}\int_0^L S_w\left(x,t\right)\,dx. \tag{13}$$

При $B_\alpha = 1$ для точного решения:

$$\overline{S}_w(t) = S_{wc} + \frac{V_{\text{inj}}(t) - V_w(t)}{V_p}. \tag{14}$$

Значения параметров модели приведены в таблице 1. Рассмотрены три режима закачки воды, соответствующие номинальным темпам 0,25; 1,0 и 4,0 поровых объема в сутки (режимы q025, q100 и q400).

*Таблица 1*

*Физические параметры и режимы вытеснения*

| Величина | Обозначение | Значение |
|---|---|---|
| Длина образца | $L$ | 0,1 м |
| Площадь сечения образца | $A$ | $1{,}134 \cdot 10^{-3}$ м$^2$ |
| Поровый объем | $V_p$ | $2{,}268 \cdot 10^{-5}$ м$^3$ |
| Пористость | $m$ | 0,20 |
| Проницаемость | $k$ | 100 мД ($9{,}87 \cdot 10^{-14}$ м$^2$) |
| Вязкости воды и нефти | $\mu_w;\ \mu_o$ | $5 \cdot 10^{-4}$ Па·с; $5 \cdot 10^{-3}$ Па·с |
| Связанная водонасыщенность, остаточная нефтенасыщенность | $S_{wc};\ S_{or}$ | 0,20; 0,20 |
| Показатели относительных проницаемостей | $n_w;\ n_o$ | 3; 3 |
| Показатель капиллярной кривой | $n_c$ | 2 |
| Значения относительных фазовых проницаемостей на границах интервала насыщенности | $k_{rw}(1 - S_{or});\ k_{ro}(S_{wc})$ | 1; 1 |
| Масштаб капиллярного давления | $P_{c0}$ | $5 \cdot 10^4$ Па |
| Порог регуляризации | $\varepsilon$ | 0,02 |
| Давление на выходе | $p_*$ | $10^7$ Па |
| q025: расход; длительность | $Q;\ T$ | $6{,}56 \cdot 10^{-11}$ м$^3$/с; 8 сут |
| q100: расход; длительность | $Q;\ T$ | $2{,}63 \cdot 10^{-10}$ м$^3$/с; 2 сут |
| q400: расход; длительность | $Q;\ T$ | $1{,}05 \cdot 10^{-9}$ м$^3$/с; 0,5 сут |

**Расчеты в tNavigator**

Расчеты в tNavigator реализуют одномерную слабосжимаемую двухфазную постановку (black-oil без газа). Геометрия, свойства породы и жидкостей, начальные условия и фазовые зависимости соответствуют параметрам, приведенным в табл. 1, и одинаковы для всех режимов закачки. Каждый режим доведен до 2 поровых объемов закачки, что позволяет сопоставлять их, используя единую безразмерную временную координату PVI (12). Решения в tNavigator получены на равномерной расчетной сетке N50 (50 ячеек вдоль образца). В процессе решения для каждого режима закачки в заданные моменты времени (начальный при PVI = 0 и 50 ненулевых точек в диапазоне от 0,02 до 2,00 PVI) сохранялись фазовые дебиты, накопленные объемы добычи и закачки, обводненность, средняя водонасыщенность и эквивалентный перепад давления. Всего для каждого режима получено 51 контрольное состояние, такая отчетная сетка едина для всех режимов. Несмотря на то, что в tNavigator реализована слабосжимаемая модель фильтрации, а независимый конечно-объемный код и PINN используют несжимаемую модель (5)–(7), сопоставление интегральных характеристик вытеснения оказывается возможным. Сжимаемости воды и

породы в модели tNavigator равны $10^{-6}$ бар$^{-1}$, а характерные перепады давления в рассматриваемых режимах составляют от $10^{-3}$ до $10^{-1}$ бар, поэтому относительное изменение объема фаз за счет сжимаемости пренебрежимо мало по сравнению с вкладом фазовых проницаемостей и капиллярного переноса.

**Численная реализация конечно-объемного метода**

В данной работе рассматривается стандартная реализация численного решения задачи двухфазной фильтрации методом конечных объемов [3, 4]. Используется равномерная по координате $x$ расчетная сетка ($N$ — число конечных объемов). Водонасыщенность $S_w$ вычисляется в центрах объемов, фазовые расходы — на гранях. Адвективный член в уравнении (5) аппроксимируется схемой вверх по потоку. Сумма объемных расходов воды и нефти через каждую грань ячеек равна суммарному расходу закачки $Q$, что обеспечивает дискретную консервативность оператора переноса. Пространственная дискретизация приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора сеточных значений водонасыщенности [5]. Интегрирование по времени выполняется неявным методом BDF (обратного дифференцирования) с автоматическим выбором шага и порядка. Для независимой проверки результатов параметрической PINN была написана программа (FV-код) численного решения начально-краевой задачи фильтрации (5)–(7) методом конечного объема. Программа написана на языке Python 3.12.7 с использованием библиотек NumPy 1.26.4 и SciPy 1.13.1 [6].

**Параметрическая PINN**

Параметризация PINN по расходу закачки $Q$ позволяет строить единое приближение семейства решений, а не обучать отдельную сеть для каждого режима [1, 7]. В PINN реализована модель фильтрации (5)–(7) с замыкающими соотношениями (2)–(4). Вводятся безразмерные входные параметры:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{Qt}{V_p}, \quad \rho = \frac{\ln(Q/Q_{025})}{\ln 16}, \tag{15}$$

где $Q_{025}$ — расход режима q025; область изменения входных переменных PINN при обучении задается условиями $0 \le \xi \le 1,\ \ 0 \le \tau \le 2,\ \ 0 \le \rho \le 1$, что соответствует изменению расхода в диапазоне: $Q_{025} \le Q \le 16Q_{025}$.

Полносвязная сеть состоит из шести скрытых слоев по 80 нейронов с гиперболическим тангенсом в качестве функции активации; выходной линейный слой содержит два нейрона и формирует промежуточные переменные сети $a_s = a_s(\xi,\tau,\rho,\theta)$ и $a_c = a_c(\xi,\tau,\rho,\theta)$, где $\theta$ — совокупность весов и смещений сети. Входные параметры (15) приводятся к промежутку [-1,1]: $(2\xi - 1,\ \tau - 1,\ 2\rho - 1)$. Через выходы сети задаются насыщенность и безразмерная капиллярная составляющая потока:

$$S_w = S_{wc} + \Delta S \left(1 - e^{-100\tau}\right) \sigma\left(a_S\right), \quad c_\theta = (1 - \xi)\, a_c, \tag{16}$$

где $\sigma\left(a_S\right) = 1/\left(1 + e^{-a_S}\right)$. Представление (16) точно обеспечивает: начальное условие (6), границы изменения водонасыщенности $S_{wc} \le S_w \le 1 - S_{or}$ и равенство $c_\theta = 0$ на выходе ($\xi = 1$), соответствующее граничному условию (7) для капиллярной составляющей потока.

Полный безразмерный водный поток определяется как $w_w/U = f_w(S_w) + c_\theta$, где $c_\theta = c_\theta(\xi,\tau,\rho,\theta)$ — вспомогательная переменная сети. Связь $c_\theta$ с капиллярным законом не встроена в архитектуру сети, а обеспечивается минимизацией соответствующей невязки. Введение $c_\theta$ как независимой переменной сводит уравнение (5) второго порядка по $\xi$ к системе первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_w + c_\theta\right) = 0, \\ c_\theta - \frac{\lambda_c}{UL}\frac{\partial P_{cow}}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Производные по $\xi$ и $\tau$ в (17) вычисляются автоматическим дифференцированием при фиксированном значении параметра $\rho$ [1].

Обучение основано на минимизации функции потерь $L\left(\theta\right)$:

$$L\left(\theta\right) = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + \omega_4 L_4 + \omega_5 L_5, \ \ L_i = \left\langle r_i^2 \right\rangle, \tag{18}$$

где $\omega_i$ — весовые коэффициенты, $L_i$ — среднеквадратичные невязки. Слагаемые $L_1$ и $L_2$ — невязки первого и второго уравнений (17) соответственно; $L_3$ — невязка граничного условия на входе $f_w + c_\theta = 1$; $L_4$ и $L_5$ отвечают дифференциальной и интегральной формам водного баланса (14): в $L_4$ сопоставляются скорость изменения средней насыщенности и разность входного и выходного потоков, в $L_5$ — изменение запаса воды и накопленный приток за вычетом добычи. Все невязки вычисляются в безразмерной форме: объемные расходы нормируются на $Q$, объемы — на поровый объем $V_p$. Данные tNavigator и конечно-объемного решения в функцию потерь не входят.
Начальное обучение сохраненного состояния параметрической PINN включает 4200 эпох метода Adam [8]. Это состояние не прошло контроль водного баланса: максимальный водный остаток превышал 1% геометрического порового объема $PV_{geo} = mAL$. Поэтому выполнялся второй этап — 2400 эпох дообучения на всей временной области. Веса слагаемых в (18) изменялись с (5, 10, 20, 50, 150) на (5, 10, 20, 75, 250), усиливая контроль дифференциального и интегрального водного баланса. Итоговой версией PINN считался результат второго этапа обучения. После обучения насыщенность определяется непосредственным вычислением сети при заданных координатах и расходе (16). Выходные дебиты и обводненность находятся по (10), накопленные объемы — интегрированием по (11), средняя водонасыщенность — по (13). Давление сетью не рассчитывается, но может быть восстановлено по водонасыщенности. Программная реализация параметрической PINN выполнена на Python 3.12.7 с использованием библиотек PyTorch 2.12.1 [9] и NumPy [6].

**Верификация PINN**

При верификации параметрической PINN данные tNavigator рассматриваются как синтетические экспериментальные данные, а конечно-объемное решение — как эталонное численное решение. Это позволяет разделить две составляющие погрешности: погрешность, обусловленную принятыми физическими допущениями и выбором упрощенной модели переноса, и погрешность собственно нейросетевой аппроксимации.

Пусть $y_j^{(A)}$ — значение одной из интегральных характеристик в $j$-м отчетном состоянии ($j = 1,\ldots,M$, $M = 51$, $PVI_1 = 0$). Индекс $A \in \{\text{TN,FV,PINN}\}$ указывает источник данных: tNavigator, FV-код или параметрическая PINN. В качестве меры отклонения используется среднеквадратическая ошибка, нормированная на размах эталонного ряда (NRMSE):

$$\mathrm{NRMSE}_{A,B}(y) = 100\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{y_j^{(A)} - y_j^{(B)}}{R_B}\right)^2}, \quad R_B = \max_j y_j^{(B)} - \min_j y_j^{(B)}. \tag{19}$$

Здесь $A$ — проверяемый ряд, $B$ — эталонный ряд. Для сравнений результатов расчетов из разных источников вводятся обозначения: (FV,TN), (PINN,FV), (PINN,TN).

*Таблица 2*

*NRMSE интегральных характеристик вытеснения*

| Величина | $\mathrm{NRMSE}_{\mathrm{FV,TN}}$ q025 | $\mathrm{NRMSE}_{\mathrm{PINN,FV}}$ q025 | $\mathrm{NRMSE}_{\mathrm{PINN,TN}}$ q025 | $\mathrm{NRMSE}_{\mathrm{PINN,TN}}$ q100 | $\mathrm{NRMSE}_{\mathrm{PINN,TN}}$ q400 |
|---|---|---|---|---|---|
| Нефтяной дебит | 1,227 | 0,478 | 1,123 | 1,308 | 1,182 |
| Водный дебит | 1,245 | 0,492 | 1,135 | 1,340 | 1,215 |
| Обводненность | 1,259 | 0,492 | 1,152 | 1,347 | 1,217 |
| Накопленная нефть | 1,096 | 0,322 | 1,403 | 1,196 | 1,500 |
| Накопленная вода | 0,258 | 0,071 | 0,323 | 0,269 | 0,328 |
| Средняя водонасыщенность | 1,116 | 0,439 | 1,271 | 1,185 | 1,232 |

В таблице 2 представлены результаты верификации параметрической PINN для трех режимов вытеснения. Данные демонстрируют согласованность результатов расчетов tNavigator,

FV-кода и параметрической PINN по всем шести интегральным характеристикам вытеснения, при этом расхождения составляют не более 1,5 %. Сравнение FV-кода и tNavigator в режиме q025 показывает, что FV-код, в котором реализована несжимаемая модель (5)–(7), воспроизводит данные интегральных характеристик, полученных в tNavigator. Расхождения обусловлены различием в реализованных моделях, использованных численных методах, их программных реализациях и представлениях фазовых зависимостей.

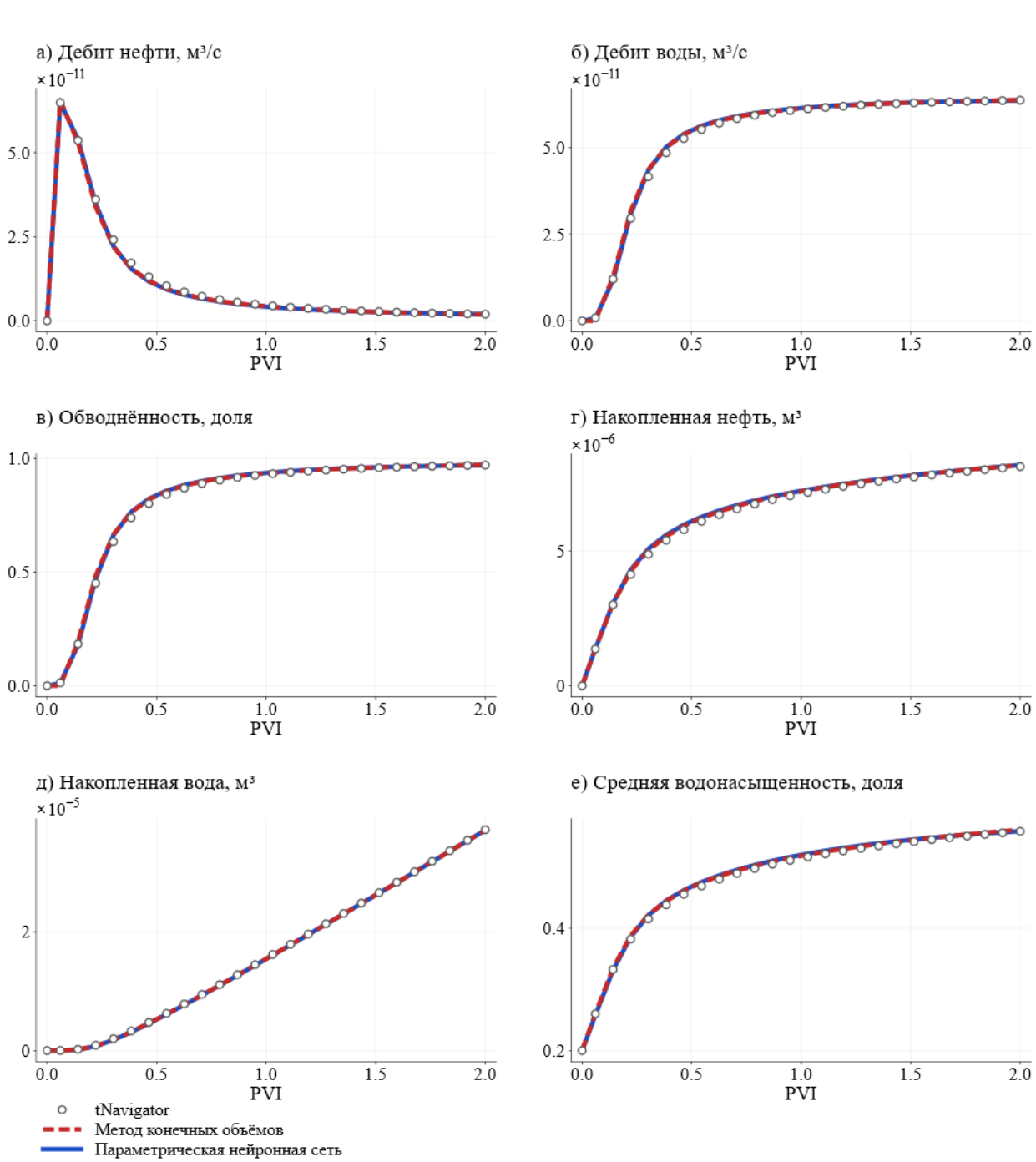



**Рис. 1.** *Характеристики вытеснения в режиме q025. Незакрашенные кружки — tNavigator; красная пунктирная линия — метод конечных обьемов; синяя сплошная линия — параметрическая PINN*

Сопоставление PINN и FV-кода, в которых реализована одна и та же математическая модель (5)–(7), характеризует погрешность самой нейросетевой аппроксимации и показывает, что PINN решает задачу фильтрации для режима q025 не хуже конечно-объемного кода (расхож-

дения менее 0,5 %). Сравнение PINN и tNavigator для трех режимов закачки отражает расхождение, обусловленное, в основном, различием математических моделей. Поскольку данные tNavigator для режима q100 не использовались при обучении и настройке сети, согласование на промежуточном расходе без дообучения и повторного выбора весов подтверждает способность параметрической PINN интерполировать интегральные характеристики внутри рассматриваемого диапазона расходов. При этом уровень ошибок в режиме q100 сопоставим по величине с ошибками для q025 и q400 (таблица 2).

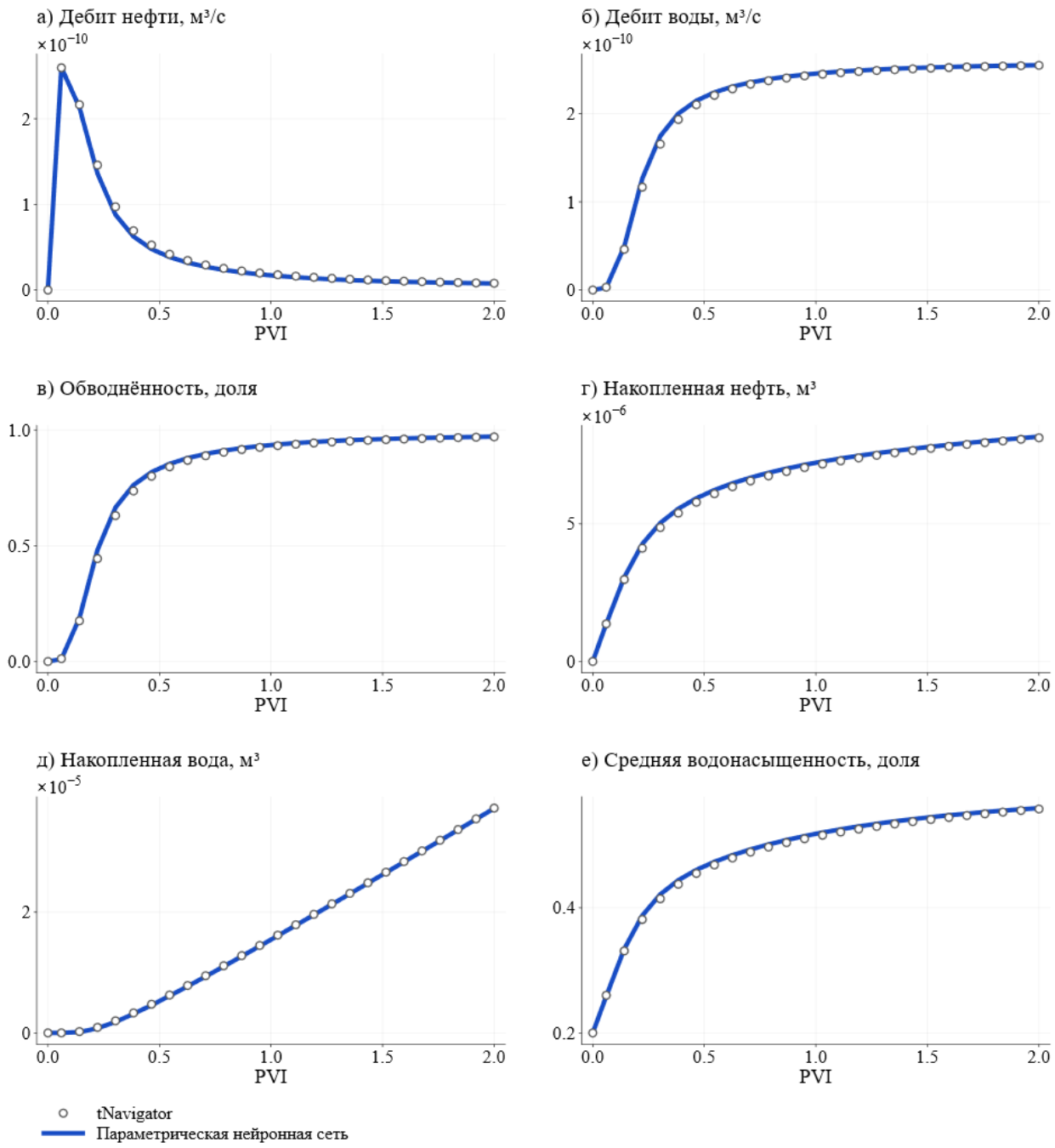



**Рис. 2.** *Характеристики вытеснения в режиме q100. Незакрашенные кружки — tNavigator; синяя сплошная линия — параметрическая PINN*

На рисунке 1 сопоставлены результаты трех расчетов: tNavigator, FV-кода и параметрической PINN. Все три решения качественно совпадают: кривые визуально перекрываются в масштабе рисунка, что согласуется с данными таблицы 2. На рисунке 2 приведено аналогичное

сопоставление для режима q100. Кривые параметрической PINN и tNavigator визуально совпадают во всем диапазоне PVI.

**Заключение**

Разработана параметрическая по расходу закачки PINN для решения задачи двухфазной фильтрации. Обучение PINN основано только на физических закономерностях и ограничениях, без подгонки к наблюдаемым кривым. Показано, что погрешность нейросетевой аппроксимации не превышает погрешности независимого конечно-объемного решения относительно данных tNavigator. Результаты верификации на режиме q100, который не использовался при обучении, демонстрируют способность параметрической PINN интерполировать интегральные характеристики без дообучения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E. Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*. 2019;378:686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
2. Chakraborty A., Rabinovich A., Moreno Z. Physics-Informed Neural Networks for Modeling Two-Phase Steady State Flow with Capillary Heterogeneity at Varying Flow Conditions. *Advances in Water Resources*. 2024;185:104639. DOI: 10.1016/j.advwatres.2024.104639.
3. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite Volume Methods. *Handbook of Numerical Analysis* / Eds.: Ciarlet P. G., Lions J. L. Amsterdam: Elsevier; 2000;7:713–1018. DOI: 10.1016/S1570-8659(0)07005-8.
4. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований; 2004. 416 с.
5. Chen Z., Huan G., Ma Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Philadelphia: SIAM; 2006. 531 p. DOI: 10.1137/1.9780898718942.
6. *NumPy and SciPy Documentation*. Режим доступа: https://docs.scipy.org/doc/.
7. Sun L., Gao H., Pan S., Wang J.-X. Surrogate Modeling for Fluid Flows Based on Physics-Constrained Deep Learning without Simulation Data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020;361:112732. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112732.
8. Kingma D. P., Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization. *3rd International Conference on Learning Representations (ICLR)*. 2015. arXiv:1412.6980. Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1412.6980.
9. *PyTorch 2.12.1. Computer Software. PyTorch Foundation*. 2026. Режим доступа: https://github.com/pytorch/pytorch/releases/tag/v2.12.1.

# ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ КАК КАТЕГОРНЫХ СКЛЕЕК, АКСИОМАТИКА, ДУАЛЬНОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

**Г. К. Толоконников**
*Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ РАН, г. Москва, Российская Федерация*
*ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5382-886X,* ✍ *admcit@mail.ru*

*Аннотация:* в работе предложена формальная аксиоматическая теория первого порядка в рамках классической логики для нейронных сетей произвольной топологии, которая является частным случаем аксиоматики развиваемых автором категорных систем, обобщающих и формализующих теорию функциональных систем П.К. Анохина, открытую им в 1930-х годах и, по признанию Н. Винера, встречавшегося с П.К. Анохиным в Москве в 1961 году, содержащую все основные положения кибернетики (обратную связь и т.д.). В склейках открыты и излагаются в работе три вида дуальности, для каждого из них доказаны принципы двойственности, которые нашли применения для обоснования и обобщения на произвольные нейросети известных формул С. Осовского в методе обратного распространения ошибки. Каждая наука развивается и приобретает законченный вид при открытии своих постулатов и аксиом. Предлагаемая аксиоматика для теории нейронных сетей отвечает этому важному этапу развития науки о нейронных сетях, а с учетом системных основ, на которых построена аксиоматика, является важным этапом для формализации основ кибернетики и тех разделов искусственного интеллекта, которые опираются на теорию нейронных сетей.

*Ключевые слова:* системы, категорные системы, теория функциональных систем, нейронные сети, аксиоматические теории, принцип двойственности, категорные склейки, метод обратного распространения ошибки, искусственный интеллект.

*Для цитирования:* Толоконников Г. К. Логические основания нейронных сетей как категорных склеек, аксиоматика, дуальности и приложения. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):26–39.

*Поступила в редакцию: 28.08.2026.* *В окончательном варианте: 28.09.2026.*

# LOGICAL FOUNDATION OF NEURAL NETWORKS AS CATEGORICAL SPLICES, AXIOMATICS, DUALITIES, AND APPLICATIONS

**G. K. Tolokonnikov**
*Federal Scientific Agroengineering Center VIM, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
*ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5382-886X,* ✍ *admcit@mail.ru*

*Abstract:* we developed a formal first-order axiomatic theory of neural networks with arbitrary topologies within classical logic. The theory is a special case of the author's axiomatic framework for categorical systems, which generalizes and formalizes P. K. Anokhin's theory of functional systems, developed in the 1930s and, as N. Wiener acknowledged after meeting P. K. Anokhin in Moscow in 1961, incorporating the fundamental principles of cybernetics, including feedback. We identified and described three types of dualities and proved the corresponding duality principles. We applied these results to justify and generalize S. Osowski's well-known formulas for error backpropagation to neural networks with arbitrary topologies. A scientific theory reaches a mature stage of development when its fundamental principles can be expressed as a system of postulates and axioms. The proposed axiomatic theory provides such a formal foundation for neural networks and, through its systemic basis, contributes to the formalization of the foundations of cybernetics and artificial intelligence methods based on neural networks.

*Keywords:* systems, categorical systems, theory of functional systems, neural networks, axiomatic theories, duality principle, categorical splices, backpropagation method, artificial intelligence.

*Cite this article:* Tolokonnikov G. K. Logical Foundation of Neural Networks as Categorical Splices, Axiomatics, Dualities, and Applications. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):26–39.

*Original article submitted: 28.08.2026.* *Revision submitted: 28.09.2026.*

**Введение**

Среди специалистов по кибернетике, к сожалению, мало известным является факт того, что задолго до предложенного в книге Н. Винера «Кибернетика» (1948 г.) подхода к кибернетике все ее положения (и даже более того) были выдвинуты и теоретически, и экспериментально обоснованы в работах П.К. Анохина, выдающегося ученика физиолога И.П. Павлова в теории функциональных систем, появившейся в конце 1920-х годов.



**Рис. 1.** *Н. Винер и П.К. Анохин, Москва, 1961 г.*

Н. Винер приезжал в 1961 году в Москву к П.К. Анохину и признал приоритет в кибернетике за П.К. Анохиным (см. [1]). В работах автора (см. [2] и ссылки там же) построена формализация теории функциональных систем, для чего потребовалось развить новый раздел теории категорий — теорию категорных склеек, которая стала аппаратом развиваемой автором теории категорных систем. Одной из важных моделей категорных систем являются искусственные нейронные сети произвольной топологии [2] (в том числе сети глубокого обучения и т.п.). У каждой науки есть предмет, теорию которого эта наука строит; современное понимание термина теории включает аксиомы, правила вывода той логики (классической, конструктивной, интуиционистской и т.п.), которая адекватна предмету науки, и интерпретации формальной аксиоматической теории, лежащей в основе теории предмета науки. По большому счету, когда найдены аксиомы и правила получения из них всех истинных утверждений о предмете науки, описывающих его свойства, можно говорить о том, что наука о данном предмете исследования в принципе построена. В любом случае этап открытия аксиом и логики для данной теории является важнейшим этапом развития науки. В работе мы предлагаем аксиоматику для теории нейронных сетей как указанный важный этап развития науки о нейронных сетях.

Общеизвестна роль, которую играет понятие двойственности в категориях [3], фактически пронизывающее всю теорию категорий. В категорных склейках нами обнаружены еще два вида дуальности помимо аналога категорной двойственности. Не менее важную роль, чем двойственность в обычной теории категорий, дуальности играют и в теории склеек. Интуитивная реализация всех трех видов дуальностей иллюстрируется рис. 2 на фрагменте нейронной сети. Невооруженным глазом видна «похожесть» изображенных пунктиром сверток на сами нейроны; математика, формализующая этот феномен, есть как раз теория склеек. Обычная двойственность состоит в замене направлений стрелок; если мы к тому же поменяем местами свертки и сами нейроны, мы снова получим сверточный мультиграф сверточной мультикатегории, частного случая склеек. Если применять последовательно смену направлений стрелок и замену друг на друга сверток и нейронов, то мы получим еще одну — третью дуальность, не сводящуюся к предыдущим. Дальнейшее применение уже имеющихся операций новых мультиграфов не дает.

Обратившись к П.К. Анохину, можно только подтвердить и сегодня его утверждение о том, что в искусственных нейронных сетях используются устаревшие лет на 20 представления о нейроне [6]. Действительно, нейробиологи, что общеизвестно с конца прошлого века, нашли примеры нейронов с несколькими аксонами, выдающими независимые друг от друга сигналы.

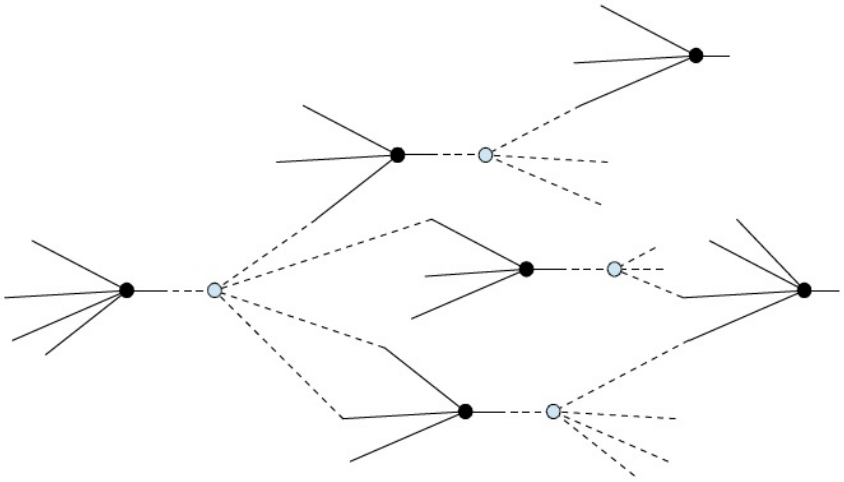


**Рис. 2.** *Фрагмент нейронной сети, связи изображены пунктирами (т.е. свертками в категорной модели нейросети)*

Наш подход позволяет моделировать перечисленные и другие обобщения представлений о нейронах [2]. Настоящая работа связана с категорной наукой следующим образом. Известное определение М. Месаровича [7] задает систему в рамках теоретико-множественной парадигмы в виде отношения на декартовом произведении множества входов и множества выходов. Его категорным обобщением является полистрелка поликатегории. Поликатегории ввел Сабо в 1975 году [8]. Соединение полистрелок осуществляется обычными композициями, имеющими, как показал Гарнер [9], ограниченные возможности. Автор заменил композиции на операцию сверток; возникли сверточные поликатегории, которые, в отличие от поликатегорий Сабо, позволяют, например, моделировать спайковые соединения нейронов, а также моделировать искусственные нейронные сети произвольной топологии. Теория сверточных поликатегорий была расширена до теории категорных склеек [2], в которой оказалось возможным моделировать неспайковые связи нейронов и других клеток, а также аналоги нейронных сетей, отвечающих высшим категориям. В связи с ограничением объема работы ряд стандартных логических утверждений опущен (аксиомы равенства, доказательства допустимости некоторых операций как правил вывода, явное описание конструкций шаблонов, зависимость от этих конструкций операций дуальности и т.д.), однако достаточно детально изложенная идейная сторона вопросов позволяет без особых усилий восстановить указанные опущенные утверждения.

**Категорные склейки**

Рассмотрим класс категорных склеек, отвечающий сверточным поликатегориям. Введем язык склеек. Алфавит имеет переменные $x_k$, $k = 1,2,\ldots$, и частичные функциональные символы проекций входов $q = 1,2,3,\ldots$, $C^{(1,q)}$ и $C^{(2,q)}$ — проекции выходов, переменные $a_k^{(i,q)}$ и $\mu_l$, $l = 1,2,\ldots$ — функциональные символы частичных $n$-арных операций. Обычным образом строятся термы $t,r,\ldots$; формулы $t = r$ назовем *базовыми формулами*. Рассмотрим четыре сорта $s_0^1$,$s_0^2$,$s_0^3$,$s_0^4$; выписанные переменные и предикат равенства отнесем к сорту $s_0^1$. Добавим три копии с сортами $s_0^2$,$s_0^3$,$s_0^4$. Буквами сорта $s_0^2$ являются введенные буквы сорта $s_0^1$ с добавленным штрихом, для сорта $s_0^3$ — с надчеркиванием, для сорта $s_0^4$ — с добавленным штрихом и надчеркиванием. Введены следующие буквы (виды операций даны в скобках $i,j = 1,2$; $k,q = 1,2,3,\ldots$):

$$x_k,\ C^{(i,q)},\ (s_0^1 \to s_0^1),\ a_k^{(i,q)},\ =;\ x'_k,\ C'^{(i,q)},\ (s_0^2 \to s_0^2),\ a_k'^{(i,q)},\ =';$$
$$\bar{x}_k,\ \bar{C}^{(i,q)},\ (s_0^3 \to s_0^3),\ \bar{a}_k^{(i,q)},\ =\ ^-;\ \bar{x}'_k,\ \bar{C}'^{(i,q)},\ (s_0^4 \to s_0^4),\ \bar{a}_k'^{(i,q)},\ ='\ ^-;\ M_{ij},\ (s_0^j \to s_0^i),$$

добавлены функциональные символы $M_{ij}$, действующие между сортами. Сорта $s_0^e$ (e=1,... , 4) букв иногда будем также размещать в виде левого верхнего индекса ${}^{(e)}x_k$, ${}^{(e)}C^{(i,q)}$ и так далее. Формулы вида ${}^{(e)}a_k^{(i,q)} = {}^{(e)}C^{(i,q)}\,{}^{(e)}x_k$, $i = 1,2$ называются элементарными формулами. Вводим бестиповый символ равенства ${}^{(e)}\xi = {}^{(e')}\eta$, $e \neq e'$, $e,e' = 1,\ldots,4$, это ${}^{(e)}\xi =$

${}^{(\mathrm{e})}M_{ee'}{}^{(\mathrm{e}')}\eta$, ${}^{(\mathrm{e})}\xi$, ${}^{(\mathrm{e}')}\eta$, $e,e'=1,\ldots,4$ — термы сортов $s_0^{(\mathrm{e})}$. Функциональные символы $M_{ij}$ удовлетворяют следующим аксиомам:

$$\forall\ {}^{(j)}x_k\, M_{ji}M_{ij}\,{}^{(j)}x_k = {}^{(j)}x_k, \quad i\neq j,\ i,j=1,\ldots,4. \tag{1}$$

Вводим также следующие аксиомы ($i,j=1,2$; $p,q=1,2,\ldots$):

$$\begin{gathered}\forall x_k\ \forall x'_k\ \forall \bar{x}_k\ \forall \bar{x}'_k\ \left(C^{(i,p)}C^{(j,q)}x_k = C^{(j,q)}x_k\right)\ \wedge\ \left(C'^{(i,p)}C'^{(j,q)}x'_k = C'^{(j,q)}x'_k\right)\ \wedge \\ \wedge\ \left(\bar{C}^{(i,p)}\bar{C}^{(j,q)}\bar{x}_k = \bar{C}^{(j,q)}\bar{x}_k\right)\ \wedge\ \left(\bar{C}'^{(i,p)}\bar{C}'^{(j,q)}\bar{x}'_k = \bar{C}'^{(j,q)}\bar{x}'_k\right).\end{gathered} \tag{2}$$

*Определение*. Базовым внешним гребнем и базовой внешней сверткой называется формула, составленная из наборов $k=1,2,3,\ldots$ элементарных формул $q,p,q',p'=1,2,3,\ldots$:

$$\begin{gathered}a_k^{(2,1)} = C^{(2,1)}x_k\ \wedge\ a_k^{(2,2)} = C^{(2,2)}x_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k^{(2,p)} = C^{(2,p)}x_k\ \wedge \\ \wedge\ a_k^{(1,1)} = C^{(1,1)}x_k\ \wedge\ a_k^{(1,2)} = C^{(1,2)}x_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k^{(1,q)} = C^{(1,q)}x_k,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}a_k'^{(2,1)} = C'^{(2,1)}x'_k\ \wedge\ a_k'^{(2,2)} = C'^{(2,2)}x'_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k'^{(2,p')} = C'^{(2,p')}x'_k\ \wedge \\ \wedge\ a_k'^{(1,1)} = C'^{(1,1)}x'_k\ \wedge\ a_k'^{(1,2)} = C'^{(1,2)}x'_k\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ a_k'^{(1,q')} = C'^{(1,q')}x'_k,\end{gathered}$$

которая может содержать дополнительные равенства. Гребни и свертки, в которых все переменные и термы (не проекции) связаны равенствами, называются связными. Сокращенно формулы могут быть записаны с помощью метазнака произведения:

$$\prod_k \prod_{i_k=1}^{q_k} a_k^{(1,i_k)} \prod_{i_k=1}^{p_k} a_k^{(2,i_k)}; \qquad \prod_k \prod_{i'_k=1}^{q'_k} a_k'^{(1,i'_k)} \prod_{i'_k=1}^{p'_k} a_k'^{(2,i'_k)}.$$

Операцию перевода неупорядоченных гребней и сверток в упорядоченные обозначим через P.

Рассмотрим класс формул, составленных из конъюнкций базовых формул. Удобно такие формулы разместить в 2x2 таблицу: подформулы сорта $s_0^1$ разместить в 1,1-ячейке таблицы, сорта $s_0^2$ — в 1,2-ячейке, сорта $s_0^3$ — в 2,1-ячейке и сорта $s_0^4$ — в 2,2-ячейке. В склейках используется более узкий класс формул, называемых полными гребнями, на нем действует данное матричное представление. Подформула полного гребня сорта $s_0^1$ размещается в 1,1-ячейке таблицы и называется внешним гребнем, сорта $s_0^2$ — в 1,2-ячейке и называется внешней сверткой, сорта $s_0^3$ — в 2,1-ячейке и называется внутренним гребнем, сорта $s_0^4$ — в 2,2-ячейке и называется внутренней сверткой. В [10] Хетчер в построенной им аксиоматической теории категорий сопоставил в метаязыке формулам языка изображения стрелками, задав тем самым формальную интерпретацию общеизвестным категорным диаграммам. Мы аналогично используем [2] изображение формул диаграммами, которые называются склеечными диаграммами. Образующими для построения категорных склеек с помощью вводимых далее операций свертки являются полные гребни, состоящие из базовых внешних гребней и базовых внешних сверток без внутренних гребней и сверток, при этом соединяющие их равенства возможны только для проекций. Традиционные нейронные сети имеют общую структуру, которая задается рис. 2.13 из [11], с перекрестными и обратными связями, их учет в соответствующих гребнях несложен. Построение нейронной сети можно осуществить пошагово. Такое же построение проводится и для гребней. Пусть имеется $u$ слоев базовых гребней, чередующихся с $u-1$ слоем базовых сверток (или $u$ слоев базовых сверток, чередующихся с $u-1$ слоем базовых гребней), определяющих некоторую операцию $\lambda$, то есть следующий полный гребень, который будем называть ***шаблоном операции*** (не указаны проекции):

$$\begin{gathered}x_1x_2\ldots x_{r^1}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\ldots x_{r^1+r^2}\ \ldots\ x_{r^1+\ldots+r^{u-1}+1}\ldots x_{r^1+\ldots+r^u}\ \mid \\ \mid\ x'_{R+1}x'_{R+2}\ldots x'_{R+t^1}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\ldots x'_{R+t^1+t^2}\ \ldots\ x'_{R+T-1}\ldots x'_{R+T},\end{gathered}$$

и формула:

$$x_1x_2\dots x_{r^1}\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+t^1}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\dots x_{r^1+r^2}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\dots x'_{R+t^1+t^2}\ \dots$$
$$\dots\ x'_{R+t^1+t^2+\dots+t^{u-2}+1}\dots x'_{R+t^1+t^2+\dots+t^{u-2}+t^{u-1}}\ x_{r^1+\dots+r^{u-1}+1}x_{r^1+\dots+r^{u-1}+2}\dots x_{r^1+\dots+r^u},$$

или в очевидных обозначениях $X_{r^1}\ X'_{R+t^1}\ X_{r^1+r^2}\ X'_{R+t^1+t^2}\ \dots\ X_{R+T}\ X_R$. Каждый из слоев имеет ***подслой***, составленный из входов, а также ***надслой*** шаблона, составленный из выходов. Полная с учетом подслоев и надслоев формула перепишется в виде следующего слова из букв проекций:

$$\prod_{k=1}^{u-1}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}$$

$$\prod_{j=1}^{t^k}\prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}} a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}\prod_{j=1}^{t^k}\prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}} a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1}t^l}.$$

Определим упорядочение букв проекций для следующего гребня с u-1 слоем внешних гребней и u слоями внешних сверток, с учетом начала нумерации с клетки (1,1):

$$\prod_{j=1}^{t^1}\prod_{i=1}^{m_{R+j}} a'^{(1,i)}_{R+j}\prod_{j=1}^{t^1}\prod_{i=1}^{n_{R+j}} a'^{(2,i)}_{R+j}$$

$$\prod_{k=1}^{u-1}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}\prod_{j=1}^{r^k}\prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1}r^l}.$$

Выписанные две формулы задают нумерацию букв в шаблонах операций, которые нам встретятся. Операцию построения слова из букв проекций обозначим через Γ, понадобятся следующие выражения для отдельных связных гребней и сверток:

$$\Gamma\, x_k = a_k^{(1,1)}\dots a_k^{(1,p)}\, a_k^{(2,1)}\dots a_k^{(2,q)},\quad \Gamma\, x'_k = a_k'^{(1,1)}\dots a_k'^{(1,p)}\, a_k'^{(2,1)}\dots a_k'^{(2,q)}.$$

Понадобится также стандартная операция удаления букв из слов, именно операция удаления из слова переменных проекций выходов, обозначим эту операцию $Pr^{(2)}$, и входов, обозначим эту операцию $Pr^{(1)}$. Определена операция исключения проекций, из исходного слова A и одновременно входящих в слово B, символы которого подлежат исключению из исходного слова, запись операции имеет вид $A\backslash B$. Операции свертки проводятся с помощью правил вывода $M_b, M_l$ и обратной $M_r$, операции Ev. Указанные операции выражаются через следующие правила вывода $\hat{M}_{ij}$ , переводящие выражения $s_0^j$-языка в выражения $s_0^i$-языка: сорт j переводится в сорт i. Подстановка $\hat{M}_{ij}$ осуществляется в виде замены формул равенства термов $t_1 = t_2$ на переводы этих формул в другие сорта ( j в i ). Операция $M_b$ переводит выражения языка из ячейки (1,1) в ячейку (2,1) и выражения языка из ячейки (1,2) в ячейку (2,2), являясь по определению одновременным действием операций $\hat{M}_{31}, \hat{M}_{42}$, также имеем $M_t - \hat{M}_{13}, \hat{M}_{24}$; $M_l - \hat{M}_{12}, \hat{M}_{34}$; $M_r - \hat{M}_{21}, \hat{M}_{43}$. Действие операции $M_b$ только на формулы, входящие в определение операции свертки, обозначим через $M_b^s$. Операция Ev состоит в применении символов имеющихся n-арных операций языка склеек. Операции свертки $EvPM_lM_b^s, EvPM_rM_b^s$ есть последовательное применение указанных правил вывода.

**Направленные полисклейки**

Для существования дуальностей в общем случае требуются при фиксированной операции (знаков $s_0^1$ $R$ штук, знаков $s_0^2$ $T$ штук) ${}^1\lambda_\alpha(s_0^1,\dots,s_0^1,s_0^2,\dots,s_0^2 \to s_0^1)$ следующие операции, которые включаем в сигнатуру склеек в качестве $\mu_l$ операций, ${}^1\sigma_\alpha, {}^1\lambda_\alpha^T, {}^1\sigma_\alpha^T, {}^2\lambda_\alpha, {}^2\sigma_\alpha, {}^2\lambda_\alpha^T, {}^2\sigma_\alpha^T$. Перейдем к их определению.

Основная операция ${}^1\lambda_\alpha$ задается индексом $\alpha = \prod_{\beta=1}^{w} a_{i_\beta}^{(2,p_\beta)} a_{j_\beta}^{\prime(1,q_\beta)} \prod_{\theta=1}^{w'} a_{m_\theta}^{(1,g_\theta)} a_{n_\theta}^{\prime(2,h_\theta)}$. В наглядной форме требования к соединениям состоят в том, что связи, отмечаемые пунктирами, соединяют соседние диапазоны связных гребней в общей формуле полного гребня со сверткой. Функциональный символ при применении к переменным в данном случае задает терм ${}^1\lambda_\alpha\ x_1x_2\dots x_R\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+T}$, который по определению приводит к операции в первом сорте ${}^1\mu_\alpha\, {}^1X_{r^1}\ X_{R+t^1}\ X_{r^1+r^2}\ X_{R+t^1+t^2}\dots X_{R+T}\ X_R$ и других сортах. Применение операции $\hat{\lambda}\,{}^1_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_l M_b$ (последовательное применение Ev , $M_l$, $M_b$ ) приводит к полному гребню с внешним гребнем в виде результата применения операции, внутреннего гребня и пустых клеток (1,2) и (2,2) (отсутствие внешней и внутренней сверток). Операция ${}^1\sigma_\alpha$ задается тем же индексом $\alpha$, что и операция ${}^1\lambda_\alpha$, но ее результат получается применением к гребню со сверткой правил вывода ${}^1\hat{\sigma}_{\,\alpha} = \mathrm{Ev}\, M_r M_b$, что приводит к полному гребню с внешней сверткой в виде результата применения операции ${}^1\mu'_\alpha$ , внутренней свертки и пустых клеток (1,1) и (2,1) (отсутствие внешнего и внутреннего гребней). Операции ${}^1\hat{\lambda}_\alpha$, ${}^1\hat{\sigma}_\alpha$ применимы к наборам формул с непустыми внутренними гребнями и свертками. Таким образом, мы имеем образующие и правила вывода построения из них новых полных гребней, которые составляют конструируемую полисклейку. Операция ${}^1\lambda^T_{\alpha^T}$ — аналог «смены направления стрелок» категории, она получается из операции ${}^1\lambda_\alpha$ одновременной сменой друг на друга функциональных символов $C^{(1,p)}$ и $C^{(2,p)}$ во всех сортах, при этом не меняется нумерация связных гребней и сверток и их проекций по нижним индексам и номерам связей. Обозначим эту операцию одновременной замены входов на выходы и наоборот через D. Операция ${}^1\sigma^T_{\alpha^T}$ задается тем же индексом, что и операция ${}^1\lambda^T_{\alpha^T}$, но ее результат получается применением к гребню со сверткой правил вывода $\hat{\sigma}\,{}^1_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_r M_b$. Общая для случая ${}^2\lambda^T_{\alpha^T}$ формула полного гребня со сверткой имеет вид:

$$x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+t^1}\ x_1x_2\dots x_{r^1}\ x'_{R+t^1+1}x'_{R+t^1+2}\dots x'_{R+t^1+t^2}\ x_{r^1+1}x_{r^1+2}\dots x_{r^1+r^2}\ \dots$$

$$\dots\ x_{r^1+r^2+\dots+r^{u-2}+1}\dots x_{r^1+r^2+\dots+r^{u-2}+r^{u-1}}\ x'_{R+t^1+\dots+t^{u-1}+1}x'_{R+t^1+\dots+t^{u-1}+2}\dots x'_{R+t^1+\dots+t^u}$$

$$R = r^1 + r^2 + \dots + r^{u-2} + r^{u-1},\quad T = t^1 + \dots + t^u.$$

Функциональный символ при применении к переменным задает терм ${}^2\lambda_{2_\alpha}\ x_1x_2\dots x_R\ x'_{R+1}x'_{R+2}\dots x'_{R+T}$, применение операции ${}^2\hat{\lambda}_\alpha = \mathrm{Ev}\, M_l M_b$ приводит к полному гребню с внешним гребнем в виде результата применения операции ${}^1\mu_\alpha$.

*Предложение 1*. Операция $B$ шаблон операции ${}^1\lambda_{1_\alpha}$ преобразует в шаблон:

$$\prod_{j=1}^{t'^1}\prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a_{R'+j}^{\prime(1,i)} \prod_{j=1}^{t'^1}\prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a_{R'+j}^{\prime(2,i)}$$

$$\prod_{k=1}^{u'}\prod_{j=1}^{r'^k}\prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k}\prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\prod_{j=1}^{t'^{k+1}}\prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}^{\prime(1,i)} \prod_{j=1}^{t'^k}\prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}^{\prime(2,i)},$$

$$R' = T,\quad T' = R,\quad u' = u-1,\quad p'_i = m_{R+i},\quad q'_i = n_{R+i},$$

$$m'_j = p_{j-T},\quad n'_j = q_{j-T},\quad r'^k = t^k,\quad t'^l = r^l,$$

$$i = 1,\dots,T,\quad j = 1,2,\dots,R,\quad k = 1,\dots,u-1,\quad l = 1,\dots,u.$$

Формулы для операций D и H=DB аналогичны, они фактически выписаны в аксиомах далее, в связи с чем для краткости опущены.

*Доказательство* громоздкое, но несложное, выписывается слово шаблона, далее в случае операции B применяется одновременная смена сортов, далее проводится перенумерация в установленном порядке. После чего путем сравнения индексов результата с начальным словом выписываются приведенные в условии равенства. Для операций D, H=DB доказательства аналогичны.

*Предложение 2.* Пусть ${}^1\alpha$ — индекс операции ${}^1\lambda_{{}^1\alpha}$. Тогда B переводит ${}^1\alpha \to {}^2\alpha$, ${}^2\alpha = \prod_{\theta=1}^{w'} a_{n_\theta - R}^{(2,h_\theta)} a_{T+m_\theta}^{\prime(1,g_\theta)} \prod_{\beta=1}^{w} a_{j_\beta - R}^{(1,q_\beta)} a_{T+i_\beta}^{\prime(2,p_\beta)}$, $D$ переводит ${}^1\alpha \to {}^1\alpha^T$,

${}^1\alpha^T = \prod_{\theta=1}^{w'} a_{R-m_\theta+1}^{(2,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} a_{2R+T-n_\theta+1}^{\prime(1,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} \prod_{\beta=1}^{w} a_{R-i_\beta+1}^{(1,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} a_{2R+T-j_\beta+1}^{\prime(2,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}$, $DB$ переводит ${}^1\alpha \to {}^2\alpha^T$, ${}^2\alpha^T = \prod_{\beta=1}^{w} a_{T+R-j_\beta+1}^{(2,M_{j_\beta}-q_\beta+1)} a_{T+R-i_\beta+1}^{\prime(1,P_{i_\beta}-p_\beta+1)} \prod_{\theta=1}^{w'} a_{T+R-n_\theta+1}^{(1,M_{n_\theta}-h_\theta+1)} a_{T+R-m_\theta+1}^{\prime(2,P_{m_\theta}-g_\theta+1)}$.

Теперь мы можем выписать аксиомы.

*Определение.* Категорной полисклейкой называется множество всех полных гребней, которые можно получить из базовых гребней с помощью определенных выше операций свертки при наличии нелогических аксиом (1)–(2) и следующих нелогических аксиом:

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda_\alpha\, x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,p_\beta)} x_{i_\beta} = C'^{(1,q_\beta)} x'_{j_\beta} \ \wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,g_\theta)} x_{m_\theta} = C'^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta}; \tag{3}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma_\alpha\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,p_\beta)} x_{i_\beta} = C'^{(1,q_\beta)} x'_{j_\beta} \ \wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,g_\theta)} x_{m_\theta} = C'^{(2,h_\theta)} x'_{n_\theta}; \tag{4}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda^T_{\alpha^T}\ x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} x_{R-m_\theta+1} = C'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} x'_{2R+T-n_\theta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} x_{R-i_\beta+1} = C'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)} x'_{2R+T-j_\beta+1}; \tag{5}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma^T_{\alpha^T}\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)} x_{R-m_\theta+1} = C'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)} x'_{2R+T-n_\theta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)} x_{R-i_\beta+1} = C'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)} x'_{2R+T-j_\beta+1}; \tag{6}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^2\lambda_{{}^2\alpha}\ x_1 x_2 \dots x_R\, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta - R} = C'^{(1,g_\theta)} x'_{T+m_\theta} \ \wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,q_\beta)} x_{j_\beta - R} = C'^{(2,p_\beta)} x'_{T+i_\beta}; \tag{7}$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^2\sigma_{{}^2\alpha}\ x'_{R+1} \dots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(2,h_\theta)} x_{n_\theta - R} = C'^{(1,g_\theta)} x'_{T+m_\theta} \ \wedge \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(1,q_\beta)} x_{j_\beta - R} = C'^{(2,p_\beta)} x'_{T+i_\beta}; \tag{8}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^{2}\lambda^{T}_{{}_{2}\alpha^{T}} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,\, M_{j_\beta} - q_\beta + 1)} x_{T+R-j_\beta+1} = C'^{(1,\, P_{i_\beta} - p_\beta + 1)} x'_{T+R-i_\beta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,\, M_{n_\theta} - h_\theta + 1)} x_{T+R-n_\theta+1} = C'^{(2,\, P_{m_\theta} - g_\theta + 1)} x'_{T+R-m_\theta+1}; \tag{9}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^{2}\sigma^{T}_{{}_{2}\alpha^{T}} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_{\beta=1}^{w} C^{(2,\, M_{j_\beta} - q_\beta + 1)} x_{T+R-j_\beta+1} = C'^{(1,\, P_{i_\beta} - p_\beta + 1)} x'_{T+R-i_\beta+1}$$
$$\wedge \bigwedge_{\theta=1}^{w'} C^{(1,\, M_{n_\theta} - h_\theta + 1)} x_{T+R-n_\theta+1} = C'^{(2,\, P_{m_\theta} - g_\theta + 1)} x'_{T+R-m_\theta+1}; \tag{10}$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$
$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big) \Pr^{(1)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big),$$
$$\mathrm{Sh}\big({}^{1}\lambda_{{}_{1}\alpha}\big) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u-1} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}$$
$$\times \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \tag{11}$$
$$\times \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{p_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} a^{(1,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j} \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{q_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} a^{(2,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}$$
$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} a^{(2,p_\beta)}_{i_\beta} \, M_{12} \, a'^{(1,q_\beta)}_{j_\beta} \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(1,g_\theta)}_{m_\theta} \, M_{12} \, a'^{(2,h_\theta)}_{n_\theta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$
$$\supset \; \Gamma \, x'_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big) \Pr^{(1)} \mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big),$$
$$\mathrm{Sh}\big({}^{1}\sigma_{{}_{1}\alpha}\big) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u-1} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{p_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l} \prod_{j=1}^{r^k} \prod_{i=1}^{q_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r^l}$$
$$\times \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{m_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} a'^{(1,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \prod_{j=1}^{t^k} \prod_{i=1}^{n_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l}} a'^{(2,i)}_{R+j+\sum_{l=1}^{k-1} t^l} \tag{12}$$
$$\times \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{p_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j} \prod_{j=1}^{r^u} \prod_{i=1}^{q_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{r^1+\cdots+r^{u-1}+j}$$
$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(2,p_\beta)}_{i_\beta} \, a'^{(1,q_\beta)}_{j_\beta} \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(1,g_\theta)}_{m_\theta} \, a'^{(2,h_\theta)}_{n_\theta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x_{R+1}\ {}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\ x_1 x_2 \ldots x_R\, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset\ \Pr{}^{(2)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) \Pr{}^{(1)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr),$$

$$\operatorname{Sh}\bigl({}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u'-1} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} M_{12}\, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} M_{12}\, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \tag{13}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{p'_{r'^1+\cdots+r'^{u-1}+j}} a^{(1,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j} \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{q'_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}} a^{(2,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{R-m_\theta+1}\, M_{12}\, a'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{2R+T-n_\theta+1} \prod_{\beta=1}^{w} a^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{R-i_\beta+1}\, M_{12}\, a'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{2R+T-j_\beta+1};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R\ \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T}\ \exists\, x'_{R+1}\ {}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\ x'_{R+1} \ldots x'_{R+T}\, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset\ \Pr{}^{(2)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) \Pr{}^{(1)} \operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr),$$

$$\operatorname{Sh}\bigl({}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}\bigr) = c^{\mathrm{def}} \prod_{k=1}^{u'-1} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21}\, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21}\, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k-1} t'^l} \tag{14}$$

$$\times \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{p'_{r'^1+\cdots+r'^{u-1}+j}} M_{21}\, a^{(1,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j} \prod_{j=1}^{r'^u} \prod_{i=1}^{q'_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}} M_{21}\, a^{(2,i)}_{r'^1+\cdots+r'^{u'-1}+j}$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21}\, a^{(2,\,M_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{R-m_\theta+1}\, a'^{(1,\,N_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{2R+T-n_\theta+1} \prod_{\beta=1}^{w} M_{21}\, a^{(1,\,q_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{R-i_\beta+1}\, a'^{(2,\,m_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{2R+T-j_\beta+1};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^2\lambda_{2\alpha} \; x_1 x_2 \ldots x_R \, x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\lambda_{2\alpha}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{15}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}.$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(2,h_\theta)}_{n_\theta - R} \, M_{12} \, a'^{(1,g_\theta)}_{T+m_\theta} \prod_{\beta=1}^{w} a^{(1,q_\beta)}_{j_\beta - R} \, M_{12} \, a'^{(2,p_\beta)}_{T+i_\beta};$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \ldots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^2\sigma_{2\alpha} \; x'_{R+1} \ldots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \ldots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\sigma_{2\alpha}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{16}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}.$$

$$\setminus \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(2,h_\theta)}_{n_\theta - R} \, a'^{(1,g_\theta)}_{T+m_\theta} \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(1,q_\beta)}_{j_\beta - R} \, a'^{(2,p_\beta)}_{T+i_\beta};$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x_{R+1} \; {}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}} \; x_1 x_2 \dots x_R \, x'_{R+1} \dots x'_{R+T} = x_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{17}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} M_{12} \, a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}$$

$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} a^{(2,\, M_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{T+R-j_\beta+1} \, M_{12} \, a'^{(1,\, P_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{T+R-i_\beta+1} \prod_{\theta=1}^{w'} a^{(1,\, M_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{T+R-n_\theta+1} \, M_{12} \, a'^{(2,\, P_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{T+R-m_\theta+1};$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_R \; \forall x'_{R+1} \dots \forall x'_{R+T} \; \exists \, x'_{R+1} \; {}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}} \; x'_{R+1} \dots x'_{R+T} \, x_1 x_2 \dots x_R = x'_{R+1} \supset$$

$$\supset \; \Gamma \, x_{R+1} = c^{\Delta} \; \Pr^{(2)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right) \Pr^{(1)} \operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right),$$

$$\operatorname{Sh}\left({}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}\right) = c^{\text{def}} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j}} a'^{(1,i)}_{R'+j} \prod_{j=1}^{t'^1} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j}} a'^{(2,i)}_{R'+j}$$

$$\times \prod_{k=1}^{u'} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{p'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(1,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \prod_{j=1}^{r'^k} \prod_{i=1}^{q'_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l}} M_{21} \, a^{(2,i)}_{j+\sum_{l=1}^{k-1} r'^l} \tag{18}$$

$$\times \prod_{j=1}^{t'^{k+1}} \prod_{i=1}^{m'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(1,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l} \prod_{j=1}^{t'^k} \prod_{i=1}^{n'_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}} a'^{(2,i)}_{R'+j+\sum_{l=1}^{k} t'^l}$$

$$\setminus \prod_{\beta=1}^{w} M_{21} \, a^{(2,\, M_{j_\beta}-q_\beta+1)}_{T+R-j_\beta+1} \, a'^{(1,\, P_{i_\beta}-p_\beta+1)}_{T+R-i_\beta+1} \prod_{\theta=1}^{w'} M_{21} \, a^{(1,\, M_{n_\theta}-h_\theta+1)}_{T+R-n_\theta+1} \, a'^{(2,\, P_{m_\theta}-g_\theta+1)}_{T+R-m_\theta+1}.$$

Доопределим операцию D до операции сортовой дуальности D, удовлетворяющей свойствам $\mathrm{D}(\alpha\beta\dots\gamma) \equiv \mathrm{D}(\alpha)\,\mathrm{D}(\beta)\dots\mathrm{D}(\gamma)$, $\alpha\beta\dots\gamma$ — слово в алфавите склеек ($\equiv$ — метазнак соответствия), и (указаны лишь те буквы, которые операция D меняет):

$$Da^{(i)}_k \equiv a^{(j)}_k, \quad Da'^{(i)}_k \equiv a'^{(j)}_k, \quad D\bar{a}^{(i)}_k \equiv \bar{a}^{(j)}_k, \quad D\bar{a}'^{(i)}_k \equiv \bar{a}'^{(j)}_k,$$

$$DC^{(i)} \equiv C^{(j)}, \quad DC'^{(i)} \equiv C'^{(j)}, \quad D\bar{C}^{(i)} \equiv \bar{C}^{(j)}, \quad D\bar{C}'^{(i)} \equiv \bar{C}'^{(j)}, \quad i,j = 1,2, \; i \neq j$$

$$D\,{}^1\lambda_{1_\alpha} \equiv {}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^1\sigma_{1_\alpha} \equiv {}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^1\lambda^T_{1_{\alpha^T}} \equiv {}^1\lambda_{1_\alpha}, \quad D\,{}^1\sigma^T_{1_{\alpha^T}} \equiv {}^1\sigma_{1_\alpha},$$

$$D\,{}^2\lambda_{2_\alpha} \equiv {}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^2\sigma_{2_\alpha} \equiv {}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}}, \quad D\,{}^2\lambda^T_{2_{\alpha^T}} \equiv {}^2\lambda_{2_\alpha}, \quad D\,{}^2\sigma^T_{2_{\alpha^T}} \equiv {}^2\sigma_{2_\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что операция D совпадает со своей обратной. Формулы, полученные применением операции D, назовем дуальными по сортам. Доопределим операцию B до операции сверточной дуальности B, удовлетворяющей свойствам $\mathrm{B}(\alpha\beta\dots\gamma) \equiv \mathrm{B}(\alpha)\,\mathrm{B}(\beta)\dots\mathrm{B}(\gamma)$, $\alpha\beta\dots\gamma$, —

слово в алфавите склеек (≡ — метазнак соответствия), и (указаны лишь те буквы, которые операция B меняет):

$$Bx_k \equiv x'_k, \quad Bx'_k \equiv x_k, \quad B\bar{x}_k \equiv \bar{x}'_k, \quad B\bar{x}'_k \equiv \bar{x}_k,$$

$$Ba_k^{(i)} \equiv a_k'^{(i)}, \quad Ba_k'^{(i)} \equiv a_k^{(i)}, \quad B\bar{a}_k^{(i)} \equiv \bar{a}_k'^{(i)}, \quad B\bar{a}_k'^{(i)} \equiv \bar{a}_k^{(i)},$$

$$BC^{(i)} \equiv C'^{(i)}, \quad BC'^{(i)} \equiv C^{(i)}, \quad B\bar{C}^{(i)} \equiv \bar{C}'^{(i)}, \quad B\bar{C}'^{(i)} \equiv \bar{C}^{(i)}, i = 1, 2,$$

$$B\,{}^1\lambda_{1\alpha} \equiv {}^2\sigma_{2\alpha}, \quad B\,{}^1\sigma_{1\alpha} \equiv {}^2\lambda_{2\alpha}, \quad B\,{}^1\lambda^T_{1\alpha^T} \equiv {}^2\sigma^T_{2\alpha^T}, \quad B\,{}^1\sigma^T_{1\alpha^T} \equiv {}^2\lambda^T_{2\alpha^T},$$
$$B\,{}^2\lambda_{2\alpha} \equiv {}^1\sigma_{1\alpha}, \quad B\,{}^2\sigma_{2\alpha} \equiv {}^1\lambda_{1\alpha}, \quad B\,{}^2\lambda^T_{2\alpha^T} \equiv {}^1\sigma^T_{1\alpha^T}, \quad B\,{}^2\sigma^T_{2\alpha^T} \equiv {}^1\lambda^T_{1\alpha^T}.$$

Формулы, полученные применением операции B, назовем дуальными по сверткам.

Сортовая и сверточная дуальности переводят аксиомы в аксиомы.

*Предложение 3*. Если F аксиома, то дуальная ей формула DF (соответственно, BF) также является аксиомой формальной аксиоматической теории склеек. Доказательство опирается на предложения 1 и 2, громоздко, но несложно, опущено. Справедливо также следующее простое утверждение (доказательство опущено).

*Предложение 4*. Пусть формула $F$ исходного языка выведена из формул $A$ и $A \supset F$ по правилу *modus ponens*, тогда формула $DF$ выводится по этому правилу из формул $DA$ и $D(A \supset F)$. Пусть теперь формула $\forall\xi\ A$ получена из формулы A с помощью правила Gen классической логики. Тогда формула $D(\forall\xi\ A)$ выводится из формулы $DA$ по тому же правилу (для $B$ дословно справедливо то же самое).

Докажем основную теорему данной работы — принцип дуальности.

***Теорема***. Пусть формула A исходного языка склеек выводима, тогда дуальная по сортам формула DA (соответственно, дуальная по сверткам формула BF) также выводима.

*Доказательство* (мы проводим доказательство для сортовой дуальности, для сверточной все проходит дословно). По условию теоремы задана формула A исходного языка и ее вывод из аксиом исходного языка. Сама формула является последней в дереве вывода, пусть она получена на шаге n — последнем шаге вывода, на котором использованы либо правило вывода modus ponens, либо правило Gen. Если применялось правило modus ponens, то имеются две формулы B и $B \supset A$ , на основании которых получена формула A. Тогда дуальная для A формула DA на основании предложения 4 выводится из формул DB, $DB \supset DA$ по правилу modus ponens. Указанный случай применения правила Gen дает тот же результат выводимости формулы DA из формулы, дуальной той формуле, из которой выведена в этом случае формула A. Теперь мы рассмотрим формулы, из которых выведена формула A, их вывод содержит менее чем n шагов. Повторяя проведенный шаг, мы по заданному выводу формулы A будем приходить к аксиомам исходного языка, но по предложению 3 мы в листьях дерева из дуальных формул получаем аксиомы. Таким образом, вывод формулы A переводится в вывод дуальной формулы DA. Теорема доказана.

*Следствие*. Если выводима формула A в исходном языке, то ей дуальная формула в том же языке DA (соответственно, BA) также выводима.

Нетрудно видеть, что повторное применение операций D и B дает копию исходной склейки, применение D и потом B дает копию склейки, полученной применением к исходной склейке сначала B и потом D, применение D или B к склейке, полученной применением D и B, дает копию исходной склейки. Для строгого рассмотрения примеров склеек, в частности, для нейронных сетей необходимо изложить подходящие варианты интерпретаций формального языка склеек, поскольку приведенное выше изложение проходит в рамках теории доказательств. Достаточно формальное применение дуальностей склеек для построения сопряженных графов С. Осовского изложено кратко в [5], развернутое опирающееся на теорию моделей изложение требует отдельной статьи. Некоторые примеры тем не менее приведены ниже.

**Примеры**

Имеется естественный класс примеров склеек (навеянный теорией нейронных сетей), построенных из имеющейся категории, в которых свертками, помимо обычной композиции, являются переведенные в свертки операцией $M$ стрелки категории. Рассмотрим его на примере категории конечномерных векторных пространств над полем $P$. Здесь прямоугольные матрицы стрелок из $\mathrm{Hom}(P^m,P^n)$ рассматриваются как полистрелки с $m$ входами и $n$ выходами. Вычисление возможных сверток (отвечающих стрелкам $s\colon R^{\Sigma_n}\to R^{\Sigma_r}$) $p$ полистрелок $f_i\colon R^m\to R^n$ (входы для свертки) и $q$ полистрелок $g_j\colon R^r\to R^t$ (выходы для свертки) осуществляется обычной композицией матриц $f_i s_{nrj} g_j$, где $s_{ab}$ являются блоками матрицы $s=[\dots[s_{ab}]\dots]$, представляющей морфизм $s\colon R^{n_1}\otimes\dots\otimes R^{n_r}\to R^{r_1}\otimes\dots\otimes R^{r_t}$.

Рассмотрим пример сетей Хопфилда, имеющих обратные связи. Такая сеть имеет один слой из $n$ нейронов с $n$ входами и одним выходом, при этом работает в один или несколько тактов, на каждом такте на вход подаются значения, полученные на предыдущем такте, до тех пор пока на выходе каждый последующий раз не будут одни и те же значения [4].

*Предложение.* Сеть Хопфилда является моделью следующего гребня склейки (для переменных, помимо $x$, $a$, использованы $b$, $u$, относящиеся к свертке; используются верхние левые индексы):

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}a_k^{(1,k)} = C^{(1,k)}\,{}^{i}x_k \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} {}^{i}a_{n+1}^{(2,1)} = C^{(2,1)}\,{}^{i}x_{n+1} \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}x_{n+1} = {}^{i}x_k \;\wedge$$

$$\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}b_k'^{(2,k)} = C'^{(2,k)}\,{}^{i}u_k' \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} {}^{i}b_0'^{(1,0)} = C'^{(1,0)}\,{}^{i}u_0' \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}u_0' = {}^{i}u_k' \;\wedge$$

$$\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{k=1}^{n} {}^{i}b_k'^{(2,k)} = {}^{k}a_i^{(1,i)}.$$

Проведение свертки приводит к гребню с операцией (получаемой из операций склейки, весовой, перестановочной и отвечающей (см. (8.3) в [4]) функции активации нейронов), переходящей при интерпретации в (8.3) из [4]. Для нейронных сетей Хопфилда, имеющих два (и более) такта, соответствующая формула получается отвечающей обычной композиции сверткой двух (и более) копий приведенного гребня.

**Заключение**

В работе предложена аксиоматическая теория первого порядка в классической логике для нейронных сетей (операции, аксиомы и так далее), найдены три вида дуальности и доказаны в рамках теории доказательств отвечающие дуальностям принципы двойственности, имеющие приложения для вычислений производных в методе обратного распространения ошибки для произвольной из сетей, где этот метод можно применять. Аксиоматика и язык опирается на теорию категорных склеек, являющуюся математическим аппаратом развиваемых автором категорных систем, формализующих, в частности, теорию функциональных систем П.К. Анохина, явившихся полноценным вариантом кибернетики задолго до работ Н. Винера. Отметим, что частный случай полисклеек — бинарные склейки — рассмотрен в [12]. Данная работа представлена в виде доклада на международной научной конференции «Математические идеи академика П.Л. Чебышева, их приложения в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта» (Обнинск, 14–16 мая 2026 г.) [13].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анохин П. К. *Избранные труды: Кибернетика функциональных систем* / Под ред. К. В. Судакова. М.: Медицина; 1998. 400 с.
2. Толоконников Г. К. Категорные склейки, категорные системы и их приложения в алгебраической биологии. *Биомашсистемы.* 2021;5(1):148–235.

3. Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Science & Business Media, 1998. 314 p. ISBN: 9780387984032.
4. Осовский С. *Нейронные сети для обработки информации*. М.: Горячая линия — Телеком; 2017. 448 с.
5. Tolokonnikov G. K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020;938:259–267. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2.
6. Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. *Принципы системной организации функций*. М.: Наука; 1973. С. 5–61.
7. Месарович М. *Общая теория систем: математические основы*. М.: Мир; 1978. 311 с.
8. Szabo M. E. Polycategories. *Communications in Algebra*. 1975;3(8):663–689.
9. Garner R. Polycategories via Pseudo-Distributive Laws. *Adv. Math*. 2008;218(3):781–827.
10. Hatcher W. S. *The Logical Foundations of Mathematics*. Pergamon Press, 1982. 320 p.
11. Галушкин А. И. Нейронные сети: основы теории. М.: Горячая линия — Телеком; 2017. 496 с.
12. Толоконников Г. К. Направленные бинарные категорные склейки, принцип двойственности и категорная модель нейронных сетей. *Системная информатика*. 2025;27:15–58. DOI: https://doi.org/10.31144/si.2307-6410.2025.n27.p15-58.
13. Толоконников Г. К. Логическая природа нейронных сетей. *Математические идеи П.Л. Чебышёва, их приложение в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта: сборник тезисов конференции*. Обнинск, 14–16 мая 2026 г. М.: НИЯУ МИФИ; 2026:48–49.

# НОВЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ СЕЧЕНИЯ РАДУЖНОГО РАССЕЯНИЯ АТОМОВ И ИОНОВ

**В. П. Кощеев**[1,а], **Ю. Н. Штанов**[2,б]

[1] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация*

[2] *Тюменский индустриальный университет, филиал «Сургутский институт нефти и газа», г. Сургут, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760,* ✍ *koshcheev1@yandex.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5822-3368, yuran1987@mail.ru*

*Аннотация*: дифференциальное сечение радужного рассеяния атомов и ионов вычислено в первом порядке теории возмущений с учетом усреднения по коллективным колебаниям атомных электронов и ядер. Показано, что дифференциальное сечение радужного рассеяния атома на атоме равно нулю при нулевом угле вылета, а при рассеянии иона на атоме не равно нулю. Показано, что при нулевом угле вылета должен наблюдаться дискретный спектр значений сечения радужного рассеяния, пропорциональный квадрату степени ионизации иона.

*Ключевые слова:* радужное рассеяние, теория возмущений, полная энергия, сечение рассеяния, атом, ион, степень ионизации.

*Для цитирования:* Кощеев В. П., Штанов Ю. Н. Новый подход к расчету сечения радужного рассеяния атомов и ионов. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):40–44.

*Поступила в редакцию: 19.07.2026.* *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

# A NEW APPROACH TO DETERMINING RAINBOW SCATTERING CROSS SECTIONS FOR ATOMS AND IONS

**V. P. Koshcheev**[a], **Yu. N. Shtanov**[b]

[1] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation*

[2] *Industrial University of Tyumen, Surgut Branch, Surgut, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760,* ✍ *koshcheev1@yandex.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5822-3368, yuran1987@mail.ru*

*Abstract:* we calculated the differential cross section for rainbow scattering of atoms and ions using first-order perturbation theory and accounting for the collective oscillations of atomic electrons and nuclei. We found that the differential cross section for atom–atom rainbow scattering is zero at zero scattering angle, whereas it remains nonzero for ion–atom scattering. We also found that, at zero scattering angle, the rainbow-scattering cross section exhibits a discrete set of values proportional to the square of the ion's charge state.

*Keywords:* rainbow scattering, perturbation theory, total energy, scattering cross-section, atom, ion, degree of ionization.

*Cite this article:* Koshcheev V. P., Shtanov Yu. N. A New Approach to Determining Rainbow Scattering Cross Sections for Atoms and Ions. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):40–44.

*Original article submitted: 19.07.2026.* *Revision submitted: 20.09.2026.*

## Введение

В [1] представлены результаты экспериментального и теоретического исследования радужного рассеяния ионов ксенона однослойной плоскостью графена, отмечено, что потенциалы Ziegler-Biersack-Littmark (ZBL) [2] и Nordlund-Lehtola-Hobler (NLH) [3] не описывают радужное рассеяние при нулевом угле вылета для ионов ксенона из графена.

## Теория

Дифференциальное сечение радужного рассеяния в первом порядке борновской теории возмущений имеет вид [4]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|U(q)\right|^2, \tag{1}$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса; $d\Omega$ — элемент телесного угла; $q = 2k\sin\theta/2$; $\theta$ — угол рассеяния в системе центра масс; $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ — кинетическая энергия частицы.

Фурье-компонента потенциальной энергии взаимодействия двух атомов была вычислена ранее в первом порядке стационарной теории возмущений [5, 6]:

$$U\left(q\right) = \frac{4\pi e^2}{q^2}\left[Z_1 - F_1\left(q\right)\right]\left[Z_2 - F_2\left(q\right)\right]\exp\left(-\frac{q^2\overline{(\delta \mathrm{r})^2}}{2}\right), \tag{2}$$

где $Z_1 e$ и $Z_2 e$ — заряды ядер атомов.

Для каждого значения среднего квадрата амплитуды коллективных колебаний электронов и ядер $\overline{(\delta \mathrm{r})^2} = \overline{(\delta \mathrm{r_{nucl}})^2} + \overline{(\delta \mathrm{r_{el}})^2}$ искалось решение системы нелинейных уравнений [5, 6]:

$$\begin{cases} U\left(r\right) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty U(q)\frac{\sin(qr)}{r}qdq \\ \frac{dU(r)}{dr} = 0 \\ \hbar\omega = 2\overline{(\delta \mathrm{r})^2}\frac{d^2U(r)}{dr^2}. \end{cases} \tag{3}$$

**Качественная теория**

Если потенциал изолированного атома аппроксимировать экранированным кулоновским потенциалом:

$$\frac{4\pi e}{q^2}\left[Z_2 - F_2\left(q\right)\right] \approx \frac{4\pi Z_2 e}{q^2+\mu_2^2}, \tag{4}$$

то формулу (2) запишем в виде:

$$U\left(q\right) \approx \frac{4\pi e^2 Z_2}{q^2+\mu_2^2}\left[Z_1 - F_1\left(q\right)\right]\exp\left(-\frac{q^2\overline{(\delta \mathrm{r})^2}}{2}\right), \tag{5}$$

где $\mu_2^{-1}$ — длина экранирования потенциала изолированного атома (4).

Видно, что при $q = \theta = 0$ дифференциальное сечение (1) равно нулю при рассеянии атома на атоме, так как $F_1(0) = Z_1$, а при рассеянии иона на атоме не равно нулю, так как $F_1^+(0) = Z_1 - 1$.

**Численные расчеты**

Атомные форм-факторы $F_1(q)$ и $F_2(q)$ изолированных атомов или ионов были вычислены с помощью атомных волновых функций [7], которые аппроксимируют решения уравнений Хартри–Фока. Атомный форм-фактор для атома углерода C(3p) представлен сплошной линией, а для иона углерода $\mathrm{C}^+$(2p) — пунктирной линией на рис. 1.

Множество решений системы уравнений (3) построено при различных значениях среднего квадрата амплитуды коллективных колебаний электронов и ядер $\overline{(\delta \mathrm{r})^2} = \overline{(\delta \mathrm{r_{nucl}})^2} + \overline{(\delta \mathrm{r_{el}})^2}$. На рис. 2 представлена зависимость кванта энергии коллективных колебаний $\hbar\omega$ от минимума потенциальной энергии $U\left(r\right)$ для двух атомов углерода C(3p)+C(3p), атома и иона углерода $\mathrm{C}^+$(2p)+C(3p). В таблице представлено численное значение среднего квадрата амплитуды коллективных колебаний электронов и ядер $\overline{(\delta \mathrm{r})^2}$, при котором потенциальная энергия $U\left(r_{\min}\right)$ и энергия кванта коллективных колебаний $\hbar\omega$ достигают своего минимального и максимального значения соответственно. На рис. 3 представлена полная энергия для двух атомов углерода C(3p)+C(3p), атома и иона углерода $\mathrm{C}^+$(2p)+C(3p) в зависимости от расстояния между ними. В таблице представлены параметры потенциала взаимодействия для двух атомов углерода C(3p)+C(3p), которые хорошо согласуются с некоторыми спектрометрическими параметрами [8] двухатомной молекулы углерода в основном (низколежащем) квантовом состоянии C(3p)+C(3p).

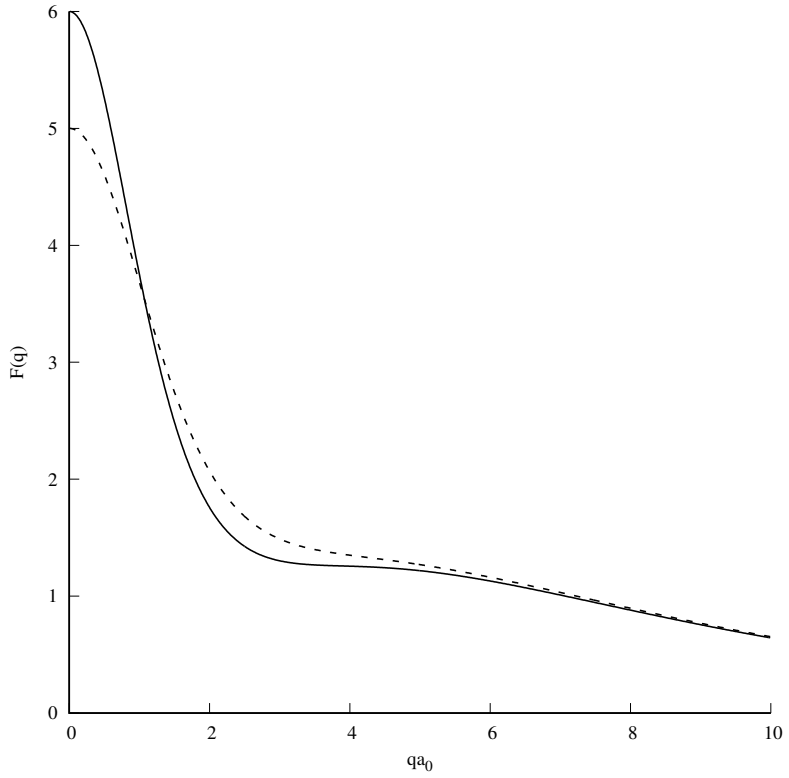



**Рис. 1.** *График атомного форм-фактора для изолированного атома углерода C(3p) (сплошная линия) и иона углерода $C^+$(2p) (пунктирная линия)*

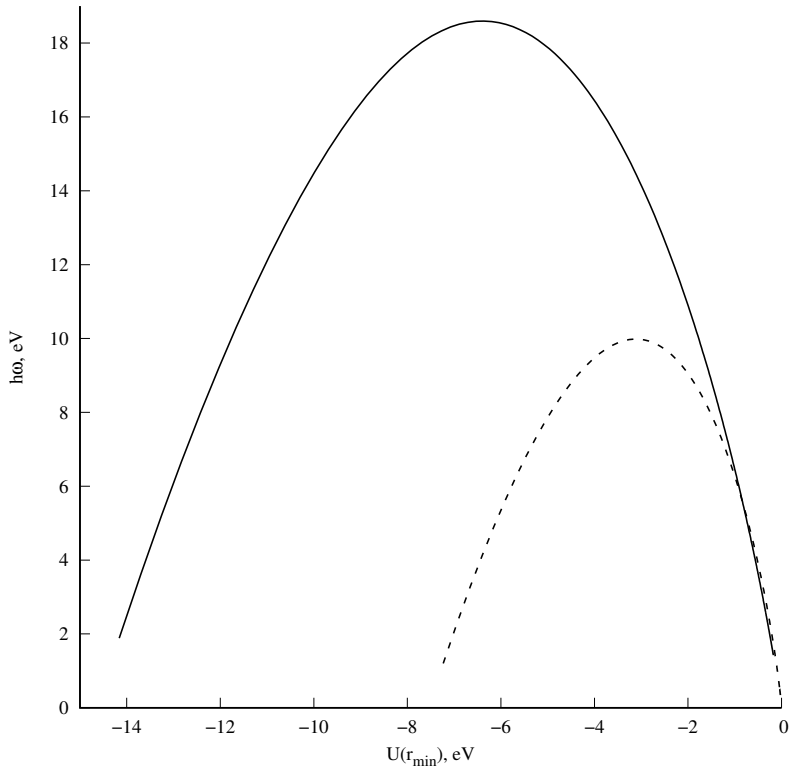



**Рис. 2.** *График зависимости кванта энергии коллективных колебаний $\hbar\omega$ от минимума потенциальной энергии $U(r)$: для двух атомов углерода C(3p)+C(3p) — сплошная линия, а атома и иона углерода $C^+$(2p)+C(3p) — пунктирная линия*

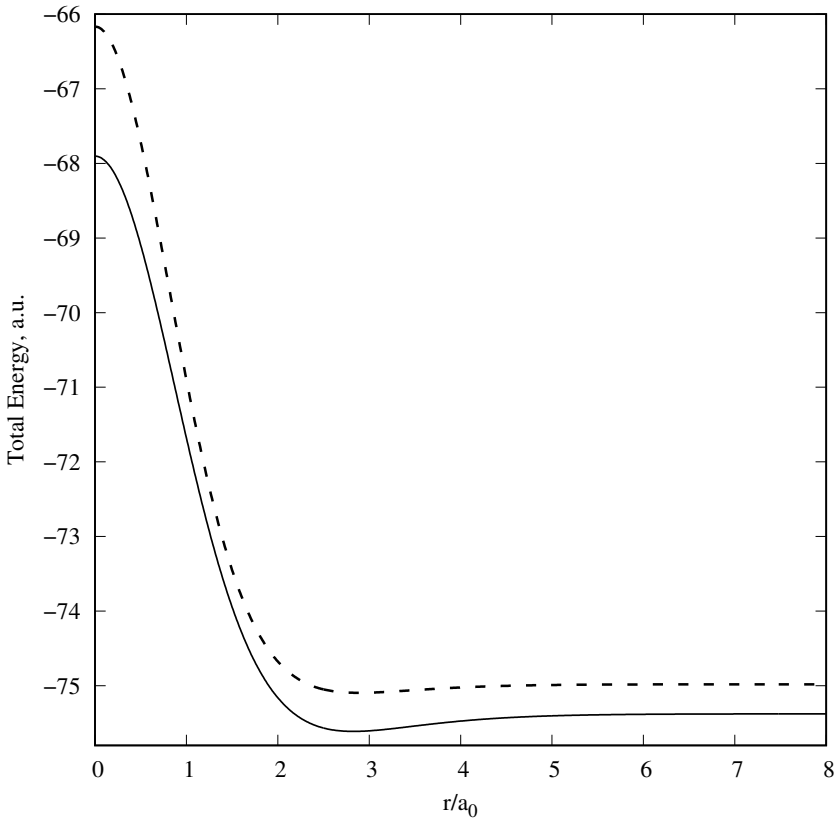



**Рис. 3.** *График полной энергии для двух атомов углерода C(3p)+C(3p) (сплошная линия), атома и иона углерода $C^+$(2p)+C(3p) (пунктирная линия) в зависимости от расстояния между ними*

*Таблица*

*Основные рассчитанные значения двух атомов углерода C(3p)+C(3p), атома и иона углерода $C^+$(2p)+C(3p)*

| Характеристика | C(3p)+ C(3p) | $C^+$(2p)+C(3p) |
|---|---|---|
| $U\,(0)$, эВ | 203.3 | 239.8 |
| $U\,(r_{\min})$, эВ | -6.39 | -3.11 |
| $r_{\min}$, Å | 1.496 | 1.528 |
| $\sqrt{\overline{(\delta \mathrm{r})^2}}$, Å | 0.395 | 0.361 |
| $\hbar\omega$, эВ | 18.597 | 9.984 |
| $\frac{1}{a_0^2}\cdot\frac{d\sigma(q_{\max})}{d\Omega}$ | $7.173{\cdot}10^9$ | $8.669{\cdot}10^9$ |
| $q_{\max}$ | 1.035 | 0.830 |
| $\frac{1}{a_0^2}\cdot\frac{d\sigma(0)}{d\Omega}$ | 0 | $2.783{\cdot}10^9$ |

На рис. 4 представлена зависимость дифференциального сечения радужного рассеяния $d\sigma/d\Omega$ от переданного импульса $\hbar q$ для двух атомов углерода C(3p)+C(3p), атома и иона углерода $C^+$(2p)+C(3p). В таблице представлены как максимальные значения сечения радужного рассеяния $\frac{1}{a_0^2}\cdot\frac{d\sigma(q_{\max})}{d\Omega}$, так и значения сечения при $q=\theta=0$. Видно, что численные расчеты с атомным форм-фактором, изображенным на рис. 1, подтверждают предсказание качественной теории. Очевидно, что при $q=\theta=0$ должен наблюдаться дискретный спектр значений сечения радужного рассеяния, пропорциональный квадрату степени ионизации налетающего иона $\frac{d\sigma^{++}(0)}{d\sigma^{+}(0)}=\frac{2^2}{1^2}$ и $\frac{d\sigma^{+++}(0)}{d\sigma^{+}(0)}=\frac{3^2}{1^2}$, так как $F_1^{++}(0)=Z_1-2$ и $F_1^{+++}(0)=Z_1-3$.

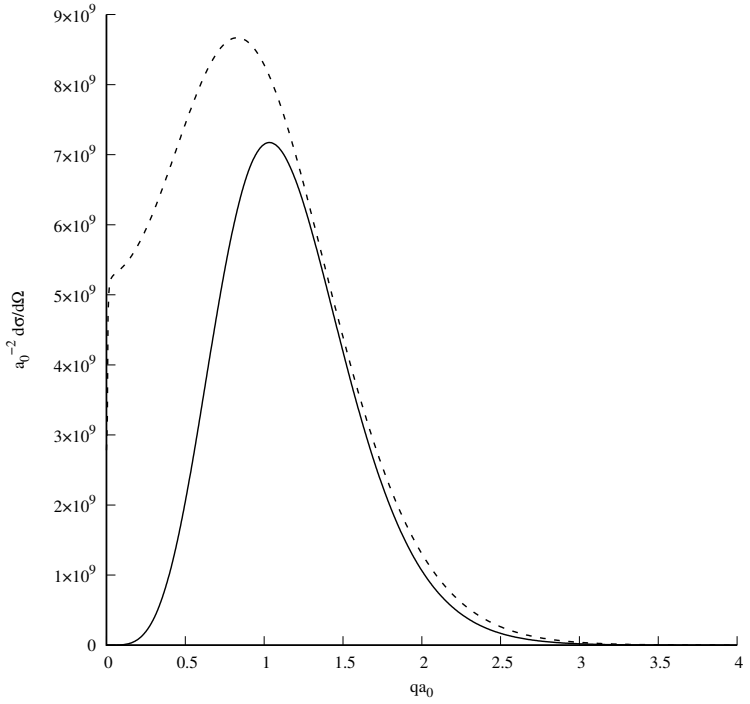



**Рис. 4.** *График зависимости дифференциальноого сечения радужного рассеяния $d\sigma/d\Omega$ от переданного импульса $\hbar q$: для двух атомов углерода C(3p)+C(3p) — сплошная линия, атома и иона углерода $C^+$(2p)+C(3p) — пунктирная линия*

**Выводы**

Дискретный спектр значений сечения радужного рассеяния при нулевом угле вылета, который пропорционален квадрату степени ионизации налетающего иона, можно наблюдать на эксперименте.

Дополнительные материалы к статье размещены в [9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Frank C. et al. Observation of Rainbow Scattering in Ion Transmission through Graphene. *Carbon.* 2026;257:121746. DOI: 10.1016/j.carbon.2026.121746.
2. Ziegler J. F., Biersack J. P., Littmark U. Empirical Stopping Powers for Ions in Solids. *Charge States Dyn. Screen. Swift Ions Solids.* 1983:88–100.
3. Nordlund K., Lehtola S., Hobler G. Repulsive Interatomic Potentials Calculated at Three Levels of Theory. *Physical Review A.* 2025;111(3):032818. DOI: 10.1103/PhysRevA.111.032818.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Курс теоретической физики. Том III. Квантовая механика (нерелятивистская теория).* М.: Физматлит; 2002. 808 с.
5. Кощеев В. П., Штанов Ю. Н. Новый подход к вычислению полной энергии двухатомной молекулы в первом порядке теории возмущений. *Письма в Журнал технической физики.* 2022;48(10):28–32. DOI: 10.21883/PJTF.2022.10.52553.19148.
6. Koshcheev V. P., Shtanov Y. N. Simulation of the Total Energy of a Triatomic Silicon Cluster in the First Order of Perturbation Theory. 2025. arXiv:2507.00053. DOI: 10.48550/arXiv.2507.00053.
7. Clementi E., Roetti C. Roothaan-Hartree-Fock Atomic Wavefunctions: Basis Functions and Their Coefficients for Ground and Certain Excited States of Neutral and Ionized Atoms, Z$\leq$ 54. *Atomic Data and Nuclear Data Tables.* 1974;14(3):177–478. DOI: 10.1016/S0092-640X(74)80016-1.
8. Borsovszky J. et al. Photodissociation of Dicarbon: How Nature Breaks an Unusual Multiple Bond. *PNAS.* 2021;118(52):e2113315118. DOI: 10.1073/pnas.2113315118.
9. Штанов Ю. Н., Кощеев В. П., Моргун Д. А. *Библиотека программ «JINRLIB».* Режим доступа: http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/tropics/index.html.

# ГИБРИДНЫЙ ПОДХОД К СЖАТИЮ ДАННЫХ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМОЙ РАЗРЯДНОСТИ И ПИРАМИДАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

**А. Ю. Бабкин**[1,а], **А. И. Солдатов**[2,б]

[1] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, г. Томск, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7480-6529,* ✍ *404not_foundd@mail.ru*

[б] *ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1892-1644, asoldatof@mail.ru*

*Аннотация*: в статье рассматривается проблема избыточности и объемности данных, формируемых многоканальной ультразвуковой решеткой при диагностических исследованиях. Обоснована необходимость создания гибридного метода сжатия, сочетающего в себе элементы структурной компрессии (пирамидальные методы) и алгоритмического кодирования (включая подходы, заимствованные из MP4). В работе описаны особенности формата данных типа A-скан, рассмотрены параметры, влияющие на объем, и предложен концептуальный подход к построению математической модели сжатия с динамически адаптируемой разрядностью. Статья имеет постановочный характер и ориентирована на исследование потенциальных направлений разработки эффективных алгоритмов сжатия без описания конкретных экспериментов.

*Ключевые слова:* ультразвуковая решетка, A-скан, сжатие данных, пирамидальный метод, адаптивная разрядность, телемедицина.

*Для цитирования:* Бабкин А. Ю., Солдатов А. И. Гибридный подход к сжатию данных ультразвуковой многоканальной решетки на основе динамически изменяемой разрядности и пирамидальных методов. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):45–49.

*Поступила в редакцию: 29.05.2026.* *В окончательном варианте: 25.09.2026.*

# HYBRID APPROACH TO COMPRESSION OF MULTICHANNEL ULTRASONIC ARRAY DATA USING DYNAMICALLY ADJUSTABLE BIT DEPTH AND MULTIRESOLUTION METHODS

**A. Yu. Babkin**[1,a], **A. I. Soldatov**[2,b]

[1] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[2] *Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7480-6529,* ✍ *404not_foundd@mail.ru*

[б] *ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1892-1644, asoldatof@mail.ru*

*Abstract:* we studied redundancy and excessive data volume generated by multichannel ultrasonic arrays in diagnostic applications. We justified the need for a hybrid compression method that combines structural compression based on multiresolution methods with algorithmic encoding approaches, including techniques derived from MP4. We described the characteristics of the A-scan data format and outlined the parameters that affect data volume. We proposed a conceptual approach to a compression model that uses dynamically adjustable bit depth. The study is theoretical and focuses on potential directions for developing efficient compression algorithms without presenting experimental results.

*Keywords:* ultrasonic array, A-scan, data compression, multiresolution method, adaptive bit depth, telemedicine.

*Cite this article:* Babkin A. Yu., Soldatov A. I. Hybrid Approach to Compression of Multichannel Ultrasonic Array Data Using Dynamically Adjustable Bit Depth and Multiresolution Methods. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):45–49.

*Original article submitted: 29.05.2026.* *Revision submitted: 25.09.2026.*

**Введение**

История развития ультразвуковых систем диагностики начинается с середины XX века и тесно связана с развитием радиотехники, акустики и цифровой обработки сигналов [1]. Первые одноканальные устройства сбора данных обеспечивали просто визуализацию сигналов, полученных с ультразвуковых систем. С 80-90-х годов XX века системы диагностики не только выполняют визуализацию сигналов, но и являются неотъемлемой частью телемедицинских сетей передачи, где данные передаются в режиме реального времени или архивируются для дальнейшего анализа [2].

Современные системы ультразвуковой диагностики, в особенности при использовании многоканальных вариаций, создают очень большие объемы данных, это является критичным в задачах удаленной телемедицины, где каналы связи имеют ограниченную пропускную способность, а системы хранения данных — не безграничный объем. В современном мире сетевая инфраструктура развивается медленнее, чем технологии для получения данных, связанных с диагностикой, что, соответственно, требует разработки адаптивных методов сжатия и передачи информации.

Эволюция методов сжатия данных шла от универсальных алгоритмов (таких как ZIP, JPEG и аналогичных) к специализированным решениям, оптимизированным под конкретные типы сигналов, например, изображения, аудио- или видеоконтент. Однако данные, получаемые в ходе ультразвуковой диагностики, имеют особую природу: они одновременно демонстрируют характеристики одномерных сигналов, двумерных изображений и динамических временных структур. Ультразвуковые диагностические устройства, особенно в многоканальной конфигурации, должны соответствовать строгим требованиям к скорости передачи данных, энергоэффективности и масштабируемости. В связи с этим возникает необходимость перехода от универсальных подходов к контекстно-адаптивным методам сжатия, которые учитывают уникальные особенности ультразвуковых сканирований.

**Принцип работы ультразвуковой решетки**

Ультразвуковая решетка состоит из группы синхронизированных датчиков, генерирующих одномерные сигналы — так называемые A-сканы. Каждый датчик и, соответственно, канал выполняет двойную функцию: он испускает акустический импульс и принимает отраженный сигнал от исследуемой среды. Принимаемый сигнал отражает амплитуду реакций окружающей среды на глубине и определяет положение границ объекта и неоднородности в нем [3].

Серия сканирований, полученных в результате работы датчиков по разным каналам, может быть использована для создания изображений или 3D-моделей. Однако на первичном этапе эти сигналы сохраняются с высокой разрядностью в среднем 12–16 бит и высокой частотой дискретизации, что обеспечивает нагрузку на каналы передачи, а также системы хранения.

Современные промышленные и медицинские системы используют от 32 до 128 каналов дискретизации частотой до 50 МГц. Один A-сканер может содержать до нескольких тысяч показаний, в результате чего формируется поток данных в десятки мегабайт в секунду. Такие объемы данных очень трудно эффективно передавать по радиоканалам или сохранять в несжимаемой энергонезависимой памяти.

**Исходные параметры модели**

Основные параметры, влияющие на объем данных:

- количество каналов (M);
- длина одного A-скана (N);
- разрядность сигнала (R);
- частота дискретизации;
- соотношение сигнал/шум;
- корреляция между каналами ($p_{ij}$);
- динамический диапазон амплитуды сигнала ($A_{min}$, $A_{max}$).

Рассмотрим пример: в диагностическом устройстве 64 канала, каждый A-скан содержит 1024 отсчета, а каждый отсчет представлен с разрядностью 16 бит. Частота сбора данных равняется 20 выборкам в секунду. Полный поток данных рассчитывается как:

$$V = M \times N \times R \times f_d = 64 \times 1024 \times 16 \times 20 = 20971520 \text{ бит/с} \approx 2{,}5 \text{ Мбит/с [4]}. \quad (1)$$

Это означает, что даже в простом устройстве объем данных достигает нескольких мегабайт в секунду, что задает высокую нагрузку на каналы связи и устройства хранения информации. Увеличение числа каналов, длины A-сканов или частоты дискретизации увеличивает поток пропорционально.

Влияние разрядности тоже критично: переход с 16 бит на 12 бит уменьшает поток на 25%, а переход с 16 бит на 8 бит — на 50%, это означает, что качество восстановления слабых сигналов ухудшится. Поэтому важно дифференцировать разрядность данных в зависимости от значения амплитуды.

Сильная корреляция между каналами, в особенности при использовании линейных или секторных решеток, открывает возможность снижать их избыточность при помощи кодирования разности между сигналами. Это может быть реализовано как в форме предсказания, так и при помощи вейвлет-преобразования с многоканальным входом [5].

**Постановка проблемы и оценка подходов**

Существующие методы сжатия, такие как ZIP, JPEG, MP4, SPIHT и др., не учитывают специфики данных, полученных с ультразвуковой решетки, а именно: структуры, разреженности и значимости отдельных участков сигнала.

Критично важные аспекты, которые требуется учитывать, — это:

- большая доля шумов и слабо информативных участков;
- наличие выраженных амплитудных пиков;
- межканальная корреляция.

Универсальные алгоритмы, такие как ZIP, плохо сжимают данные в реальном времени, также они малоэффективны на слабо структурированных сигналах. Такие алгоритмы, как JPEG и MP4, предполагают двумерную или временную структуру, это делает их применимыми только после преобразования данных в другой формат данных, например, B-сканы или видеопотоки. SPIHT и JPEG2000 требуют значительных вычислительных ресурсов и часто не предназначены для аппаратной реализации в компактных встраиваемых системах [6].

Для наглядности ниже приведена таблица, отражающая основные особенности популярных методов сжатия применительно к задаче обработки A-сканов.

*Таблица*

*Особенности различных методов сжатия применительно к задаче обработки A-сканов*

| **Метод** | **Тип сжатия** | **Преимущества** | **Ограничения** |
|---|---|---|---|
| ZIP | Без потерь | Простота, поддержка стандартами | Неэффективен для сигнальных данных, высокая избыточность |
| JPEG | С потерями | Хорош для изображений | Требуется 2D-структура, нет адаптации по разрядности |
| MP4 / H.264 | С потерями | Высокое сжатие видеопотоков | Требует временной / кадровой структуры, неприменим к A-скану |
| JPEG2000 | Пирамидальное | Высокое качество, масштабируемость | Вычислительно сложен, неоптимален для 1D-сигналов |
| SPIHT | Пирамидальное | Эффективен для изображений | Высокая сложность реализации, плохо подходит для онлайн-сигналов |
| Huffman + RLE | Комбинированное | Простота, аппаратная реализация | Требует предварительной оптимизации структуры данных |

Таким образом, требуется метод, учитывающий особенности A-скана: одноканальность (или многоканальность с корреляцией), структуру сигнала с пиками и паузами, переменную значимость информации, а также адаптивность к ресурсам и скорости передачи. Этим требованиям отвечает гибридная модель, описанная в следующем разделе.

**Предлагаемый концептуальный подход: гибридная модель «Уровень + Масштаб»**

Метод включает следующие ключевые этапы:

1. Предобработка.

На этом этапе осуществляется подавление шумов и нормализация сигнала. Сигнал $A[n]$ преобразуется к диапазону [0;1] посредством деления на максимальное значение:

$$\widetilde{\mathrm{A}}\,[\mathrm{n}] = \frac{\mathrm{A}\,[\mathrm{n}]}{\mathrm{A}_{\max}} \tag{2}$$

Также может применяться медианная фильтрация [2] для локального выравнивания амплитуд и повышения устойчивости к одиночным выбросам.

2. Адаптивное квантование.

Для уменьшения объема представления сигналов используется динамическая разрядность, при которой разрядность изменяется в зависимости от амплитуды:

$$\mathrm{R}\,(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{R}_{\mathrm{high}}, |\mathrm{x}| > \mathrm{T}_{\mathrm{high}}, \\ \mathrm{R}_{\mathrm{low}},\ |\mathrm{x}| \leq \mathrm{T}_{\mathrm{low}}, \\ \mathrm{R}_{\mathrm{mid}},\ \mathrm{T}_{\mathrm{low}} < |\mathrm{x}| \leq \mathrm{T}_{\mathrm{high}}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{k} \cdot \sigma_{\mathrm{noise}}, \tag{4}$$

где порог $T$ позволяет уменьшить битовую глубину для малозначимых участков и повысить ее для областей с резкими изменениями амплитуды.

3. Пирамидальная декомпозиция.

Используется многоуровневая структура для разложения сигнала на базовые и уточняющие компоненты. Это аналогично вейвлет-преобразованию [3, 8] и позволяет передавать данные в зависимости от степени детализации.

4. Пороговое обнуление и RLE.

Значения ниже порога $\mathrm{T}_{\mathrm{zero}}$ обнуляются. Такая обработка позволяет эффективно применять RLE (Run-Length Encoding) кодирование, которое компактно представляет последовательности одинаковых значений [7].

5. Энтропийное кодирование.

Остаточные данные кодируются методом Хаффмана, для того чтобы уменьшить общую энтропию представления [7]. Частотный анализ проводится по сформированным квантованным символам.

6. Адаптация под канал связи.

Алгоритм может переключаться между режимами сжатия в зависимости от пропускной способности: отправка только базового уровня пирамиды, снижение разрядности, пропуск незначимых каналов. Подход актуален для беспроводных интерфейсов (BLE, LoRa, Wi-Fi) [6].

7. Межканальное предсказание (при необходимости).

При высокой корреляции между каналами используется линейное предсказание вторичных каналов из опорных, что снижает объем повторяющейся информации [8].

**Ожидаемые эффекты и перспективы**

Ожидается, что такой подход обеспечит:

- снижение объема передаваемой информации до 5–10 раз;
- сохранение значимой информации (минимальный MSE и высокая PSNR);
- возможность масштабирования под устройства с ограниченными ресурсами;
- потенциальную интеграцию в телемедицинские и промышленные системы.

Алгоритм хорошо масштабируется и может быть реализован как на микроконтроллерах с DSP-блоками (например, STM32, Texas Instruments), так и на ПЛИС (FPGA), что делает его применимым в реальных устройствах диагностики. В перспективе возможна адаптация под сигналы B-сканов с использованием двумерного вейвлет-преобразования и внедрение элементов машинного обучения для предсказания параметров разрядности.

**Заключение**

Представлен концептуальный подход к сжатию данных многоканальной ультразвуковой решетки, учитывающий особенности сигнала и ограничения канала передачи. Модель основывается на комбинировании структурной и амплитудной компрессии с возможностью адаптации под условия. Предполагается, что такой гибридный подход позволит достичь высокой эффективности при сохранении точности реконструкции и диагностической значимости данных.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*. М.: Техносфера; 2005. 1072 с.
2. *Применение ультразвука в медицине: Физические основы* / Пер. с англ., под ред. К. Хилла. М.: Мир; 1989. 568 с.
3. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. *Теория и практика вейвлет-преобразования*. СПб.: ВУС; 1999. 204 с.
4. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов*. 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 768 с.
5. Сэломон Д. *Сжатие данных, изображений и звука*. М.: Техносфера; 2004. 365 с.
6. Ломовицкий В. С., Михайлов А. И., Шестак В. П., Щекотихин В. М. *Основы построения систем и сетей передачи информации*. М.: Горячая линия — Телеком; 2005. 382 с.
7. Huffman D. A. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proc. of the IRE*. 1952;40(9):1098–1101. DOI: 10.1109/JRPROC.1952.273898.
8. Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. 3rd ed. Amsterdam: Academic Press; 2008. 832 p.

# ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДИАГНОСТИКИ ПРОЦЕССОВ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТРИК DORA И SPACE С АРХИТЕКТУРНОЙ СЕГРЕГАЦИЕЙ ВИДИМОСТИ ДАННЫХ

**С. Н. Яцук**[1,а], **С. Г. Еловой**[1,2,б]

[1] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Сургутский филиал федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0002-8257-1132,* ✍ *yatsuk_sn@edu.surgu.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1860-9303, s.elovoy@yandex.ru*

*Аннотация*: рассмотрена задача автоматизированной диагностики процессов разработки программного обеспечения на основе данных систем контроля версий. Показано, что существующие инструменты инженерной аналитики преимущественно реализуют сценарий управленческого контроля производительности сотрудников, что в силу закона Гудхарта приводит к деградации собираемых показателей и сопротивлению команд. Предложена архитектура информационной системы, в которой защита приватности участников и противодействие закону Гудхарта являются не дополнительной функцией, а условием реализации программного интерфейса: ролевая сегрегация видимости данных реализована на уровне REST API по принципу защиты в глубину и возвращает отказ доступа на уровне сервиса, а не маскирует данные в пользовательском интерфейсе. В качестве методологической основы использованы исследовательская модель DORA в актуальной пятиметричной редакции и фреймворк SPACE как принцип многомерности диагностики. Описаны состав измеряемых метрик и алгоритмы их расчета на основе инкрементально собираемых данных GitLab: время прохождения изменений, частота развертываний, доля неудачных изменений, декомпозированное время жизни запроса на слияние, распределение размеров запросов на слияние и показатель устойчивости команды Bus Factor по модулям кодовой базы. Реализован минимально жизнеспособный продукт системы с тремя ролевыми дашбордами, парной визуализацией показателей скорости и качества, прозрачностью алгоритмов расчета, экспортом отчетов и развертыванием средствами docker-compose, пригодным для сценариев локализации обрабатываемых данных. Результаты применимы для диагностики процессов разработки в командах, использующих GitLab.

*Ключевые слова:* диагностика процессов разработки программного обеспечения, метрики DORA, фреймворк SPACE, закон Гудхарта, анализ данных Git-репозиториев, система контроля версий, ролевое разграничение доступа, парная визуализация показателей, приватность данных, bus factor, REST API.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

*Для цитирования:* Яцук С. Н., Еловой С. Г. Информационная система диагностики процессов разработки программного обеспечения на основе метрик DORA и SPACE с архитектурной сегрегацией видимости данных. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):50–55.

*Поступила в редакцию: 20.07.2026.* *В окончательном варианте: 21.09.2026.*

# INFORMATION SYSTEM FOR SOFTWARE DEVELOPMENT PROCESS ANALYSIS USING DORA AND SPACE METRICS

**S. N. Yatsuk**[1,a], **S. G. Elovoi**[1,2,b]

[1] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[2] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation*

[a] ORCID: https://orcid.org/0009-0002-8257-1132, ✍ yatsuk_sn@edu.surgu.ru
[b] ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1860-9303, s.elovoy@yandex.ru

*Abstract:* we developed an information system for automated diagnostics of software development processes based on version-control data. We analyzed limitations of existing engineering analytics tools, which often focus on managerial monitoring of individual performance and may create incentives to optimize measured indicators rather than underlying processes, consistent with Goodhart's law. We designed an architecture in which privacy protection and resistance to such metric-driven behavior are treated as requirements of the application programming interface rather than as user-interface features. Role-based access to data is enforced at the REST API level according to the defense-in-depth principle, with unauthorized requests rejected at the service layer rather than hidden only in the user interface. The methodological framework combines the five-metric DORA model with the SPACE framework for multidimensional assessment. We defined algorithms for computing lead time for changes, deployment frequency, change failure rate, decomposed merge-request cycle time, merge-request size distribution, and the Bus Factor for code modules from incrementally collected GitLab data. We implemented a minimum viable product with three role-based dashboards, paired visualization of speed and quality metrics, transparent calculation algorithms, report export, and Docker Compose deployment suitable for data-localization requirements. The system can be used to diagnose software development processes in teams working with GitLab.

*Keywords:* software development diagnostics, DORA metrics, SPACE framework, Goodhart's law, Git repository data analysis, version management system, role-based access control, paired metric visualization, data privacy, bus factor, REST API.

*Acknowledgements:* this study is a part of the government contract No. FNEF-2024-0001 Development and Implementation of Trusted AI Systems Using New Mathematical and Algorithmic Methods; Fast Computing Models on Domestic Hardware awarded to the Kurchatov Institute (1023032100070-3-1.2.1).

*Cite this article:* Yatsuk S. N., Elovoi S. G. Information System for Software Development Process Analysis Using DORA and SPACE Metrics. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):50–55.

*Original article submitted: 20.07.2026.* *Revision submitted: 21.09.2026.*

**Введение**

Сложность программных проектов растет, команды работают распределенно, а требования к скорости поставки повышаются. Управлять инженерным процессом по субъективным оценкам уже недостаточно: организация, которая не видит картины своей разработки, медленнее реагирует на изменения и накапливает скрытые риски: перегрузку участников, деградацию кода, концентрацию знаний на отдельных разработчиках.

Ответом стали модели измерения процессов разработки. Программа DORA выявила системные метрики, которые коррелируют с производительностью команд и их операционной устойчивостью [1]. Актуальная редакция включает пять показателей в группах пропускной способности и нестабильности. Фреймворк SPACE дополняет DORA принципом многомерности: он требует учитывать сразу несколько граней продуктивности и предостерегает от метрик активности в отрыве от метрик результата [2].

Коммерческие платформы позиционируются как средства управленческого контроля производительности сотрудников, что противоречит закону Гудхарта: показатель, который стал целью оценки, перестает быть достоверной мерой [3]. Такие метрики искажаются в ущерб работе и вызывают сопротивление команд. Решения с открытым кодом ограничиваются статистикой коммитов и не дают ценности уровня DORA. Системы к тому же ориентированы на зарубежные облачные хостинги, тогда как многие отечественные организации работают в GitLab и требуют локализации данных. Ранее мы предложили платформу GITALPHA для оценки эффективности разработки [4]; настоящая работа развивает подход и смещает акцент с оценки сотрудников на диагностику процессов.

Цель работы — спроектировать и реализовать информационную систему диагностики процессов разработки ПО, которая инкрементально собирает данные из репозиториев GitLab, рассчитывает метрики DORA и SPACE, визуализирует и выгружает их при ролевом разграничении

доступа. Объект исследования — процессы разработки в распределенных командах; предмет — методы и средства их автоматизированной диагностики. Новизна состоит в архитектуре, где защита приватности участников и противодействие закону Гудхарта выступают условием реализации REST API.

**Методологическая основа диагностики**

Методологическую основу составляют три положения. Первое — модель DORA в пятиметричной редакции. Группа Throughput включает время прохождения изменений, частоту развертываний и время восстановления после неудачного развертывания; группа Instability — долю неудачных изменений и долю переделок. Ключевой вывод DORA: скорость и стабильность поставки не исключают друг друга и команды-лидеры показывают высокие значения по всем метрикам [1]. Это обосновывает парное представление показателей.

Второе — фреймворк SPACE, который рассматривает продуктивность как многомерную величину. Пять измерений модели — Satisfaction, Performance, Activity, Communication, Efficiency — задают рамку, где ни одна грань не должна доминировать. Метрики активности собираются проще прочих и потому опасны в отрыве от остальных граней [2].

Третье — закон Гудхарта как ограничитель. В формулировке М. Стратерн: когда мера становится целью, она перестает быть хорошей мерой [3]. Метрика, которая превращена в инструмент индивидуальной оценки, деформирует поведение: счетчик коммитов ведет к инфляции мелких коммитов, а премия за число строк наказывает за рефакторинг. Противодействовать этому нужно на уровне архитектуры, а не рекомендаций.

**Состав измеряемых метрик и алгоритмы расчета**

Реализованы шесть метрик трех уровней: поток поставки, код-ревью и устойчивость команды. Все они трактуются как характеристики процесса, а не сотрудника, и считаются на уровне команды; исключение — личный кабинет разработчика.

Метрики потока поставки взяты из DORA. Время прохождения изменений — интервал между первым коммитом по задаче и успешным развертыванием изменения:

$$= t_{deploy} - t_{commit}, \tag{1}$$

где $t_{deploy}$ — момент развертывания, $t_{commit}$ — момент первого коммита. Развертывания определяются по тегам репозитория; чтобы результат был устойчив к выбросам, отображаются медиана и 90-й перцентиль. Частота развертываний — число успешных развертываний за единицу времени:

$$DF = N_{deploy}/T, \tag{2}$$

где $N_{deploy}$— число успешных развертываний за период, $T$ — длительность периода. Доля неудачных изменений — парная метрика — отношение числа развертываний с откатом или экстренным исправлением к общему их числу:

$$CFR = \frac{N_{fail}}{N_{deploy}} \cdot 100\%, \tag{3}$$

где $N_{fail}$ — число развертываний, которые помечены как неудачные по меткам вошедших в релиз запросов на слияние.

Метрики код-ревью извлекаются из данных GitLab и не требуют интеграции со средствами непрерывной интеграции. Код-ревью чаще всего становится зоной деградации процесса и одновременно распространяет знания и контролирует качество [5, 6]. Время жизни запроса на слияние разбивается на три фазы и полный цикл:

$$\Delta_1 = t_{fr} - t_{open}, \tag{4}$$

$$\Delta_2 = t_{ap} - t_{fr}, \tag{5}$$

$$\Delta_3 = t_{mg} - t_{ap}, \tag{6}$$

$$\Delta = t_{mg} - t_{open}, \tag{7}$$

где $t_{open}$ — момент открытия запроса, $t_{fr}$ — первый комментарий ревьюера, $t_{ap}$ — согласование, $t_{mg}$ — слияние. Декомпозиция позволяет найти узкое место процесса; черновые запросы из выборки исключаются. Размеры запросов распределяются по бакетам числа измененных строк {≤50, 51–200, 201–400, 401–800, >800}: крупные запросы просматриваются формально, что обесценивает проверку [7]. Доля возвратов и откатов служит парным индикатором качества ревью [8].

Метрики устойчивости выявляют риски, которые не видны в текущей работе. Реализован Bus Factor по модулям: для каждого модуля, который задается шаблоном пути к файлам, подсчитывается число активных контрибьюторов за 90 суток:

$$BF\,(m) = A_m\vee, \tag{8}$$

где $A_m$ — множество активных контрибьюторов модуля m за окно наблюдения. Модуль с единственным контрибьютором считается риском концентрации знаний [9, 10].

Соответствие метрик граням SPACE приведено в таблице 1, доминирующей грани нет. Грань Satisfaction требует опросов и остается вне автоматического сбора.

*Таблица 1*

*Соответствие метрик системы граням модели SPACE*

| **Грань SPACE** | **Метрики системы** | **Способ покрытия** |
|---|---|---|
| S – Satisfaction | – | Вне автоматического сбора (опросы) |
| P – Performance | Change Failure Rate; Reopen / Revert Rate | Качество результата работы |
| A – Activity | MR Size; Deployment Frequency | Объем действий в паре с качеством |
| C – Communication | Review Coverage; Knowledge Sharing Index; Bus Factor | Паттерны взаимодействия и обмена знаниями |
| E – Efficiency / Flow | Lead Time; Cycle Time MR; Failed Deployment Recovery Time | Эффективность сквозного процесса |

**Архитектура сегрегации видимости данных**

Центральное проектное решение — архитектурная сегрегация видимости данных, которая делает доступ руководства к индивидуальным показателям участников технически невозможным. Это не настройка прав, а встроенное свойство программного интерфейса.

Ролевая модель построена на двух независимых осях. Глобальная роль пользователя определяет класс доступных операций, роль в команде — отношение пользователя к конкретной команде. Пользователь может иметь глобальную роль лида, но не быть лидом конкретной команды, и тогда он не получит ее данных.

Разграничение построено по принципу защиты в глубину и состоит из двух ступеней. Первая — промежуточное ПО уровня маршрута, которое фильтрует глобальную роль: командные агрегаты доступны участникам команды, лиду и руководителю отдела; метрики код-ревью — только лиду; метрики DORA и Bus Factor — лиду и руководителю отдела. Вторая — проверка области видимости на уровне сервиса: она устанавливает принадлежность пользователя к команде и отказывает в доступе к данным вне его зоны видимости.

Матрица допустимых сочетаний роли и метрики вынесена в единый источник истины: сервис формирует общий набор метрик команды и обнуляет недоступные роли показатели, поэтому клиент отличает отсутствие доступа от отсутствия данных; тот же механизм действует при экспорте.

Сегрегация образует три уровня видимости (таблица 2). Разработчик видит показатели своей работы и обезличенный командный ориентир; тимлид — командные агрегаты, но не значения участников; руководитель отдела — кросс-командные метрики DORA.

Архитектуру дополняют два принципа интерфейса. Парная визуализация означает, что метрика скорости всегда показывается вместе с метрикой качества: частота развертываний —

*Таблица 2*

*Ролевая модель видимости данных*

| **Роль** | **Доступно** | **Недоступно** |
|---|---|---|
| Разработчик | Полные индивидуальные метрики; командный baseline; история своих показателей | Индивидуальные метрики других участников |
| Тимлид | Командные агрегаты; Cycle Time MR с декомпозицией; MR Size; Bus Factor; сигналы аномалий без раскрытия значений | Конкретные индивидуальные значения участников |
| Руководитель отдела | Кросс-командные метрики DORA; сравнительная динамика команд | Любые индивидуальные данные; данные глубже уровня команды |

рядом с долей неудачных изменений, время жизни запроса — рядом с распределением размеров. Это мешает оптимизировать одну ось в ущерб другой. Прозрачность алгоритмов означает, что формула расчета и источники данных каждой метрики доступны прямо в интерфейсе, что снижает барьер доверия команд.

**Сбор и обработка данных, реализация системы**

Система состоит из серверного и клиентского приложений, которые взаимодействуют по REST. Сервер написан на Node.js со сквозной статической типизацией; хранилищем служит PostgreSQL: предметная модель сильно связна, а расчет времени прохождения изменений требует оконного сопоставления запросов на слияние с развертываниями. Клиент — одностраничное веб-приложение.

Сбор данных организован как периодический инкрементальный процесс (рис. 1). Авторизация в GitLab выполняется по персональному токену: он шифруется алгоритмом AES-256-GCM и расшифровывается только в момент обращения к платформе. Планировщик обходит подключенные проекты и для каждого выгружает коммиты, запросы на слияние с их ревью и теги релизов, после чего связывает развертывания с вошедшими в них запросами. Вставки идемпотентны: повторный запуск не порождает дубликатов, а прерванный процесс продолжается с закладки. Рассчитанные значения материализуются в снапшоты, что разгружает дашборды.

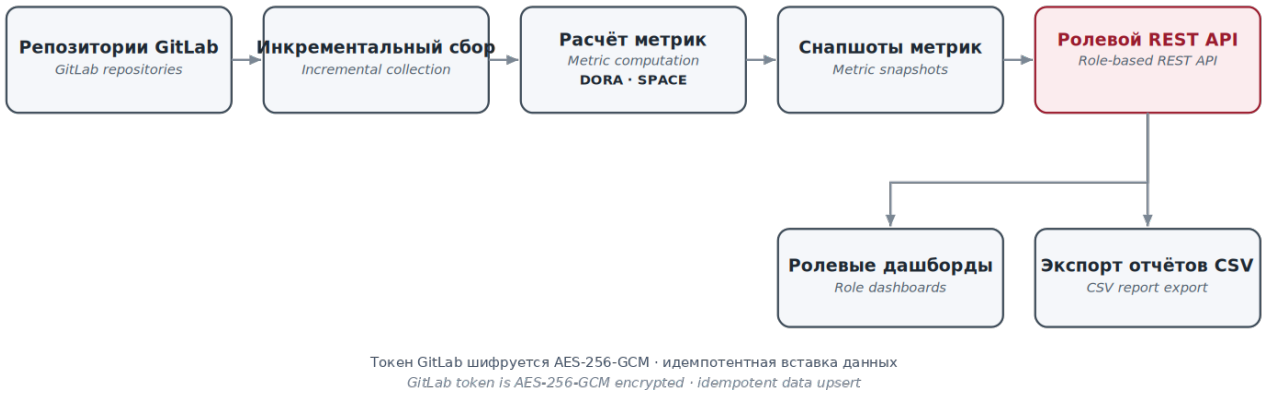



**Рис. 1.** *Конвейер инкрементального сбора и обработки данных системы*

Расчетная часть построена по шаблону «стратегия»: введены абстрактный калькулятор метрики и набор конкретных калькуляторов, которые реализованы как чистые функции над выборкой из базы данных и потому просто тестируются. Модуль экспорта формирует отчеты в формате CSV и переиспользует те же функции расчета, что и интерфейс. Сервер, СУБД и клиент разворачиваются средствами docker-compose, что позволяет ввести систему в эксплуатацию в инфраструктуре заказчика.

**Результаты и обсуждение**

Результат работы — реализованный минимально жизнеспособный продукт. Он обеспечивает подключение к инстансу GitLab; инкрементальный сбор данных о коммитах, запросах на

слияние, ревью и релизах; расчет шести метрик; три ролевых дашборда; ролевое разграничение доступа на уровне REST API; экспорт отчетов в формате CSV; развертывание средствами docker-compose.

От коммерческих платформ система отличается архитектурным характером защиты приватности: ролевая сегрегация видимости реализована на уровне программного интерфейса, а не в настройках. Это снимает целый класс угроз: команды доверяют системе добровольно лишь тогда, когда ее нельзя применить как инструмент индивидуального контроля. В нашей предыдущей работе [4] платформа GITALPHA оценивала эффективность разработки; здесь предметом измерения выступает процесс, а не сотрудник [11].

Границы продукта заданы сознательно. Метрики Failed Deployment Recovery Time и Deployment Rework Rate требуют интеграции с системами мониторинга и отнесены к направлениям развития; показатели Workload Distribution и Knowledge Sharing Index, а также сигналы аномалий рассматриваются как расширение. Поддержку других хостингов даст абстрактный коннектор источников данных.

**Заключение**

Предложена и реализована информационная система диагностики процессов разработки ПО по данным Git-репозиториев. Методологическую основу составили модель DORA в пятиметричной редакции, фреймворк SPACE и закон Гудхарта. Основной результат — архитектура, где защита приватности участников и противодействие закону Гудхарта выступают не дополнительной функцией, а условием реализации программного интерфейса: ролевая сегрегация видимости обеспечивается на уровне REST API и дополняется парной визуализацией скорости и качества. Система применима в командах, которые используют GitLab, в том числе при локальном развертывании. Развитие связано с расширением состава метрик и поддержкой других источников данных.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Forsgren N., Kersten M. DevOps Metrics. *Communications of the ACM*. 2018;61(4):44–48. DOI: 10.1145/3159169.
2. Forsgren N., Storey M.-A., Maddila C., Zimmermann T., Houck B., Butler J. The SPACE of Developer Productivity: There's More to It than You Think. *ACM Queue*. 2021;19(1):20–48. DOI: 10.1145/3454122.3454124.
3. Strathern M. 'Improving Ratings': Audit in the British University System. *European Review*. 1997;5(3):305–321.
4. Яцук С. Н., Еловой С. Г. Аналитическая платформа для оценки эффективности разработки GITALPHA. *Труды НИИСИ РАН*. 2026;16(1):49–52.
5. Bacchelli A., Bird C. Expectations, Outcomes, and Challenges of Modern Code Review. *Proc. 35th Int. Conf. on Software Engineering (ICSE)*. 2013:712–721. DOI: 10.1109/ICSE.2013.6606617.
6. McIntosh S., Kamei Y., Adams B., Hassan A. E. An Empirical Study of the Impact of Modern Code Review Practices on Software Quality. *Empirical Software Engineering*. 2016;21(5):2146–2189.
7. Gousios G., Pinzger M., van Deursen A. An Exploratory Study of the Pull-Based Software Development Model. *Proc. 36th Int. Conf. on Software Engineering (ICSE 2014)*. 2014:345–355.
8. Beller M., Bacchelli A., Zaidman A., Juergens E. Modern Code Reviews in Open-Source Projects: Which Problems Do They Fix? *Proc. 11th Working Conf. on Mining Software Repositories (MSR)*. 2014:202–211.
9. Avelino G., Passos L., Hora A., Valente M. T. A Novel Approach for Estimating Truck Factors. *Proc. 24th IEEE Int. Conf. on Program Comprehension (ICPC)*. 2016:1–10.
10. Jabrayilzade E., Evtikhiev M., Tüzün E., Kovalenko V. Bus Factor in Practice. *Proc. 44th Int. Conf. on Software Engineering: Software Engineering in Practice (ICSE-SEIP)*. 2022:97–106.
11. Rigby P. C., Bird C. Convergent Contemporary Software Peer Review Practices. *Proc. 2013 9th Joint Meeting on Foundations of Software Engineering (ESEC/FSE)*. 2013:202–212.

# ПРОБЛЕМА РЕАЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА В БИОМЕХАНИКЕ

**В. В. Полухин**[1,а], **М. А. Попова**[2,б], **С. А. Третьяков**[3,в], **М. А. Филатов**[1,г]

[1] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Сургутский государственный педагогический университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[3] *Тюменский государственный медицинский университет Министерства здравоохранения РФ, г. Тюмень, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5690-1586, polukhin_1959@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0193-7973, mpopova@surgpu.ru*

[в] *ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9427-6871, tretsa@rambler.ru*

[г] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5784-2888,* ✍ *filatovmik@yandex.ru*

*Аннотация*: в конце 20-го века нобелевский лауреат I. R. Prigogine выпустил свою последнюю монографию (создавалась 20 лет), в которой он доказывал невозможность использования теории динамических систем (и всего детерминизма) в изучении биосистем. При этом I. R. Prigogine (как и M. Gell-Mann, и R. Penrose) допускал реальность динамического хаоса Лоренца в описании биологических систем. Все эти нобелевские лауреаты верили в реальность динамического хаоса при описании биосистем, и это было большой ошибкой. Настоящее исследование доказывает отсутствие такого хаоса в организации движений. Рассматриваются основные критерии хаоса Лоренца и показывается их невыполнение в организации постурального движения (непроизвольные движения человека). Одновременно доказывается гипотеза Бернштейна о повторении без повторений в биомеханике. Именно Бернштейн первый открыл дискуссию в 1947 году о проблеме неповторимости в организации любых движений, но его игнорировали более 50-ти лет.

*Ключевые слова:* хаос, детерминизм, эффект Еськова–Зинченко.

*Для цитирования:* Полухин В. В., Попова М. А., Третьяков С. А., Филатов М. А. Проблема реальности динамического хаоса в биомеханике. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):56–63.

*Поступила в редакцию: 19.01.2026.* *В окончательном варианте: 17.02.2026.*

# REALITY OF DYNAMIC CHAOS IN BIOMECHANICS

**V. V. Poluhin**[1,a], **M. A. Popova**[2,b], **S. A. Tretyakov**[3,c], **M. A. Filatov**[1,d]

[1] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[2] *Surgut State Pedagogical University, Surgut, Russian Federation*

[3] *Tyumen State Medical University, Russian Ministry of Health, Tyumen, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5690-1586, polukhin_1959@mail.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0193-7973, mpopova@surgpu.ru*

[c] *ORCID: https://orcid.org/0009-0008-9427-6871, tretsa@rambler.ru*

[d] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5784-2888,* ✍ *filatovmik@yandex.ru*

*Abstract:* in the late 20th century, Nobel laureate I. R. Prigogine published his final monograph, the result of two decades of work, in which he argued that dynamical systems theory and determinism cannot be applied to the study of biological systems. At the same time, Prigogine, as well as M. Gell-Mann and R. Penrose, accepted the existence of deterministic Lorenz chaos as a mechanism underlying biological processes. We show that this assumption is incorrect for the organization of human movement. We examined the principal criteria of Lorenz chaos and demonstrated that they are not satisfied in postural movements, i.e., involuntary human movements. At the same time, our results support N. A. Bernstein's principle of "repetition without repetition" in biomechanics. Bernstein first raised the problem of movement uniqueness in 1947, but this line of research received little attention for more than five decades.

*Keywords:* chaos, determinism, Eskov–Zinchenko effect.

*Cite this article:* Poluhin V. V., Popova M. A., Tretyakov S. A., Filatov M. A. Reality of Dynamic Chaos in Biomechanics. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):56–63.

*Original article submitted: 19.01.2026.* *Revision submitted: 17.02.2026.*

**Введение**

Более четверти века прошло с момента выхода последней монографии нобелевского лауреата I. R. Prigogine («The End of Certainty...»), но почти нет реакции на его отказ применять детерминизм (теорию динамических систем — ТДС) в описании живых систем [1]. Эту книгу просто игнорируют более 25-ти лет, но Prigogine был прав в отношении ТДС и ее применения в биомеханике и во всей биологии. Точное описание биосистем невозможно в принципе (ТДС не работает).

Одновременно продолжается игнорирование монографии выдающегося биомеханика 20-го века Н. А. Бернштейна [2]. В ней он выдвинул гипотезу о «повторении без повторений». Более того, Бернштейн качественно доказал эту гипотезу [2]. Однако все аргументы Николая Александровича упорно игнорируются вот уже более 75-ти лет. Сейчас уже можно говорить о догматизме в науке, т.к. его гипотезу можно легко проверить экспериментально, но этого никто не делает. Речь идет об отрицании научных фактов.

Он доказал реальность пяти разных систем в организации (построении) любого движения. Он говорил, что существуют 5 разных систем (системы A, B, C, D, E) и эти системы хаотичным образом включаются (и выключаются) в работу нервно-мышечной системы. Сила и длительность такого включения (их вовлечения) хаотичны, их невозможно прогнозировать, а, значит, и любое движение будет «без повторений». О каких неповторениях следует говорить, Бернштейн тогда не сказал, но проблема осталась нерешенной.

Через год другой выдающийся ученый — W. Weaver (один из основателей теории информации) в своей выдающейся статье (“Science and Complexity” [3]) открыто предложил вывести все биосистемы за пределы современной детерминистской и стохастической науки (ДСН). Он предлагал создать новую (после ДСН) науку. Weaver говорил о возможности создания новой науки для описания систем третьего типа (СТТ) — биосистем. При этом он дал прогноз (через 50 лет) о построении этой новой науки [3].

На эту работу, как и на публикации Н. А. Бернштейна и I. R. Prigogine, тоже никто не обратил внимания. Работы этих выдающихся ученых остались без должного внимания, и это нам внушает тревогу и серьезные опасения за всю науку. Сейчас уже можно говорить о догматизме в науке по отношению к изучению биосистем (СТТ) [5–11].

**Современные проблемы биомеханики**

В биомеханике, как и во всей современной науке, не ставят под сомнение возможность редукции биосистем к задачам и моделям современной физики и математики. Однако уже в конце 20-го века нобелевский лауреат В. Л. Гинзбург высказал сомнение в таком редукционизме [4]. Фактически он поддержал гипотезы W. Weaver об СТТ [4–11].

В своей замечательной обзорной работе он прямо говорил: «можно ли считать, что возможность редукции биологии и современной физики несомненна? ... дать положительный ответ было бы, как мне кажется, неправильно. Пока дело не сделано, нельзя исключать возможность того, что мы даже на фундаментальном уровне еще не знаем чего-то необходимого для редукции» [4].

Гинзбург верил, что в ближайшие 10 лет в науках о жизни (и в биомеханике, в частности) произойдут великие перемены. Он писал: «Об этом будущем нельзя не думать с завистью — сколь много важного и интересного мы узнаем даже в ближайшие десять лет» [4]. Именно это и произошло после открытия эффекта Еськова–Зинченко (ЭЕЗ) во всех науках о жизни [5–11].

Прошло уже четверть века с момента этой публикации [4], но работы Н. А. Бернштейна, W. Weaver, I. R. Prigogine продолжают игнорироваться. Никто (кроме нас) даже не пытался проверить статистическую устойчивость любых выборок треморограмм (ТМГ) и теппинграмм (ТПГ) в биомеханике. Все верили догме: любая выборка репрезентабельна, она описывает будущее состояние СТТ (это была великая ошибка всей детерминистской и стохастической науки).

Подчеркнем, что речь идет о непроизвольных движениях — ТМГ (постуральный тремор) и о произвольных движениях: равномерных колебательных движениях пальца испытуемого (по вертикали) — ТПГ. Оба эти движения могут быть проверены на предмет «повторений без повторений», но ни Бернштейн, ни кто-либо другой этого не сделали за последние 50 лет.

Достаточно было у одного (любого) человека зарегистрировать подряд 15 выборок ТМГ (сидя, в покое, за 5 секунд) и затем их сравнить между собой. В итоге можно было бы сразу

получить эффект Еськова–Зинченко. Это означает, что любая выборка ТМГ уникальна. Она статистически неповторима, вероятность совпадения любых ($i$-й и $j$-й) выборок ничтожна (обычно $p_{ij} < 0{,}05$). Напомним, что в статистике требуют $p \geq 0{,}95$. У нас наблюдается обратная ситуация: совпадают ТМГ с вероятностью $p \leq 0{,}05$.

Не совпадают не только две (соседние) выборки ТМГ, но и две любые выборки из всех 15-ти зарегистрированных (подряд) выборок у одного испытуемого (сидя, в покое). Для этого мы строили матрицы парных сравнений всех 15-ти выборок. Сейчас их построено несколько тысяч.

Для примера мы представляем одну (типичную) из сотен, которые мы регистрировали для одного и того же испытуемого. В табл. 1 мы представляем матрицу парных сравнений 15-ти выборок ТМГ.

*Таблица 1*

*Матрица парного сравнения выборок треморограмм одного испытуемого (число повторов N=15), использовался критерий Вилкоксона (уровень значимости p<0.05, число совпадений k=3)*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 2 | .00 | | **.16** | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .01 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 3 | .00 | .16 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 4 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 5 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 6 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | **.29** | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 7 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .29 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 8 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 9 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 10 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 11 | .00 | .01 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | **.24** | .00 | .00 |
| 12 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 |
| 13 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .24 | .00 | | .00 | .00 |
| 14 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .03 |
| 15 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .03 | |

Напомним: если критерий Вилкоксона $p_{ij} \geq 0{,}05$, то такая пара выборок ТМГ может иметь одну генеральную совокупность. Это говорит о возможности статистического совпадения выборок ТМГ для одного испытуемого. Обычно в таких таблицах (как табл. 1) число $k$ пар, для которых $p_{ij} \geq 0{,}05$, невелико (обычно $k \leq 5\%$). Это говорит об уникальности выборок ТМГ. Биомедицина не имеет прогнозов [11–15].

Подчеркнем, что именно отсутствие статистической устойчивости выборок ТМГ и ТПГ и составило основу ЭЕЗ. Это оговорит об уникальности любой выборки в биомеханике. В итоге статистика в биомеханике не может дать прогноз для биосистемы. Без прогноза будущего нет науки, мы будем иметь калейдоскоп меняющихся (хаотически) событий. Теряется научность любых знаний о живых системах.

Это 1-я проблема биомеханики (и всех наук о жизни), но имеется и 2-я фундаментальная проблема. Фактически она является следствием ЭЕЗ, но она имеет и свою специфику. Она связана с однородностью групп. Напомним, что сейчас в биологии, медицине, психологии и т.д. обычно не проверяют однородность групп. Это нарушение законов статистики!

В статистике имеется строгий критерий проверки такой однородности. Для этого надо получить выборку для одного испытуемого из группы и затем проверить все выборки остальных испытуемых на наличие общей генеральной совокупности. Все испытуемые из одной (якобы однородной) группы должны удовлетворять этому правилу, т.е. иметь общую генеральную совокупность.

Двадцать лет назад мы начали это проверять сначала для ТМГ и ТПГ, а затем и для

других параметров функций организма человека. Учитывая ЭЕЗ, мы показали, что выборки не будут совпадать, и это было доказано нами экспериментально [11–15].

Оказалось, что для якобы однородной группы испытуемых (это люди одного пола, возраста, здоровья и т.д.) выборки параметров ТМГ и ТПГ не могут иметь одну генеральную совокупность. Каждый человек имеет свою (особую) генеральную совокупность. Для примера мы представляем такую матрицу парных сравнений выборок 15-ти (разных) испытуемых, где отсутствуют общие генеральные совокупности.

*Таблица 2*

*Матрица парного сравнения выборок тремограмм группы испытуемых (N=15), использовался критерий Краскела–Уоллеса (уровень значимости p<0.05, число совпадений k=10)*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 2 | .00 | | .00 | .00 | .00 | **.58** | .00 | **.33** | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 3 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .01 | .00 | .00 | .00 | .00 | **.79** | .00 | **.17** | .00 |
| 4 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | **.51** | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 5 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 6 | .00 | .58 | .00 | .00 | .00 | | .00 | **.81** | .00 | .00 | .02 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 7 | .00 | .00 | .01 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | **.98** | .00 | **.25** | .00 |
| 8 | .00 | .33 | .00 | .00 | .00 | .81 | .00 | | .00 | .00 | .04 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 9 | .00 | .00 | .00 | .51 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 10 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 11 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .02 | .00 | .04 | .00 | .00 | | .00 | .00 | .00 | .00 |
| 12 | .00 | .00 | .79 | .00 | .00 | .00 | .98 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | **.78** | .00 |
| 13 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | | .00 | **.48** |
| 14 | .00 | .00 | .17 | .00 | .00 | .00 | .25 | .00 | .00 | .00 | .00 | .78 | .00 | | .00 |
| 15 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .00 | .48 | .00 | |

В табл. 2 мы имеем критерий Краскела–Уоллеса (или любые другие критерии) для 15-ти испытуемых, которые (якобы) образуют однородную группу. Мы рассчитали сотни таких таблиц для якобы однородных групп, и везде результат был одинаков (см. табл. 2). Оказалось, что закономерно почти все испытуемые имеют свою (особую) генеральную совокупность.

В табл. 2 и сотнях подобных матриц мы имеем малое $k_2$ пар выборок, для которых критерий Краскела–Уоллеса $p_{ij} \geq 0{,}05$, это весьма необычно. Обычно $k_2 \leq 5\%$ из всех 105-ти разных пар сравнения выборок ТМГ для 15-ти разных испытуемых. Это доказывает, что данная группа (и тысячи других) не может быть однородной. Это серьезная проблема для биомеханики и для всей современной науки (ДСН) [11–15].

В целом, в биомеханике (после доказательства ЭЕЗ) возникли две фундаментальные проблемы (о них пытался сказать Гинзбург [4]): любая выборка одного человека уникальна и любая группа испытуемых не может быть однородной. Все это связано с отсутствием статистической устойчивости выборок любых параметров функций организма человека. Все это составляет основу ЭЕЗ и завершает ДСН [5–15].

Очевидно, что современная наука не может работать с артефактами, т.е. процессами, которые невозможно статистически повторить. Однако это не динамический хаос Лоренца, это статистический хаос (неустойчивости выборок). С такими процессами ДСН не работает.

Возникновение таких эффектов приводит к необходимости создания новой науки и новых моделей для описания статистически неустойчивых биосистем. Отметим, что речь идет не только о статистических функциях распределения *F(x)*, которые для СТТ невозможно повторить. Проблема гораздо шире [5–11].

Аналогичной уникальностью обладают автокорреляции *A(t)* и спектральные плотности сигналов (СПС). Все эти величины (*F(x)*, *A(t)*, СПС и т.д.) демонстрируют уникальность, непо-

вторимую от выборки к выборке. Мы имеем новые (неповторимые) статистические функции распределения *F(x)*, СПС и *A(t)*. Мы это проверили на тысячах выборок в режиме кратных повторений для одного и того же испытуемого. Таких испытуемых было сотни и тысячи, по разным параметрам организма (не только для ТМГ и ТПГ) [5–15].

Подводя итог всему сказанному в этом разделе, отметим, что в биомеханике на сегодня возникли две фундаментальные проблемы. Эти проблемы не могут быть решены в рамках современной науки (ДСН). Ни ТДС, ни стохастика не могут описывать и тем более прогнозировать статистически неустойчивые выборки любых параметров функций организма человека. Это составляет основу ЭЕЗ во всех науках о жизни (биологии, медицине, психологии и т.д.) [5–15].

Однако, как указывалось выше, ряд нобелевских лауреатов (I. R. Prigogine, M. Gell-Mann, R. Penrose) высказывали уверенность в перспективах исследования динамического хаоса (ДХ) Лоренца в изучении и описании биосистем (СТТ по Weaver). Это было тоже ошибкой, как и применение ДСН. Рассмотрим более детально этот последний тезис.

**Проблема динамического хаоса в биомеханике**

Прежде чем представить доказательство ошибочности надежд нобелевских лауреатов на ДХ в описании биосистем, следует напомнить критерии динамического хаоса. Общеизвестно, что ключевым моментом в идентификации ДХ является фундаментальное условие: задание начальных параметров вектора состояния системы $\mathrm{x} = \mathrm{x}\,(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}_1,\, \mathrm{x}_2,\, \ldots,\, \mathrm{x}_\mathrm{m})^\mathrm{T}$ в $m$-мерном фазовом пространстве состояний (ФПС) не определяет дальнейшее развитие фазовой траектории (ФТ) в ФПС и конечное состояние изучаемой системы $\mathrm{x}(\mathrm{t_f})$. Речь идет о полной неопределенности будущего состояния исследуемой системы (прошлое не определяет будущее).

ДХ — это почти индетерминизм: прошлое полностью не определяет будущее для исследуемой системы, находящейся в ДХ. Для идентификации такого состояния (ДХ) были разработаны (в рамках ТДС) определенные критерии. Главный из них — расчет старших показателей Ляпунова (СПЛ) $\lambda_i^*$. Подчеркнем, в ДХ имеются дифференциальные уравнения (ДУ), которые описывают исследуемую систему.

Если эти старшие показатели $\lambda_i^*$ будут положительными, то ближайшие ФТ (две соседние) будут экспоненциально расходиться. В итоге мы получим странный аттрактор (СА). В этом СА обычно (но не всегда) можно зарегистрировать равномерные распределения для конечных состояний $\mathrm{x}(\mathrm{t_f})$. Это второй критерий ДХ.

Последнее означает, что внутри СА мы будем иметь инвариантность мер, т.е. одинаковые плотности распределения точек $\mathrm{x}(\mathrm{t_f})$, которые представляют конечные состояния ФТ внутри этого СА. В итоге инвариантность мер и положительные старшие показатели Ляпунова могут представить ДХ в СА. Это базовые критерии ДХ на основе известных ДУ.

В любом случае будущее для ДХ невозможно описать. Невозможно спрогнозировать конечное состояние процесса $\mathrm{x}(\mathrm{t_f})$. При этом можно найти СА с его особыми свойствами. На сегодня существуют алгоритмы нахождения старших показателей Ляпунова $\lambda_i^*$ по исходным выборкам исходных состояний $\mathrm{x}(\mathrm{t_f})$.

Один из таких алгоритмов и применяется в наших исследованиях. Отметим, что еще имеется и некий третий метод нахождения ДХ. Однако он не всегда подтверждается в СА для ДХ. Этот метод основан на расчете автокорреляционных функций *A(t)*. Эти *A(t)* должны стремиться к нулю при росте времени *t*.

Отметим, что в наших работах мы исследовали все три подхода: расчет $\lambda_i^*$, расчет *A(t)* и проверка на наличие инвариантности мер внутри полученных выборок конечных состояний *x(t)*. Следует отметить, что столетия считалось, что полученные треморограммы должны описываться статистикой. Это касается любых видов движения в биомеханике [11–15].

Поскольку мы выше представили ЭЕЗ, то в этом эффекте никогда не будет инвариантности мер и нет стремления автокорреляционных функций *A(t)* к нулю. Это мы проверили на тысячах ТМГ и ТПГ. Иными словами, эти два критерия не выполняются в биомеханике, и это составляет основу ЭЕЗ. Подчеркнем еще раз: два базовых критерия ДХ не имеют место в ЭЕЗ для биомеханики.

Постуральный тремор (ТМГ) непрерывно генерирует разные статистические функции распределения *F(x)*. Мода, медиана непрерывно и хаотически изменяются. Любая выборка уникаль-

на. Расчет старших показателей Ляпунова $\lambda_i^*$ показал, что их знак (и величина) от выборки к выборке непрерывно изменяются. Однако последнее потребовало от нас дополнительных исследований. ЭЕЗ доказывает непрерывные изменения выборок ТМГ, нет прогноза будущего.

Эти изменения имеют хаотический характер, а наборы $\lambda_i^*$ (при многих повторных измерениях) тоже дают нам статистическую неустойчивость, т.е. ЭЕЗ. Для примера мы представляем расчет $\lambda_i^*$ для разных наборов ТМГ (для одного и того же испытуемого). Рис. 1 показывает, как изменяется $\lambda_i^*$ для одной и той же выборки по мере увеличения в ней числа точек измерений.




**Рис. 1.** *График значений старшего показателя Ляпунова для участков трeморограммы одного человека*

Оказывается, что если любую выборку ТМГ разбить на множество участков, то для каждого участка ТМГ для одного испытуемого мы будем иметь разные (по знаку и величине) значения $\lambda_i^*$. Для примера мы представляем расчет $\lambda_i^*$ для второй выборки ТМГ одного и того же испытуемого (в покое, сидя регистрировали ТМГ), см. рис. 1.

Если сравнить наборы $\lambda_i^*$ для 1-й выборки (с положительными значениями $\lambda_i^*$) со значениями $\lambda_i^*$ для 2-й выборки (один и тот же испытуемый), то мы увидим, что распределения этих двух выборок $x_i > 0$ статистически не будут «совпадать». Это означает, что они имеют разные генеральные совокупности. Доказано, что 15 разных испытуемых (по выборкам их ТМГ) будут иметь 15 разных (по знаку) СПЛ. Это представлено на рис. 2.




**Рис. 2.** *График значений старшего показателя Ляпунова для трeморограмм 15 человек в спокойном состоянии без нагрузки*

Таким образом, сами значения старших показателей Ляпунова ведут себя хаотически. Они изменяют свой знак (с плюса на минус и обратно) и хаотически изменяют свою величину. Нет статистической устойчивости $\lambda_i^*$. Значит, нет ДХ у ТМГ. Иными словами, все три базовых критерия ДХ не могут выполняться для любых выборок ТМГ любого испытуемого (в покое, сидя).

**Обсуждение**

За последние 20 лет была доказана особая неустойчивость выборок параметров ТМГ у любого человека на Земле. Это составило основу ЭЕЗ. Однако такое поведение параметров ТМГ относится к статистическим функциям распределения *F(x)*, и к автокорреляциям *A(t)*, и к спектральным плотностям сигнала.

Это составляет основу ЭЕЗ, который имеет возможное следствие для разных групп испытуемых. Оказалось, что в живой природе нет однородных групп. Любой испытуемый из любой «якобы» однородной группы будет иметь свою особую генеральную совокупность. Это мы доказали для многих параметров организма человека.

В статистике имеется жесткое правило: нельзя испытуемых объединять в одну общую (якобы однородную) группу, если эти испытуемые не имеют общей генеральной совокупности. Очень странно, что за 150-200 лет никто и никогда не применял этот критерий.

В биологии, медицине, психологии, экологии и др. науках о жизни считалось: если люди одинакового возраста, пола, здоровые (и т.д.), то они образуют уже однородную группу испытуемых. ЭЕЗ доказал, что в биомеханике нет однородных групп в природе. Это мы сейчас демонстрируем.

Более того, сейчас мы установили, что в биомеханике нет и динамического хаоса Лоренца. При регистрации 15-ти выборок ТМГ (от одного испытуемого) мы будем иметь разные значения старших показателей Ляпунова $\lambda_i^*$ для каждой такой выборки ТМГ. Знаки у СПЛ хаотически изменяются от выборки к выборке.

Одновременно и другие критерии динамического хаоса для ТМГ тоже не выполняются. Конкретно: в аттракторах ТМГ нет инвариантности мер, а автокорреляционные функции не стремятся к нулю при возрастании времени $t$. Все непрерывно и хаотически (в смысле отсутствия статистической устойчивости) изменяется.

**Выводы**

В середине 20-го века выдающийся биомеханик Н. А. Бернштейн предложил гипотезу о «повторении без повторений». В статистике под «повторением» подразумевают или точное совпадение в ФПС (по всем точкам), или «повторение» статистического распределения, т.е. *F(x)*, *A(t)*, СПС и т.д. До нас это никто не проверял.

Двадцать лет назад мы начали доказывать, что любая выборка ТМГ уникальна, а любая группа испытуемых (в организации движений) не может быть однородной (ЭЕЗ). Потеря однородных групп привела нас к отрицанию возможностей методов ДСН в биомеханике. Статистика не описывает биосистемы.

Оставался острым вопрос о реальности динамического хаоса в поведении всех биосистем. Ряд выдающихся ученых (нобелевских лауреатов: I. R. Prigogine, M. Gell-Mann, R. Penrose) считали, что модели ДХ могут описывать процессы в живой природе. Оказалось, что это было ошибкой. ДХ не имеет место в биомеханике. Сейчас мы показали это на примере ТМГ. Очевидно, что и другие параметры организма человека дают аналогичный эффект.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Prigogine I. R. *The End of Certainty: Time, Chaos, and the New Laws of Nature*. The Free Press; 1996.
2. Бернштейн Н. А. *О построении движений*. М.: Медгиз; 1947. 254 с.
3. Weaver W. Science and Complexity. *American Scientist.* 1948;36:536–544.
4. Гинзбург В. Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? *Успехи физических наук*. 1999;169:419–441. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199904d.0419.

5. Eskov V. M., Galkin V. A., Filatova O. E. The Connectedness between Past and Future States of Biosystems? *AIP Conference Proceedings.* 2022;2467:080027. DOI: 10.1063/5.0095266.
6. Eskov V. M., Grigorenko V. V., Gazya G. V., Gazya N. F. The Problem of Dynamical Chaos in Heat Performance Parameters. *Lecture Notes in Networks and Systems.* 2023;597:895–902.
7. Eskov V. V., Filatova O. E., Gavrilenko T. V., Gorbunov D. V. Chaotic Dynamics of Neuromuscular System Parameters and the Problems of the Evolution of Complexity. *Biophysics.* 2017;62(6):961–966.
8. Eskov V. V., Filatova D. Y., Ilyashenko L. K., Vochmina Y. V. Classification of Uncertainties in Modeling of Complex Biological Systems. *Moscow University Physics Bulletin.* 2019;74(1):57–63.
9. Gazya G. V., Gavrilenko T. V., Galkin V. A., Eskov V. V. Possibilities of Generating Dynamic Chaos by Biosystems. *Lecture Notes in Networks and Systems.* 2023;597:562–568.
10. Gazya G. V., Eskov V. V., Gavrilenko T. A., Gazya N. F., Kukhareva A. Is Static (Stability) Possible in Biomechanics? *Lecture Notes in Networks and Systems.* 2025;1560:106–114. DOI: 10.1007/978-3-032-00239-6_6.
11. Grigorenko V. V., Nazina N. B., Filatov M. A., Chempalova L. S., Tretyakov S. A. New Information Technologies in the Estimation of the Third Type Systems. *Journal of Physics: Conference Series.* 2021;1889:32003. DOI: 10.1088/1742-6596/1889/3/032003.
12. Orlov E. V., Filatova O. E., Galkin V. A., Chempalova L. S. The Prospects of New Invariants Creating in Biocybernetics. *AIP Conference Proceedings.* 2023;2700:040056. DOI: 10.1063/5.0138430.
13. Горбунов Д. В., Гавриленко А. В., Кухарева А. Ю., Манина Е. А. Возможности энтропийного подхода в оценке биомеханических параметров человека. *Успехи кибернетики.* 2024;5(1):34–39. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-1-04.
14. Газя Г. В., Газя Н. Ф., Еськов В. В., Манина Е. А. Непредсказуемость и неопределенность создают реальную Complexity. *Успехи кибернетики.* 2024;5(2):97–102. DOI: 10.51790/2712-9942-2024-5-2-11.
15. Русак С. Н., Добрынина И. Ю., Еськов В. В., Воронюк Т. В., Мельникова Е. Г., Третьяков С. А. Хаос в организации движений. *Вестник новых медицинских технологий.* 2025;32(2):123–126 DOI: 10.24412/1609-2163-2025-2-123-126.

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗОНАХ ПОДГОТОВКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

**М. И. Гапеев**
*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Российская Федерация*
*ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5798-7166,* ✍ *gapeev.sci@yandex.ru*

*Аннотация:* разработан параллельный алгоритм моделирования предсейсмических деформаций земной коры. Алгоритм основан на численной схеме решения статической задачи теории упругости методом конечных элементов. Программная реализация опирается на технологию Message Passing Interface, разбиение исходной области моделирования на «поддомены» и решение распределенной системы линейных алгебраических уравнений. Регрессионный анализ сложности алгоритма показал, что она близка по времени к линейной и составляет $O(N^{1.17})$, сложность по памяти в диапазоне сеток с количеством элементов от $\simeq 10^5$ до $\simeq 10^8$ практически строго линейна — $O(N^{0.985})$. Статистический анализ эффективности показал, что наиболее оптимально использование от 6 до 8 вычислительных потоков. Время вычисления при этом составляет около 5 минут, а ускорение — примерно 2.9 на сетке с количеством элементов $18 \cdot 10^7$. Эффективность монотонно убывает и после 9 потоков составляет менее 0.3. Стоимость демонстрирует практически линейный рост. Алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассмотренном диапазоне размеров сеток и потоков.

*Ключевые слова:* параллельный алгоритм, сложность и эффективность, метод конечных элементов.

*Благодарности:* работа выполнена за счет государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

*Для цитирования:* Гапеев М. И. Параллельный алгоритм численного моделирования деформационных процессов в зонах подготовки землетрясений. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):64–70.

*Поступила в редакцию: 07.08.2026.* *В окончательном варианте: 22.09.2026.*

# PARALLEL NUMERICAL SIMULATION OF PRESEISMIC DEFORMATION IN EARTHQUAKE-PRONE AREAS

**M. I. Gapeev**
*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russian Federation*
*ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5798-7166,* ✍ *gapeev.sci@yandex.ru*

*Abstract:* we studied the parallel numerical simulation of preseismic deformation processes in earthquake-prone areas. We developed a parallel algorithm based on a numerical scheme for solving the static elasticity problem using the finite element method. The software implementation uses the Message Passing Interface (MPI) and partitions the computational domain into subdomains, with each process solving a corresponding part of the resulting distributed system of linear algebraic equations. Regression analysis showed that the algorithm has nearly linear time complexity, amounting to $O(N^{1.17})$. Its memory complexity over the range of meshes with $\approx 10^5$ to $\approx 10^8$ elements was almost strictly linear, at $O(N^{0.985})$. Statistical analysis of parallel efficiency showed that the optimal number of computational processes was between 6 and 8. Under these conditions, the computation time was approximately 5 min, and the speedup was about 2.9 for a mesh containing $18 \cdot 10^7$ elements. Parallel efficiency decreased monotonically and fell below 0.3 when more than 9 processes were used. The cost increased almost linearly with the number of processes. The algorithm was therefore not cost-optimal over the considered ranges of mesh sizes and numbers of computational processes.

*Keywords:* parallel simulation, complexity and efficiency, finite element method.

*Acknowledgements:* this study is part of a government order No. 124012300245-2 awarded to the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation.

*Cite this article:* Gapeev M. I. Parallel Numerical Simulation of Preseismic Deformation in Earthquake-Prone Areas. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):64–70.

*Original article submitted: 07.08.2026.* *Revision submitted: 22.09.2026.*

**Введение**

Механические процессы, протекающие в области очага будущего землетрясения, приводят к изменению напряженно-деформированного состояния горных пород. Эти изменения являются прямой или косвенной причиной возникновения вариаций различных геофизических полей, которые могут быть классифицированы как предсейсмические аномалии. Дальнейший их анализ создает базу для построения систем оценки сейсмической опасности и сейсмических рисков.

Так как в основе землетрясения лежат механические процессы, необходимо непосредственное исследование напряженно-деформированного состояния земной коры при его подготовке. Такие исследования проводят в том числе и методами математического моделирования. Их результаты позволяют более качественно анализировать и интерпретировать результаты геофизических наблюдений.

Развитие методов математического моделирования связано с разработкой эффективных и параллельных алгоритмов. Несмотря на то, что тема эффективного моделирования геофизических процессов достаточно широко освещена [1–6], вопросы разработки параллельных алгоритмов моделирования именно предсейсмических деформаций освещены слабо. Поэтому настоящее исследование сосредоточено на разработке параллельного алгоритма моделирования деформаций земной коры на заключительной стадии подготовки землетрясения.

**Физическая постановка и определяющие уравнения**

Рассмотрим очаг готовящегося землетрясения в виде системы массовых сил, приложенной к точке $\boldsymbol{\xi}$ упругого тела $\Omega$ с границей $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$. При этом $\Gamma_p$ и $\Gamma_q$ не пересекаются, описывают поверхность Земли $x_3 = 0$ и оставшуюся часть большого блока литосферы соответственно. Поверхность $\Gamma_p$ свободна от напряжений в направлении $x_3$, а на $\Gamma_q$ заданы условия скользящего закрепления.

Зачастую процесс подготовки землетрясения связывают с возникновением трещин, разрывов и дислокаций в области его будущего очага [7]. Поэтому при построении силового эквивалента разумно выбрать плотность распределения массовых сил $f_i$ таким образом, чтобы она была ассоциирована с дислокационным процессом. Из теории упругости известно, что силовым эквивалентом дислокации является система девяти пар двойных сил [8]. Поэтому будем считать, что очаг готовящегося землетрясения — это система именно таких сил, распределенная в некотором объеме пород.

Выберем распределение плотности массовых сил как производную трехмерной нормированной функции Гаусса:

$$f_i = -M_{ik}\frac{\tilde{x}_k}{\sigma_n^5\sqrt{(2\pi)^3}}\exp\Big(-\frac{\tilde{x}_j\tilde{x}_j}{2\sigma_n^2}\Big), \quad i = 1,2,3,$$

где $M_{ik}$ — тензор момента, а $\tilde{x}_j = x_j - \xi_j$.

Задача моделирования предсейсмических деформаций представляет собой следующую вариационную задачу статической теории упругости в $\overline{\Omega}$. *По заданным плотности вектора массовых сил* $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *и граничным условиям* $p_i : \Gamma_p \to \mathbb{R}, q_i : \Gamma_q \to \mathbb{R}$ *найти* $u_i \in \mathcal{S} = \{u_i \in H^1(\Omega) : u_i = q_i, \boldsymbol{x} \in \Gamma_q\}$ *такие, что для всех* $\omega_i \in \mathcal{V} = \{\omega_i \in H^1(\Omega) : \omega_i = 0, \boldsymbol{x} \in \Gamma_q\}$:

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{f}) - a(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}),\\ &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = \int_\Omega \omega_{(i,j)}[2\mu u_{(i,j)} + \lambda\delta_{ij}u_{(l,l)}]d\Omega,\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{f}) = \int_\Omega \omega_i f_i\ d\Omega,\\ &a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}) = \int_\Omega \omega_{(i,j)}[2\mu q_{(i,j)} + \lambda\delta_{ij}q_{(l,l)}]d\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева первого порядка, $\lambda = \lambda(\boldsymbol{x})$, $\mu = \mu(\boldsymbol{x})$ — коэффициенты Ламе.

**Численная схема**

Пусть $\mathcal{S}^h$ и $\mathcal{V}^h$ — конечномерные аппроксимации пространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{V}$. Разобъем всю область моделирования на тетраэдры $n$-точками. С каждой из точек под номером $A$ свяжем финитную функцию $N_A$. Множество этих функций будет составлять базис в пространствах $\mathcal{S}^h$ и $\mathcal{V}^h$:

$$v_i^h = \sum_{A\in\zeta-\zeta_{q_i}} N_A d_{iA},\ q_i^h = \sum_{A\in\zeta_{q_i}} N_A q_{iA},\ \omega_i^h = \sum_{A\in\zeta-\zeta_{q_i}} N_A c_{iA}, \tag{2}$$

где $\zeta$ — номера всех узлов, $\zeta_{q_i}$ — номера узлов, для которых заданы граничные условия на перемещения.

Подставим разложения (2) в (1). Учитывая, что соотношение должно выполняться при произвольных $c_{iA}$, получим систему линейных алгебраических уравнений на $d_{jB}$. Решение этой системы и будет составлять численную схему, реализующую метод конечных элементов:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}, \quad K_{AB} = a(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j),\\
&F_A = \int\limits_\Omega N_A f_i\ d\Omega - \sum_{B\in\zeta_{q_i}} a\Big(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j\Big)q_{jB},\\
&a(N_A\boldsymbol{e}_i, N_B\boldsymbol{e}_j) = \int_\Omega \Big[\mu(\delta_{ij}N_{A,l}N_{B,l} + N_{A,j}N_{B,i}) + \lambda N_{A,i}N_{B,j}\Big]d\Omega,
\end{aligned}$$

где $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормированный базис в $E^3$.

**Алгоритм моделирования**

Программная реализация параллельного алгоритма моделирования предсейсмических деформаций основана на технологии Message Passing Interface (MPI). Основные шаги алгоритма следующие:

**Шаг 1:** инициализация `MPI`-среды.

**Шаг 2:** загрузка сетки из файла формата `.xdmf`.

**Шаг 3:** широковещательная рассылка базовой информации о сетке всем процессорам.

**Шаг 4:** построение графа смежности конечных элементов.

**Шаг 5:** распределение элементов между процессами.

**Шаг 6:** создание распределенной сетки с локальными элементами.

**Шаг 7:** определение соседних элементов и создание `ghost`-слоя для корректных вычислений на межпроцессорных границах.

**Шаг 8:** создание конечномерных пространств на основе распределенной сетки и базисных функций.

**Шаг 9:** параллельная сборка основной матрицы системы $\boldsymbol{K}$ и вектора массовых сил $\boldsymbol{F}$.

**Шаг 10:** синхронизация вкладов на межпроцессорных границах.

**Шаг 11:** решение распределенной системы линейных алгебраических уравнений.

**Шаг 12:** постобработка и сохранение результатов.

**Оценка вычислительной сложности**

Для анализа вычислительной сложности и эффективности алгоритма моделирования предсейсмических деформаций была проведена серия экспериментов на вычислительном сервере с двумя процессорами AMD EPYC 7313 с 16 физическими и 16 виртуальными ядрами. Эксперименты проводились в рамках одной вычислительной ноды, исключая виртуальные ядра процессора, поэтому максимально были задействованы 16 вычислительных потоков. Эксперименты проводились для различного числа потоков $p$ и конечных элементов $N$. Расчетная схема и разбивка области моделирования $\overline{\Omega}$ представлены на рис. 1.

Будем проводить дальнейший анализ на основе оценок математических ожиданий в виде выборочных средних $\widehat{T}_{p,N}$ и $\widehat{M}_{p,N}$ для $n = 5$ повторений. Для оценки сложности рассмотрим серии экспериментов, проведенных в однопоточном режиме на сетках с разным количеством конечных элементов. Для предварительной оценки зависимости построим графики в двойном логарифмическом масштабе $(\log_{10}[N], \log_{10}[\widehat{T}_{p,N}])$ и $(\log_{10}[N], \log_{10}[\widehat{M}_{p,N}])$. Они представлены на

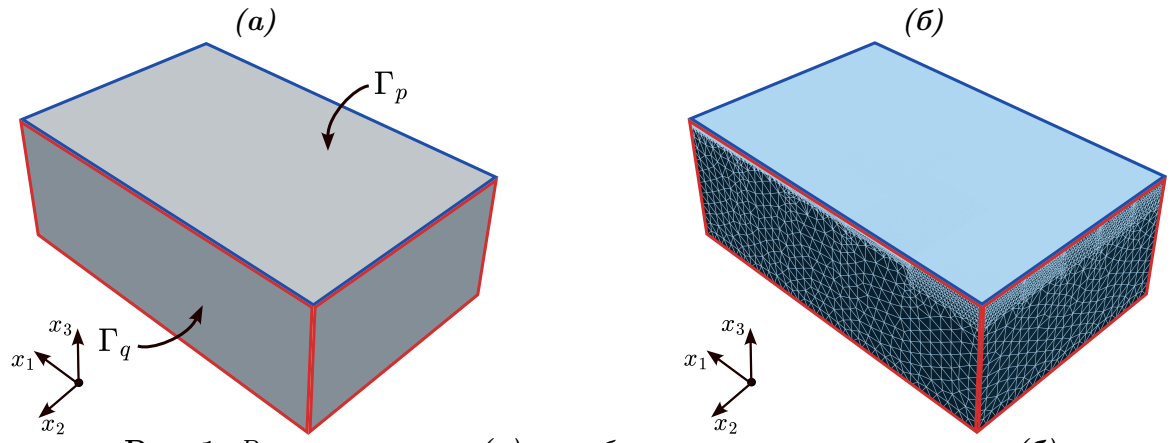



**Рис. 1.** *Расчетная схема* ***(а)*** *и разбивка конечными элементами* ***(б)***

рис. 2**а**,**б**. На первом графике (рис. 2**а**) усматривается линейная зависимость, поэтому будем строить линейную регрессию.

С использованием метода наименьших квадратов были получены следующие значения коэффициентов: регрессии $k = 1.17, b = -5.53$ и детерминации $R^2 = 0.9995$. Рассчитанный по критерию Стьюдента 95% доверительный интервал для коэффициента $k$ равен $[0.95, 1.02]$, значение p-value для регрессионной модели по $F$-тесту много меньше 0.05. На основании этих результатов можно сделать вывод, что сложность алгоритма по времени практически линейна — $O(N^{1.17})$.

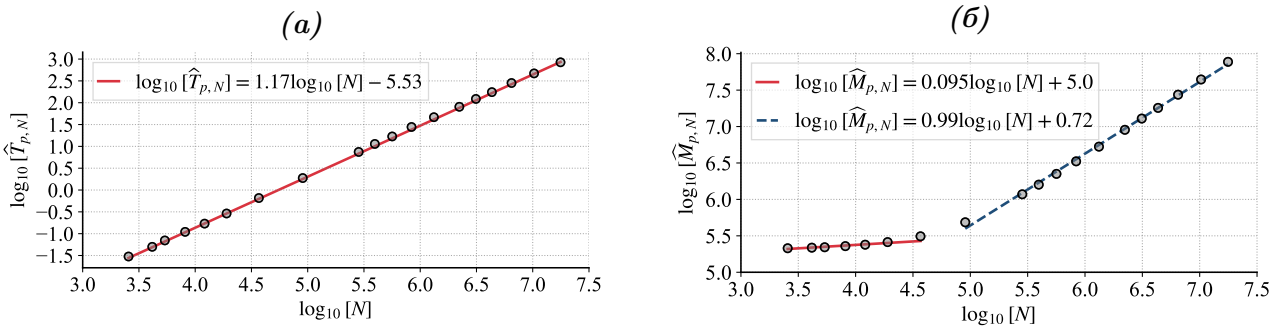



**Рис. 2.** *Затраты времени* ***(а)*** *и памяти* ***(б)*** *в двойном логарифмическом масштабе, а также их линии регрессии*

На рис. 2**б**, который отражает график зависимости требуемой оперативной памяти от размера сетки в двойном логарифмическом масштабе, отчетливо видны два сегмента: первый — от 3.41 до 4.56, а второй — от 4.96 до 7.25. Точки на этих сегментах визуально ложатся на прямые, но с разным наклоном. Поэтому проведем кусочно-линейную регрессию. Применение метода наименьших квадратов и статистического анализа для первой линии привело к следующим результатам: коэффициенты регрессии: $k_1 = 0.095, b_1 = 5.0$, коэффициент детерминации $R^2 = 0.919$, 95% доверительный интервал для $k_1$ равен $[0.065, 0.125]$, p-value для модели 0.0025 ($<0.05$). Для второй же линии: $k_2 = 0.985, b_2 = 0.717, R^2 = 0.997$, доверительный интервал $k_2$ равен $[0.952, 1.019]$, p-value много меньше 0.05.

На основании этого можно сделать следующие выводы: на втором сегменте $[4.96, 7.25]$ наблюдается практически строго линейная зависимость $O(N^{0.985})$ потребляемой оперативной памяти от размера сетки. На первом же сегменте $[3.41, 4.56]$ наклон прямой очень пологий $k = 0.095$. Это означает, что для такого количества конечных элементов доминирующими являются расходы на сборку матрицы жесткости и хранение промежуточных результатов итерационного метода решения системы линейных алгебраических уравнений.

### Оценка эффективности

На рис. 3 представлен график зависимости времени вычисления тестового примера от количества потоков $p$ при фиксированном значении числа конечных элементов $N = 18 \cdot 10^7$.

Красной областью обозначен 99% доверительный интервал по критерию Стьюдента с $k = 4$ степенями свободы.

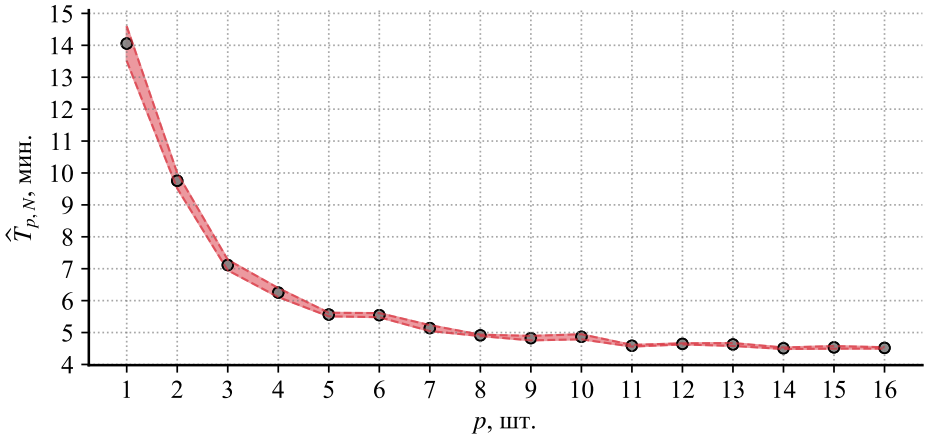



**Рис. 3.** *Выборочное среднее времени вычисления на разном количестве ядер и 99% доверительный интервал для математического ожидания*

Для анализа эффективности разработанного алгоритма использованы статистические оценки ускорения $\widehat{S}_{p,N}$, эффективности $\widehat{E}_{p,N}$ и стоимости $\widehat{C}_{p,N}$:

$$\widehat{S}_{p,N} = \frac{\widehat{T}_{1,N}}{\widehat{T}_{p,N}}, \quad \widehat{E}_{p,N} = \frac{\widehat{T}_{1,N}}{p\widehat{T}_{p,N}}, \quad \widehat{C}_{p,N} = p\widehat{T}_{p,N}.$$

Гистограммы распределений этих оценок представлены на рис. 4. Красным обозначены размеры доверительных интервалов, рассчитанные методом «bootstrap». Видно, что все интервалы достаточно узкие, что указывает на высокую воспроизводимость результатов.

Ускорение достигает насыщения при количестве потоков $p = 6 - 8$ (рис. 4**а**). Дальнейшее увеличение потоков дает незначительный прирост производительности. Максимальное ускорение, примерно в 3 раза, достигается при $p = 14 - 16$, время вычисления при этом составляет около 4.5 минут (рис. 3). Эффективность $\widehat{E}_{p,N}$ монотонно убывает и после $p = 9$ составляет менее 0.3 (рис. 4**б**). Стоимость $\widehat{C}_{p,N}$ демонстрирует практически линейный рост (рис. 4**в**). Результаты оценки относительной стоимости вычислений $\widehat{C}_{p,N}/\widehat{T}_{1,N}$ показали, что алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассматриваемом диапазоне размеров сеток и потоков.

**Заключение**

Разработан параллельный алгоритм моделирования предсейсмических деформаций, который основан на численном решении задачи теории упругости методом конечных элементов. Его программная реализация основана на технологии Message Passing Interface, разбиении исходной области моделирования на «поддомены» и решении распределенной системы линейных алгебраических уравнений.

Проведена оценка эмпирической сложности и эффективности разработанного алгоритма. В результате регрессионного и статистического анализа было установлено:

1) сложность алгоритма по времени близка к линейной и составляет $O(N^{1.17})$, сложность по памяти в диапазоне сеток с количеством элементов от $10^5$ до $10^8$ практически строго линейна — $O(N^{0.985})$;

2) наиболее оптимально использование от 6 до 8 вычислительных потоков. Время вычисления при этом составляет около 5 минут, а ускорение — примерно 2.9 на сетке с количеством элементов $18 \cdot 10^7$. Эффективность монотонно убывает и после 9 потоков составляет менее 0.3. Стоимость демонстрирует практически линейный рост;

3) алгоритм не является стоимостно-оптимальным в рассмотренном диапазоне размеров сеток и потоков.

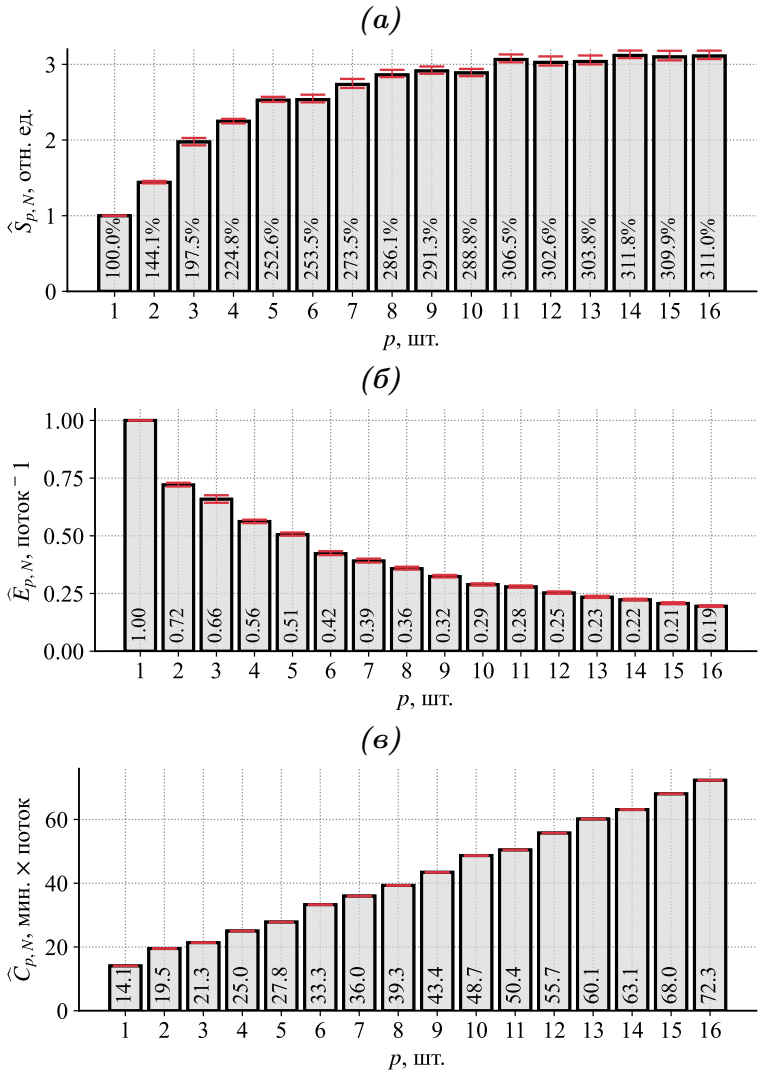



**Рис. 4.** *Гистограммы распределения оценок ускорения* $\widehat{S}_{p,N}$ ***(а)****, эффективности* $\widehat{E}_{p,N}$ ***(б)*** *и стоимости* $\widehat{C}_{p,N}$ ***(в)***

## ЛИТЕРАТУРА


1. Key K., Ovall J. A Parallel Goal-Oriented Adaptive Finite Element Method for 2.5-D Electromagnetic Modelling. *Geophys. J. Int.* 2011;186(1):137–154. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2011.05025.x.
2. Asgari A., Bagheri M., Hadizadeh M. Advanced Seismic Analysis of Soil-Foundation-Structure Interaction for Shallow and Pile Foundations in Saturated and Dry Deposits: Insights from 3D Parallel Finite Element Modeling. *Structures.* 2024;69:107503. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.107503.
3. Failer L., Thomas R. A Parallel Newton Multigrid Framework for Monolithic Fluid-Structure Interactions. *J. Sci. Comput.* 2020;82:28. DOI: 10.1007/s10915-019-01113-y.
4. Fukuda D., Mohammadnejad M., Liu H., Zhang Q., Zhao J., Dehkhoda S., Chan A., Kodama J., Fujii Y. Development of a 3D Hybrid Finite-Discrete Element Simulator Based on GPGPU-Parallelized Computation for Modelling Rock Fracturing under Quasi-Static and Dynamic Loading Conditions. *Rock Mech. Rock Eng.* 2020;53(3):1079–1112. DOI: 10.1007/s00603-019-01960-z.
5. Твёрдый Д. А. Анализ эффективности гибридного параллельного алгоритма численного решения задачи Коши для эредитарных моделей объемной активности радона в рамках программного комплекса FEVO. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025;50(1):149–168. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168.
6. Tverdyi D. An Analysis of the Computational Complexity and Efficiency of Various Algorithms for Solving a Nonlinear Model of Radon Volumetric Activity with a Fractional Derivative of a Variable Order. *Computation.* 2025;13(11):252. DOI: 10.3390/computation13110252.

7. Соболев Г. А. Модель лавинно-неустойчивого трещинообразования — ЛНТ. *Физика Земли*. 2019;1:166–179.
8. Segall P. *Earthquake and Volcano Deformation*. Princeton: Princeton University Press; 2010. 432 p.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

**К. В. Губарева**[1,а], **Е. Ю. Просвиряков**[2,3,б]

[1] *Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация*

[2] *Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Российская Федерация*

[3] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9845-8372,* ✍ *r.kristina2017@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801, evgen_pros@mail.ru*

*Аннотация:* работа посвящена численному исследованию стационарного термокапиллярного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с неподвижной твердой нижней границей и свободной поверхностью. Рассматривается режим ползущего течения. Единственной движущей силой является поверхностное натяжение, зависящее от температуры. Для описания течения применяется квазиодномерное разложение полей скорости, температуры и давления по поперечной координате, сохраняющее квадратичные по продольной переменной члены. Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом коллокации четвертого порядка, реализованным в среде MATLAB с помощью решателя bvp4c. Вычислительный алгоритм используется для пяти значений числа Марангони. Получены профили вертикальной и горизонтальной компонент скорости, а также модовых температуры и давления. Построены двумерные распределения функции тока, давления и температуры. Показано, что в рассмотренном диапазоне параметров формируются два встречных потока, разделенных уровнем нулевой горизонтальной скорости. Определены положения соответствующих нулей. Анализ невязки исходных уравнений подтверждает высокую точность численного решения. Исследована зависимость структуры течения от управляющего параметра. Результаты могут быть использованы для верификации численных методов при решении задач термокапиллярной конвекции.

*Ключевые слова:* термокапиллярная конвекция, метод коллокации, краевая задача, MATLAB bvp4c, численное моделирование.

*Для цитирования:* Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю. Численное моделирование стационарного термокапиллярного течения в плоском канале в линейном приближении. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):71–78.

*Поступила в редакцию: 31.08.2026.* *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

# NUMERICAL SIMULATION OF STEADY THERMOCAPILLARY FLOW IN A FLAT CHANNEL USING LINEAR APPROXIMATION

**K. V. Gubareva**[1,a], **E. Yu. Prosviryakov**[2,3,b]

[1] *Samara State Technical University, Samara, Russian Federation*

[2] *Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation*

[3] *Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9845-8372,* ✍ *r.kristina2017@mail.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2349-7801, evgen_pros@mail.ru*

*Abstract:* we performed a numerical study of steady thermocapillary flow of a viscous incompressible fluid in a flat channel with a stationary solid bottom and a free surface. We considered the creeping-flow regime, in which the only driving force was temperature-dependent surface tension. We used a quasi-one-dimensional expansion of the velocity, temperature, and pressure fields in the transverse coordinate, retaining terms up to second order in the longitudinal coordinate. We solved the resulting boundary-value problem for a system of ordinary differential equations using a fourth-order collocation method implemented in MATLAB with the bvp4c solver. We applied the computational

algorithm for five values of the Marangoni number. We obtained profiles of the vertical and horizontal velocity components and the modal temperature and pressure, and constructed two-dimensional distributions of the stream function, pressure, and temperature. We found that two counter-flowing streams formed over the range of parameters considered, separated by a level of zero horizontal velocity, and determined the positions of the corresponding zeros. Analysis of the residuals of the governing equations confirmed the high accuracy of the numerical solution. We investigated the dependence of the flow structure on the governing parameter. The results provide a benchmark for testing numerical schemes for thermocapillary convection.

*Keywords:* thermocapillary convection, collocation method, boundary value problem, MATLAB bvp4c, numerical simulation.

*Cite this article:* Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Numerical Simulation of Steady Thermocapillary Flow in a Flat Channel Using Linear Approximation. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):71–78.

*Original article submitted: 31.08.2026.* *Revision submitted: 20.09.2026.*

**Введение**

Во многих теоретических и прикладных задачах гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости получить аналитическое решение не удается. Это относится, прежде всего, к течениям со свободными границами, где форма границы заранее неизвестна. Краевые условия для описания течений жидкости со свободной границей являются нелинейными, что затрудняет поиск аналитических решений и применение известных классов точных решений уравнений Навье–Стокса. Поэтому для исследования таких течений вязкой несжимаемой жидкости широко используются численные методы интегрирования уравнений гидродинамики [1–4].

При описании и исследовании течений со свободной границей (поверхностью) особое место занимают задачи, в которых движение жидкости вызвано градиентами поверхностного натяжения (эффект Марангони–Гиббса). Этот эффект, называемый часто термокапиллярным, играет определяющую роль в процессах выращивания кристаллов, испарения тонких пленок и в экспериментах при пониженной гравитации [5–8]. Даже в простейшем случае геометрии течения жидкости, например в плоском горизонтальном слое, термокапиллярная конвекция приводит к формированию сложных стратифицированных полей скорости, температуры и давления. Эти гидродинамические поля, в свою очередь, влияют на тепломассоперенос и устойчивость технологических процессов [9].

Количественный анализ термокапиллярных течений требует совместного решения уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. Традиционно для описания конвективных течений Марангони используется система уравнений Обербека–Буссинеска. В нелинейных режимах аналитические подходы интегрирования уравнений Обербека–Буссинеска обычно перестают работать или очень сложны, а вычислительные затраты при численном интегрировании чрезвычайно быстро растут [10]. Учитывая сложность получения как аналитических, так и численных решений уравнений Обербека–Буссинеска, важно располагать надежными (устойчивыми) численными алгоритмами, которые можно проверить на задачах с известным точным решением. Такие задачи принято называть эталонными. Они позволяют оценить порядок аппроксимации, выявить ошибки в постановке граничных условий и убедиться в корректности программной реализации численного метода [11, 12].

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся многие краевые задачи механики установившихся течений жидкости, эффективны методы коллокации. Основная идея этих методов состоит в том, чтобы искать решение в виде кусочно-полиномиальной функции. Такая функция должна точно удовлетворять уравнениям в выбранных точках расчетной области [13–15][. Коллокационные методы обеспечивают высокий порядок точности при умеренных вычислительных затратах. Они успешно применяются при моделировании пограничных слоев, течений в каналах и решении задач тепловой конвекции при исследовании установившихся (стационарных) режимов [16, 17]. Для решения ряда задач в среде MATLAB ранее был реализован решатель bvp4c, который использует коллокацию четвертого порядка, автоматически адаптирует сетку и контролирует невязку [18–20]. Этот инструмент уже применялся для расчета

гидродинамических и тепловых задач и показал возможность устойчивого численного интегрирования [21, 22].

Отдельные геометрические конфигурации областей термокапиллярных течений в каналах допускают аналитическое решение [23, 24]. Такие случаи особенно удобны для верификации численных схем, поскольку появляется возможность прямого сравнения численных и точных результатов.

Цель работы — исследовать структуру стационарного термокапиллярного течения в плоском слое с неподвижным твердым дном и свободной поверхностью, а также оценить погрешность алгоритма коллокации (решатель bvp4c) при решении соответствующей сопряженной системы уравнений.

**Постановка задачи**

Рассмотрим плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в слое $-1 \leq z \leq 0$. Нижняя граница $z = -1$ — неподвижная твердая граница, на которой задаются условия прилипания. Верхняя граница $z = 0$ свободна. Нормальное напряжение на ней равно нулю, а касательное — пропорционально продольному градиенту температуры. Влияние силы тяжести исключено из рассмотрения, так что единственной причиной движения служит эффект Марангони.

Канал предполагаем сильно вытянутым по координате $x$. Отношение высоты к длине $\delta = h/L \ll 1$. Применим квазиодномерное разложение полей, сохраняя члены порядка $x^2$. Следуя устоявшейся методике, решение ищем в виде:

$$u(x,z) = -xw'(z),\ w(x,z) = w(z),$$

$$T(x,z) = T_0(z) + x^2 T_{11}(z),\ P(x,z) = P_0(z) + x^2 P_{11}(z),$$

где $w(z)$ — вертикальная скорость, $u$ — горизонтальная скорость, $T$ — температура, $P$ — давление, а $T_{11}(z)$ и $P_{11}(z)$ — амплитуды соответствующих квадратичных мод.

Подстановка этих разложений в стационарные линеаризованные уравнения Навье–Стокса и уравнение теплопроводности приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$w''' = -P_{11},\ P_{11}' = T_{11},\ T_{11}'' = 0,$$

$$P_0' = T_0 + \delta^2 w'',\ T_0'' = -\delta^2 T_{11}.$$

Здесь $\delta = 0.1$ — фиксированный геометрический параметр, штрих обозначает дифференцирование по $z$. Граничные условия:

$$z = -1 : w = 0,\ w' = 0,\ T_0' + \frac{1}{2} T_{11} = 0,$$

$$z = 0 : w = 0,\ P_{11} = 0,\ T_{11} + 1 = 0,\ w'' + Mg = 0,$$

$$T_0' = \frac{1}{2},\ P_0 = 1.$$

Безразмерный параметр $Mg$ — число Марангони. В данной работе расчеты выполнены для $Mg = 0.01,0.1,1,5,10$.

**Численная реализация**

Преобразуем систему к нормальной форме Коши, введя вектор неизвестных размерности 9:

$$y(z) = (w,w',w'',P_{11},T_{11},T_{11}',P_0,T_0,T_0')^T.$$

Правая часть системы принимает вид:

$$\frac{dy}{dz} = f(z,y) = \left(y_2\ y_3\ -y_4\ y_5\ y_6\ 0\ y_8 + \delta^2 y_3\ y_9\ -\delta^2 y_5\right).$$

Граничные условия в точках $z = -1$ и $z = 0$ записываются как:

$$y_1(-1) = 0,\ y_2(-1) = 0,\ y_8(-1) + \frac{1}{2}y_5(-1) = 0,$$

$$y_1(0) = 0,\ y_4(0) = 0,\ y_5(0) + 1 = 0,\ y_3(0) + Mg = 0,$$

$$y_8(0) = 0.5,\ y_7(0) = 1.$$

Численное интегрирование выполнено с помощью решателя bvp4c (MATLAB). Метод коллокации использует кусочно-полиномиальные функции четвертой степени. Выбрана равномерная сетка из 151 узла. Параметры допусков: относительная погрешность $10^{-8}$, абсолютная $10^{-10}$. Начальное приближение задано в виде полинома, удовлетворяющего основным граничным условиям; итерационный процесс во всех случаях сходится за несколько шагов.

**Результаты численного моделирования**

На рис. 1 представлены полученные численно профили $w(z)$, $u(z) = -w'(z)$, $T_{11}(z)$ и $P_{11}(z)$ для пяти значений $Mg$. Вертикальная скорость $w$ обращается в нуль на границах канала. При $Mg = 0.01$ внутри слоя она принимает небольшие отрицательные значения, а начиная с $Mg = 0.1$ профиль становится положительным и его амплитуда существенно возрастает с ростом $Mg$. Горизонтальная скорость $u$ один раз меняет знак: в нижней части канала она положительна, в верхней — отрицательна. Точка нуля $u(z) = 0$ разделяет два встречных потока. Температурная мода $T_{11}$ демонстрирует строго линейный ход, а модовое давление $P_{11}$ — квадратичную зависимость от $z$, что согласуется со структурой исходных уравнений.

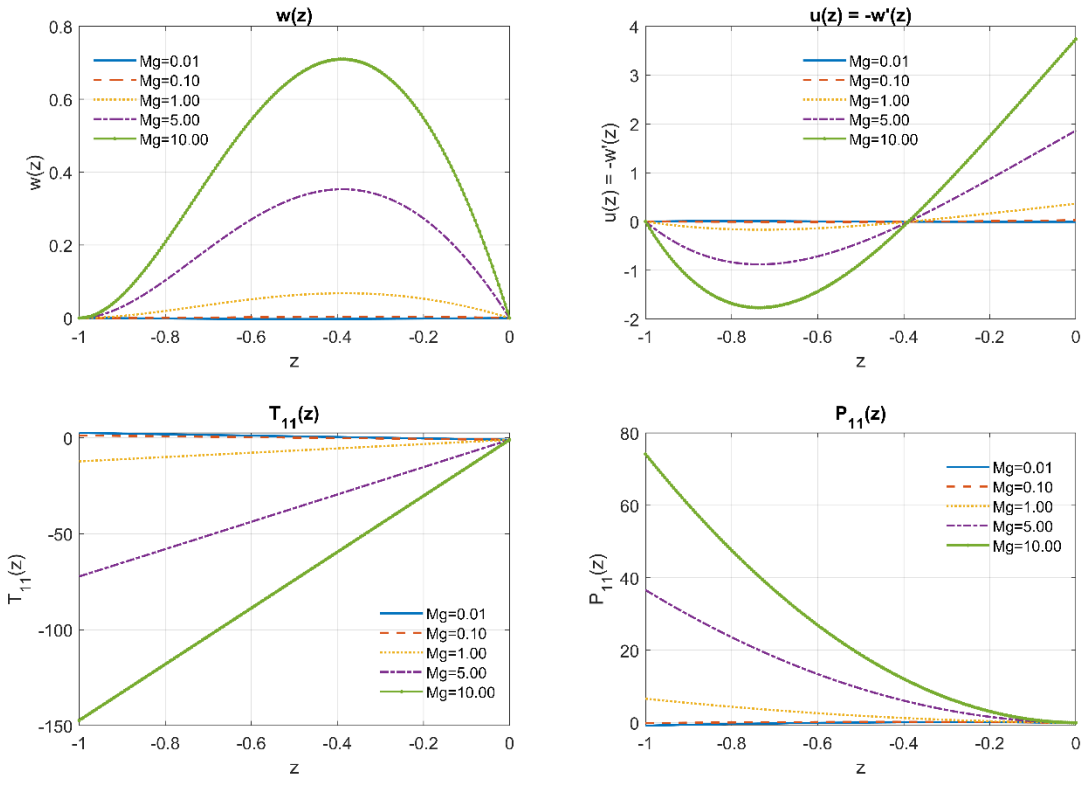



**Рис. 1.** *Профили* $w(z)$, $u(z) = -w'(z)$, $T_{11}(z)$ *и* $P_{11}(z)$ *для* $Mg = 0.01, 0.1, 1, 5, 10$

На основе численных профилей построены двумерные поля для трех значений $Mg$ = 0.1,1,10. Функция тока $\psi(x,z) = -xw(z)$ изображена на рис. 2. Изолинии $\psi$ имеют гиперболический вид и не замыкаются, поэтому вихревые ячейки в строгом смысле отсутствуют. Нулевые изолинии соответствуют осям $x = 0$ и границам $z = -1,0$, где $w = 0$. Смена знака горизонтальной скорости $u(z)$ в точке $z = z_0$ указывает на наличие двух встречных потоков: ниже этого уровня

жидкость движется в одном направлении, выше — в противоположном, причем направление зависит от знака координаты $x$. С усилением термокапиллярного эффекта абсолютные значения $w$ растут, что приводит к сгущению изолиний $\psi$ в центральной части слоя.

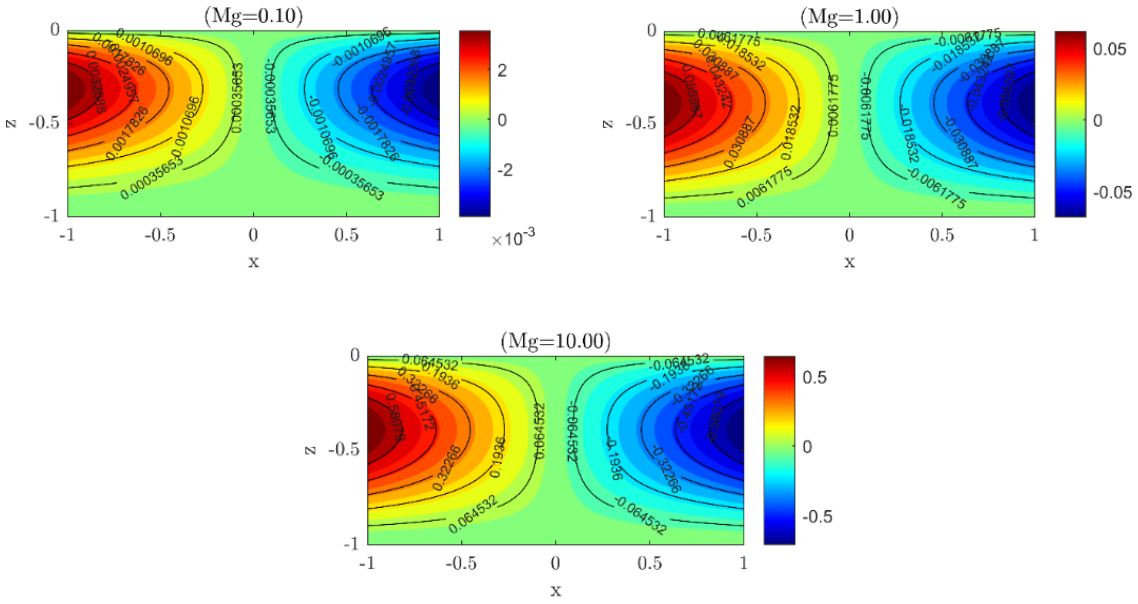



**Рис. 2.** *Изолинии функции тока* $\psi(x,z)$ *для* $Mg = 0.1, 1, 10$

Поле давления показано на рис. 3. Квадратичная зависимость от $x$ приводит к заметной поперечной неоднородности: на периферии канала ($x = \pm 1$) давление по модулю возрастает. При больших $Mg$ эта неоднородность становится более выраженной.

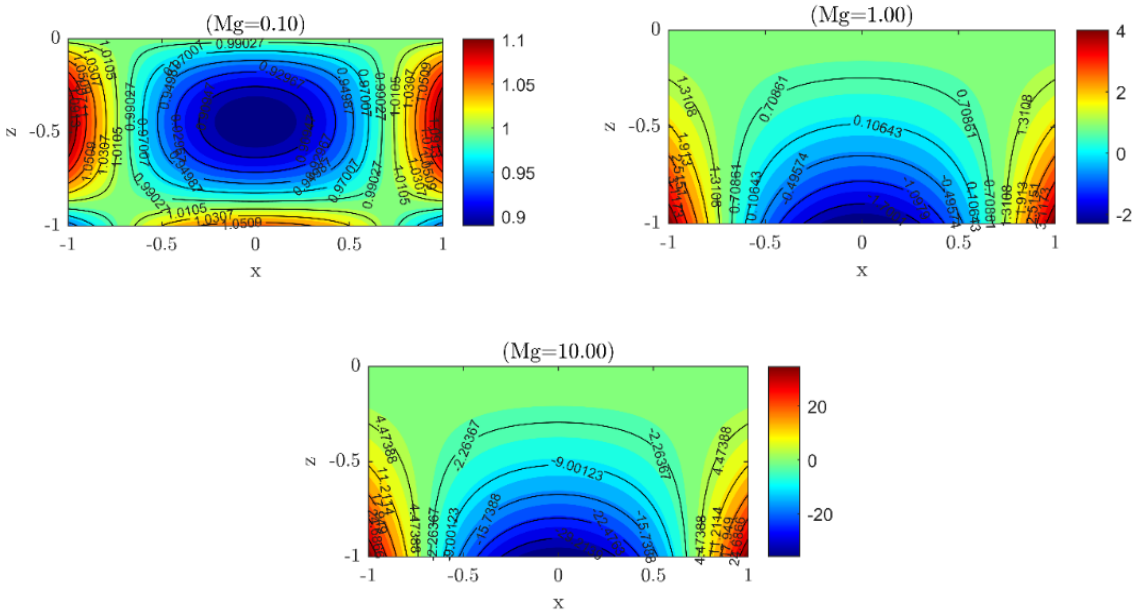



**Рис. 3.** *Изолинии давления* $P(x,z)$ *для* $Mg = 0.1, 1, 10$

Температурное поле приведено на рис. 4. Изотермы искривлены, что отражает конвективный перенос тепла. В приосевой области температура выше, чем у боковых границ, если $T_{11} > 0$, и наоборот. С ростом $Mg$ градиенты температуры увеличиваются, особенно в верхней половине слоя.

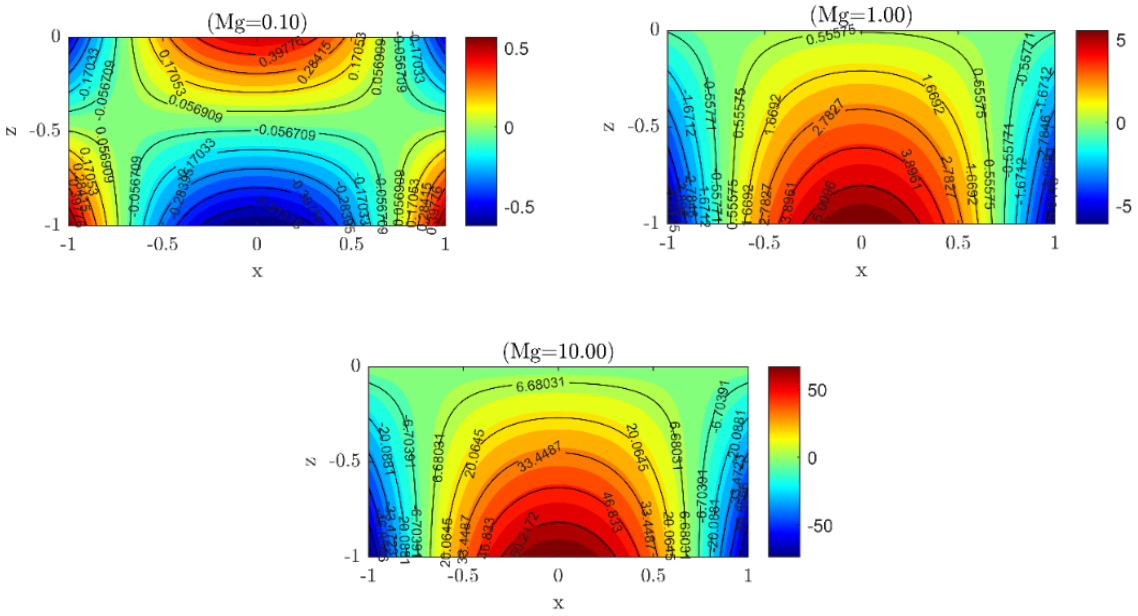



**Рис. 4.** *Изолинии температуры $T(x,z)$ для $Mg = 0.1, 1, 10$*

Внутренние нули функции $u\,(z)$ определены по перемене знака с линейной интерполяцией между соседними узлами сетки. Для каждого $Mg$ найден ровно один корень внутри интервала $(-1{,}0)$; его координаты приведены в таблице.

*Таблица*

*Численные координаты внутренних нулей $u(z)$*

| $Mg$ | 0.01 | 0.10 | 1.00 | 5.00 | 10.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_0$ | $-0.505188$ | $-0.312916$ | $-0.384264$ | $-0.388382$ | $-0.388878$ |

При $Mg = 0.01$ нуль расположен вблизи середины канала; с ростом $Mg$ до 0.1 он смещается вверх, а затем, при $Mg \geq 1$, его положение стабилизируется около $z \approx -0.388$. Толщина нижней зоны встречного потока составляет примерно 0.61 высоты слоя, верхней — около 0.39. Это соотношение практически не меняется при дальнейшем усилении термокапиллярного эффекта.

Внутренняя точность численного решения проверялась путем вычисления невязки правых частей системы ОДУ в точках коллокации. Для примера, при $Mg = 1.00$ максимальная невязка среди всех девяти уравнений составила $0.0010^0$ при выводе с двумя десятичными знаками, что соответствует значениям порядка $10^{-15}$ — машинному нулю. Это свидетельствует о том, что полученное решение с высокой точностью удовлетворяет исходным дифференциальным уравнениям.

**Обсуждение результатов**

Результаты численного моделирования дают физически согласованное представление о термокапиллярном течении в линейном приближении. При численном исследовании установившихся конвективных потоков в слое жидкости регистрируются два встречных потока. Противотечения в жидкости возникают как прямое следствие баланса вязких и термокапиллярных сил. Их количество остается неизменным во всем рассмотренном диапазоне чисел подобия $Mg$. Положение уровня (границы), разделяющего эти противотоки, быстро стабилизируется с ростом параметра, что указывает на структурную устойчивость конвективного режима.

Разработанный численный алгоритм на основе метода коллокации четвертого порядка со 151 узлом продемонстрировал отличные вычислительные характеристики: невязка уравнений сведена к машинному нулю. Это особенно важно для последующего применения метода к нели-

нейным задачам, поскольку минимальная невязка в линейном случае гарантирует корректную работу численной схемы с основными операторами задачи.

**Заключение**

С помощью метода коллокации выполнено численное моделирование установившегося (стационарного) термокапиллярного течения в плоском горизонтальном канале в линейном приближении. Иными словами, рассмотрены конвективные течения Марангони в приближении Стокса. Получены профили скорости $w(z)$ и пространственного градиента $u(z)$, модовой температуры $T_{11}(z)$ и модового давления $P_{11}(z)$ для пяти характерных значений числа Марангони в диапазоне от 0.01 до 10. Построены изолинии гидродинамических полей для функции тока, давления и температуры. Анализ гидродинамических полей показал наличие двух встречных потоков, разделенных уровнем нулевой горизонтальной скорости. Таким образом, в жидкости существует застойная точка (точка покоя). При исследовании медленных конвективных течений Марангони были определены координаты внутренних нулей горизонтальной скорости, показавшие слабую зависимость от $Mg$ при $Mg \geq 1$. Максимальная невязка уравнений не превышает машинного нуля, что подтверждает высокую внутреннюю точность решения. Разработанный численный аппарат может служить основой для последующего анализа нелинейных и нестационарных режимов термокапиллярной конвекции.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ferziger J. H., Perić M., Street R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer; 2002. 596 p. DOI: 10.1007/978-3-319-99693-6.
2. Temam R. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland; 2001. 500 p.
3. Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer; 1988. 567 p. DOI: 10.1007/978-3-642-84108-8.
4. Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. New York: McGraw-Hill; 1995. 547 p.
5. Davis S. H. Thermocapillary Instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1987;19:403–435. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002155.
6. Schatz M. F., Neitzel G. P. Experiments on Thermocapillary Instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2001;33:93–127. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.93.
7. Kuhlmann H. C. *Thermocapillary Convection in Models of Crystal Growth*. Berlin: Springer; 1999. 226 p. DOI: 10.1007/BFb0109562.
8. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers. Part 1. Convective Instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*. 1983;132:119–144. DOI: 10.1017/S0022112083001512.
9. Wanschura M., Kuhlmann H. C., Rath H. J. Three-Dimensional Instability of Axisymmetric Buoyant Convection in Cylinders Heated from Below. *Journal of Fluid Mechanics*. 1996;326:399–415. DOI: 10.1017/S0022112096008373.
10. Peyret R. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. New York: Springer; 2002. 432 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-6557-1.
11. Ascher U. M., Mattheij R. M. M., Russell R. D. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Philadelphia: SIAM; 1995. 595 p. DOI: 10.1137/1.9781611971231.
12. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP Solver Based on Residual Control and the MATLAB PSE. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2001;27(3):299–316. DOI: 10.1145/502800.502801.
13. De Boor C., Swartz B. Collocation at Gaussian Points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1973;10(4):582–606. DOI: 10.1137/0710052.
14. Gladwell I., Shampine L. F., Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge: Cambridge University Press; 2003. 263 p. DOI: 10.1017/CBO9780511615542.
15. Shampine L. F., Gladwell I., Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB*. New York: Cambridge University Press; 2003.

16. Trefethen L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM; 2000. 165 p. DOI: 10.1137/1.9780898719598.
17. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd ed. New York: Dover Publications; 2001. 688 p.
18. Shampine L. F., Reichelt M. W., Kierzenka J. *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c*. 2000. Режим доступа: https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/index.html.
19. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP Solver That Controls Residual and Error. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics*. 2008;3(1–2):27–41.
20. Ascher U. M., Petzold L. R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Philadelphia: SIAM; 1998. 314 p. DOI: 10.1137/1.9781611971392.
21. Gubareva K. V., Eremin A. V. Numerical Solution of the Heat Conduction Problem in a Porous Plate with Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.
22. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Y., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille Flow of a Viscous Incompressible Fluid in an Infinite Horizontal Layer with Permeable Boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025;(5):6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028.
23. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование полей температуры и давления. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017;21(4):736–751. DOI: 10.14498/vsgtu1568.
24. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations with the Linear Dependence of Velocity Components on Two Space Variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2009;43(5):642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИРТУАЛЬНОЙ IOT-СИСТЕМЫ УДАЛЕННОГО МОНИТОРИНГА, А ТАКЖЕ УПРАВЛЕНИЯ ДВИГАТЕЛЕМ НА ОСНОВЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ГИСТЕРЕЗИСА И В РУЧНОМ РЕЖИМЕ

**Э. М. Исмайлов**[1,а], **Т. В. Гавриленко**[1,2,б], **О. Ю. Семенов**[2,в]

[1] *Сургутский филиал федерального государственного бюджетного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9913-3283,* ✍ *trol.8@inbox.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3243-2751, taras.gavrilenko@gmail.com*

[в] *ous.tutor.phinma@mail.ru*

*Аннотация*: в статье приведены результаты виртуального эксперимента, выполненного с использованием программных продуктов учебной версии nanoCAD, Tinkercad. Экспериментальным методом выявлены сильные и слабые стороны актуальных систем управления электроприводом на примере системы вентиляции. Протестированы упрощенные виртуальные модели прямого пуска системы вентиляции, дистанционного пуска системы вентиляции через контроллер, а также дистанционного пуска и запуска по сигналу от датчика температуры (IoT-система). Основная задача проведенного исследования заключалась в анализе эволюции архитектур систем управления от релейно- контакторных схем прямого пуска до передовых программно-аппаратных комплексов с возможностью хранения информации в облачных хранилищах. Исследования в данном направлении актуальны, поскольку часть работы проводилась на виртуальном стенде IoT-системы. Она служит основой для создания цифрового двойника технологических объектов, выступающего фундаментом для анализирующей AIoT-системы (Artificial Internet of Things — искусственный интеллект вещей). В работе акцентируется внимание на логике взаимодействия элементной базы проекта с использованием современных средств разработки и симуляции.

*Ключевые слова:* виртуальный стенд, система вентиляции, цифровые предприятия, высокая автоматизация.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» — НИИСИ по теме № FNEF-2024-0001 «Создание и реализация доверенных систем искусственного интеллекта, основанных на новых математических и алгоритмических методах, моделях быстрых вычислений, реализуемых на отечественных вычислительных системах» (1023032100070-3-1.2.1).

*Для цитирования:* Исмайлов Э. М., Гавриленко Т. В., Семенов О. Ю. Моделирование виртуальной IoT-системы удаленного мониторинга, а также управления двигателем на основе температурного гистерезиса и в ручном режиме. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):79–85.

*Поступила в редакцию: 08.08.2026. В окончательном варианте: 23.09.2026.*

# SIMULATION OF A VIRTUAL IOT SYSTEM FOR REMOTE ENGINE MONITORING AND CONTROL USING TEMPERATURE HYSTERESIS AND MANUAL CONTROL

**E. M. Ismailov**[1,a], **T. V. Gavrilenko**[1,2,b], **O. Yu. Semenov**[2,c]

[1] *Surgut Branch of Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Surgut, Russian Federation*

[2] *Surgut State University, Surgut, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0009-0003-9913-3283,* ✍ *trol.8@inbox.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3243-2751, taras.gavrilenko@gmail.com*

[c] *ous.tutor.phinma@mail.ru*

*Abstract:* we conducted a virtual experiment using the educational versions of nanoCAD and Tinkercad to study electric drive control systems for a ventilation system. We developed and tested simplified virtual models of direct motor starting, remote starting through a controller, and remote

starting with automatic activation based on a temperature sensor signal as an example of an IoT-based control system. We compared these control architectures to trace the transition from relay switching, direct-start circuits to software- and hardware-based systems capable of storing data in cloud services. We focused on the interaction logic between system components and evaluated the use of modern development and simulation tools for virtual testing. The results provide a basis for developing digital twins of industrial systems and for their subsequent integration into artificial intelligence of things (AIoT) applications.

*Keywords:* virtual stand, ventilation system, digital factory, extensive automation.

*Acknowledgements:* this study is a part of the government contract No. FNEF-2024-0001 Development and Implementation of Trusted AI Systems Using New Mathematical and Algorithmic Methods; Fast Computing Models on Domestic Hardware awarded to the Kurchatov Institute (1023032100070-3-1.2.1).

*Cite this article:* Ismailov E. M., Gavrilenko T. V., Semenov O. Yu. Simulation of a Virtual IoT System for Remote Engine Monitoring and Control Using Temperature Hysteresis and Manual Control. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):79–85.

*Original article submitted: 08.08.2026.* *Revision submitted: 23.09.2026.*

**Введение**

С каждым годом умные системы все больше входят в нашу жизнь, меняя все принципы управления технологическими процессами и бизнесом. Сегодня системы IoT (Internet of Things — интернет вещей) активно используются как в повседневной жизни (например, в фитнес-браслетах или в системах умных светофоров), так и в промышленном секторе (например, контроль биения вала электродвигателя). Фактически IoT — это устройства, которые взаимодействуют друг с другом через облачные хранилища данных или серверы. В качестве чувствительных элементов выступают различные датчики температуры и давления, которые фиксируют изменение физических параметров контролируемой среды, передавая в режиме реального времени выходные сигналы на сервер или на облачные хранилища. После обработки полученных данных система предпринимает какие-либо действия сама или отправляет необходимую информацию оператору. Таким образом, IoT-система помогает в режиме реального времени получить информацию о контролируемых процессах. Это выгодно тем, что помогает удаленно отслеживать интересующие параметры, а также предугадывать и пресекать неблагоприятные исходы как для здоровья человека (например, чрезмерную нагрузку на организм), так и для технологического процесса (преждевременный износ подшипников и разрушение электрической машины) [1, 2].

Архитектура IoT-системы состоит из четырех тесно взаимосвязанных компонентов (рисунок 1):

1. Измерительные устройства (датчики).
2. Системы передачи данных (сетевые шлюзы и каналы связи).
3. Системы обработки информации (серверы или облачные хранилища).
4. Панели контроля и управления.

Несмотря на обилие решений в данной области, исследования в этом направлении не теряют своей актуальности. IoT-технология является основой для внедрения ИИ, поскольку именно она дает возможность создавать цифровые двойники предприятий для отслеживания в режиме реального времени всех параметров действующего оборудования, осуществления его контроля и управления им [3].

**Структура моделируемого стенда**

Для построения стенда была выбрана трехуровневая структура IoT-системы: исполнительные и измерительные устройства (нижний уровень), программно-логический контроллер (средний уровень), а также сервер обработки данных и устройства управления (верхний уровень) [3, 4].

**Аппаратная часть**

В нижний уровень (исполнительное и измерительное устройство) стенда входят датчик температуры (TMP36) и двигатель постоянного тока. В данном исполнении потенциометр имитирует изменения температуры, регистрируемые датчиком. Светодиод выступает в качестве ви-

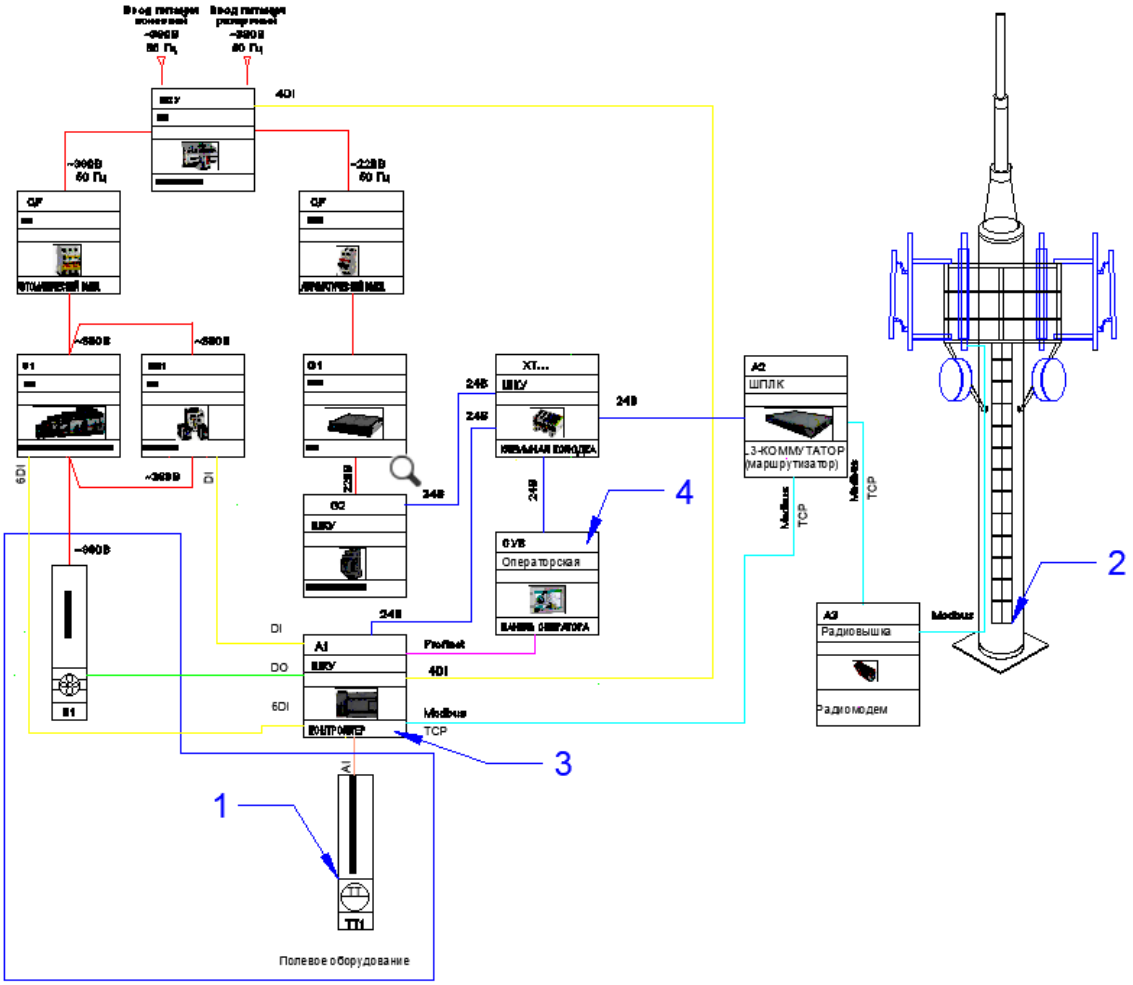



**Рис. 1.** *Схема IoT-системы*

зуального индикатора, сигнализирующего о подаче напряжения на двигатель. Последовательно подключенный к светодиоду резистор необходим для ограничения тока.

Средний уровень (ПЛК) стенда состоит из платы микроконтроллера Arduino Uno R3. Данный уровень осуществляет автоматическое управление процессом включения и отключения электропривода на основе данных от датчика температуры (TMP36). Применяемый транзистор выполняет функцию электрически переключающегося ключа.

Верхний уровень (устройства управления) позволяет осуществлять визуальный контроль работы электродвигателя, менять уставки параметров, подключать или отключать местное управление двигателем. Пост 1 является кнопкой на панели (мнемосхема) оператора, которая при ее нажатии может добавлять или исключать управление двигателем по месту (пост 2).

### Цель исследования

Цель экспериментального исследования заключалась в определении наиболее эффективной и гибкой схемы управления двигателем постоянного тока на примере системы вентиляции. Были смоделированы и протестированы упрощенные схемы: прямого пуска двигателя, дистанционного пуска двигателя через контроллер, а также дистанционного пуска двигателя по сигналу от датчика температуры с сохранением возможности по команде с верхнего уровня добавлять в систему местное управление.

### Описание виртуального стенда

Для проведения эксперимента были собраны три упрощенные схемы, сохраняющие принцип работы физического оборудования системы вентиляции:

1. Схема прямого пуска является классическим вариантом запуска двигателя постоянного тока. Она реализована без систем измерения и контроля. Включение и отключение привода производятся с помощью ручного нажатия на кнопку поста управления, исключая возможность плавного регулирования скорости вращения якоря и дистанционного управления состоянием электропривода (рисунок 2).

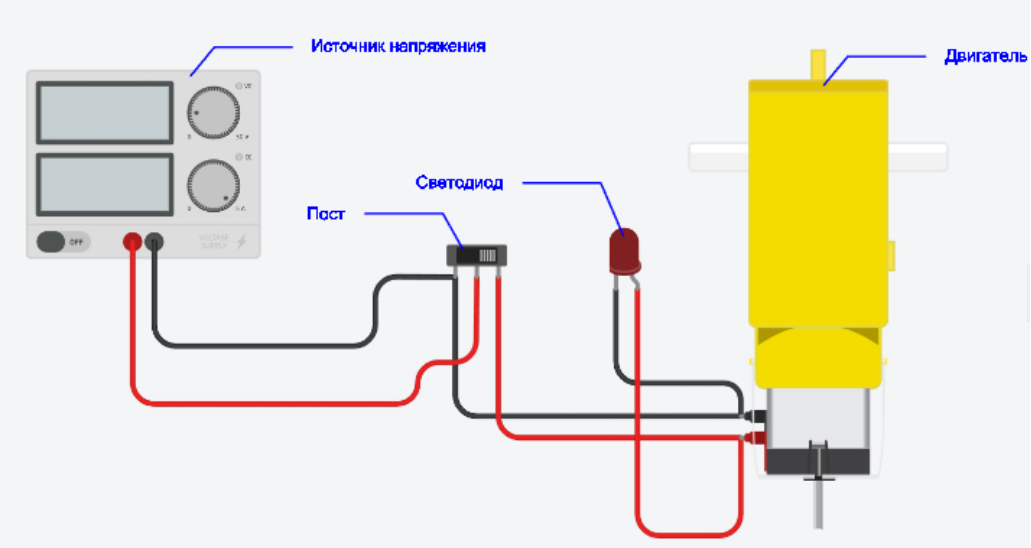



**Рис. 2.** *Прямой пуск двигателя*

2. Дистанционный пуск двигателя через контроллер: управление двигателем осуществляется дистанционно с панели оператора. Сигнал отправляется на вход контроллера (ПЛК), который, в свою очередь, управляет физическим оборудованием (рисунок 3).

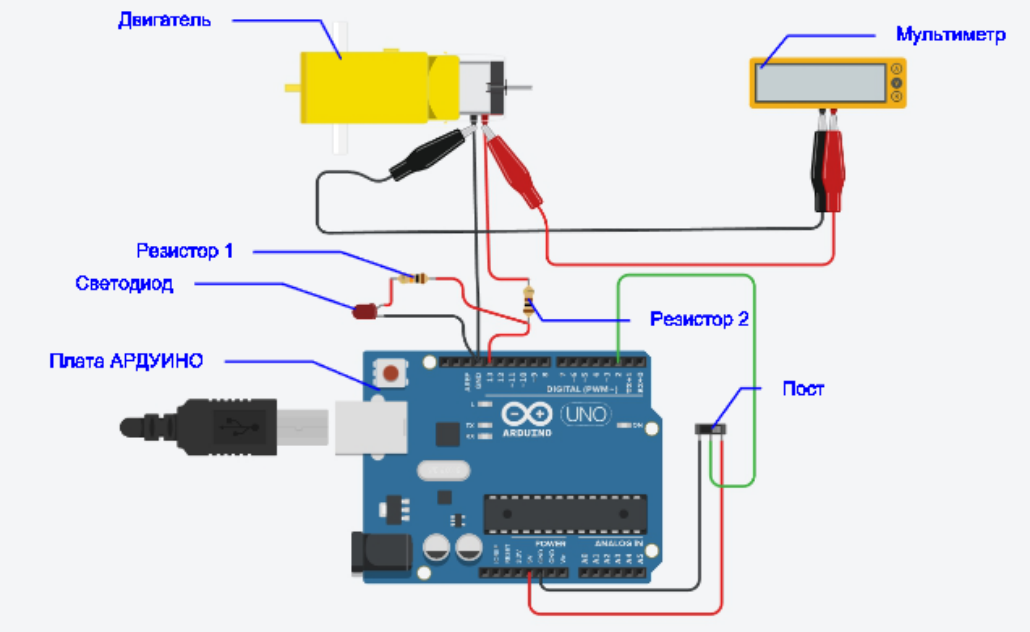



**Рис. 3.** *Дистанционный пуск двигателя через контроллер*

3. Дистанционный пуск двигателя и запуск по сигналу от датчика температуры: стенд включает в себя программируемый логический контроллер (ПЛК), датчик температуры, виртуальный пост (пост 1) управления, который добавляет или исключает физическое управление по месту (пост 2). Пуск двигателя осуществляется автоматически по причине достижения заданного порогового значения температуры окружающей среды, которая анализируется ПЛК, после чего выдается управляющий сигнал (пуск/стоп) на физическое оборудование (рисунок 4).

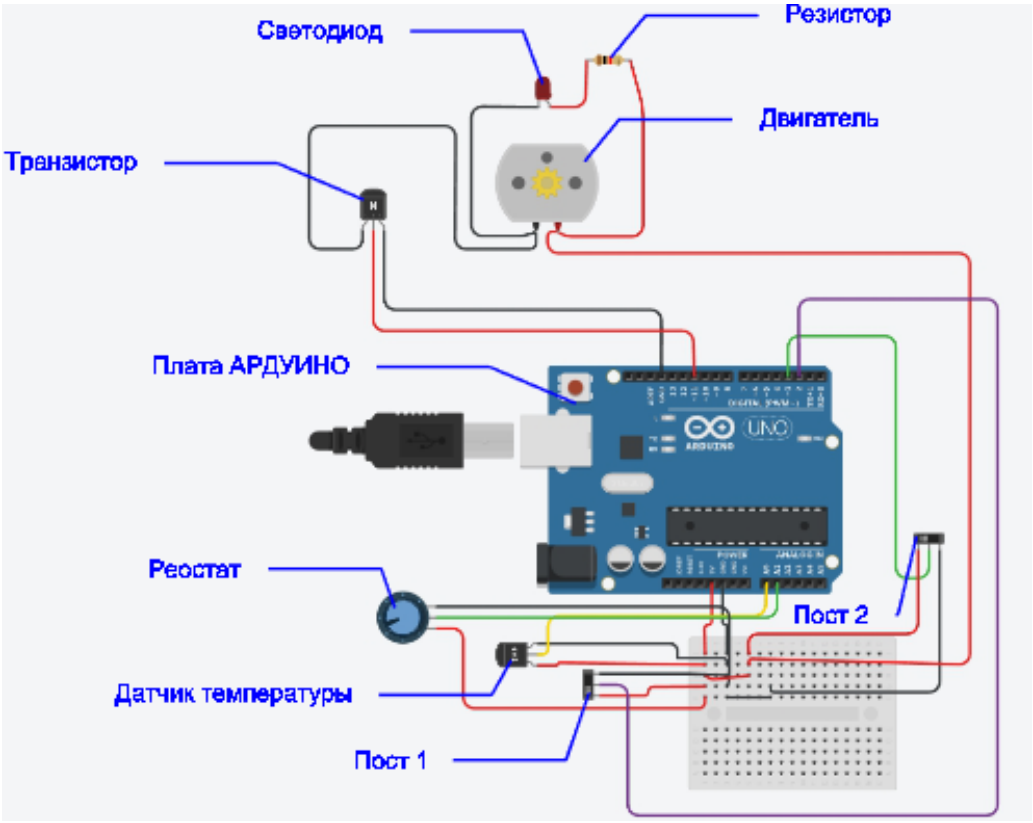



**Рис. 4.** *Дистанционный пуск двигателя и запуск по сигналу от датчика температуры*

**Результаты эксперимента**

Результаты испытаний представлены в таблице.

**Анализ выходных данных**

1. Схема прямого пуска показала классическую простоту и надежность релейно-контакторных элементов. Главными недостатками данной схемы являются отсутствие в ней автоматизации и невозможность дистанционного управления ею без дополнительных силовых элементов.

2. Модель дистанционного пуска электродвигателя показывает серьезные преимущества перед схемой прямого пуска благодаря наличию цепи управления на базе ПЛК. Несмотря на то, что для оперативного персонала визуальных изменений не происходит, внедрение ПЛК исключает необходимость идти к посту управления, чтобы остановить электропривод. Управление пуском и остановом электродвигателя системы вентиляции осуществляется дистанционно, непосредственно с автоматизированного рабочего места (АРМ) оператора.

3. Система дистанционного пуска двигателя и запуска по сигналу с датчика температуры полностью подтвердила преимущества и работоспособность автоматизированных систем. В ходе эксперимента при повышении температуры виртуального датчика выше температурной уставки (имитация нагрева с помощью потенциометра) ПЛК точно отрабатывал алгоритмы и выдавал сигнал на включение двигателя системы вентиляции. При этом интеграция датчика через АРМ оператора в уже существующую модель дистанционного пуска электрического двигателя прошла успешно, что показывает гибкость модернизации системы без остановки работающего оборудования. Важно подчеркнуть, что в данной реализации сохранен прямой пуск двигателя, соответственно, можно говорить о преимуществах данной схемы, которая вобрала в себя сильные стороны всех остальных экспериментальных моделей.

**Выводы по эксперименту**

В ходе проведенного эксперимента были успешно протестированы три схемы управления электрическим двигателем системы вентиляции.

*Таблица*

*Результаты экспериментального исследования*

| Параметр | Схема 1 (прямой пуск двигателя) | Схема 2 (дистанционный пуск двигателя через контроллер) | Схема 3 (дистанционный пуск двигателя и запуск по сигналу от датчика температуры) |
|---|---|---|---|
| Модуляция пуска | С кнопки на посту | Ручной с удаленной панели оператора | Автоматически от датчика температуры и с удаленной панели оператора |
| Наличие контроллера | Нет (напрямую через релейно-контакторные элементы схемы) | Да (ПЛК фиксирует нажатие кнопки и выдает управляющий сигнал на релейно-контакторные элементы схемы) | Да (ПЛК обрабатывает изменение сигнала от датчика или фиксирует нажатие кнопки, после выдает управляющий сигнал на релейно-контакторные элементы схемы) |
| Присутствие обратной связи | Нет (возможен только визуальный контроль) | Есть (сигнал от кнопки на панели оператора о запуске двигателя) | Есть (сигнал от кнопки или от датчика температуры на панели оператора о запуске двигателя) |
| Время выполнения команды | Мгновенное замыкание релейно-контакторных элементов схемы | Существует небольшая задержка времени между обработкой команды контроллером и замыканием релейно-контакторных элементов схемы | При дистанционном пуске существует небольшая задержка между обработкой команды контроллером и замыканием релейно-контакторных элементов схемы. При запуске по причине преодоления порогового значения температуры должно выполняться условие (температура > порогового значения) |
| Гибкость системы | Отсутствует (для изменения логики работы нужно перебирать электрическую схему) | Есть (логику можно изменять с помощью программного кода в ПЛК, например, увеличивать время запуска двигателя) | Есть (логику можно изменять с помощью программного кода в ПЛК или с панели оператора изменить пороговые значения датчика) |
| Интеграция новых элементов | Отсутствует (для подключения новых элементов нужно пересобирать схему) | Сигнал может быть добавлен дистанционно | Сигнал или оборудование могут быть интегрированы дистанционно или через панель оператора |

Целесообразность прямого пуска остается актуальной для простых систем, в которых не требуется автоматизация.

Внедрение ПЛК дает возможность для осуществления дистанционного управления и создает основу для расширения функциональных возможностей электрической машины и ее защиты.

Добавление датчика температуры сразу же перевело установку в разряд автоматических систем, открыв возможность работать без участия человека (рисунок 4), но при этом сохраняя

возможность в нештатной ситуации осуществить управление по месту (пуск/останов).

Возможность дистанционного добавления в систему устройств контроля и управления (датчики, панели управления) в виртуальном исполнении подтверждает высокую управляемость и контроль состояния всего оборудования. Это открывает широкие возможности для IoT-систем, которые являются основой для последующего внедрения ИИ.

На сегодняшний день научно-технический сектор полностью сформировал базу для перехода из автоматизации в высокую автоматизацию, где участие человека в технологических процессах сводится к минимуму. Для осуществления перехода промышленный и энергетический сектор находятся на необходимом техническом уровне, а внедрение IoT-систем поможет подойти вплотную к развертыванию программы цифровых предприятий с нейронным управлением (AIoT-системы), где будет задействовано минимальное количество оперативного персонала, что напрямую ведет к повышению уровня безопасности и эффективности предприятия и, соответственно, к экономическому росту.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Промышленный интернет вещей*. М.: АПР; 2020. 72 с. Режим доступа: https://investmoscow.ru/media/3340535/03-промышленный-интернет-вещей.pdf.
2. Маторин С. И., Гуль С. В. Информационно-аналитическая технология будущего — интернет вещей (IoT). *Научный результат. Информационные технологии*. 2023;8(4):70–77. DOI: 10.18413/2518-1092-2023-8-4-0-7.
3. Утегенов Н. Б. Интернет вещей (IoT) и информационные системы. *Universum: технические науки*. 2023;7–1(112):30–34. DOI: 10.32743/UniTech.2023.112.7-1.30-34.
4. Касатиков Н. Н., Фадеев А. Д., Умаров Ш. М., Брехов О. М. Тенденции развития программных систем для обработки и анализа больших данных устройств интернета вещей (IoT). *Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки*. 2022;16(2):41–49. DOI: 10.31161/1995-0675-2022-16-2-41-49.

# АЛГОРИТМ ОБРАТИМОГО СЖАТИЯ СЕРИЙ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ВЫБОРОЧНЫМ УСТРАНЕНИЕМ МЕЖКАДРОВОЙ ИЗБЫТОЧНОСТИ

**Д. В. Краюшкин**

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Российская Федерация*

*ORCID: https://orcid.org/0009-0004-5474-1397,* ✍ *KrayushkinDenV@yandex.ru*

*Аннотация:* рост числа и разрешающей способности исследований компьютерной томографии увеличивает нагрузку на цифровые архивы медицинских организаций, тогда как обратимое сжатие остается обязательным условием. Схемы обратимого сжатия, допущенные стандартом обмена медицинскими изображениями, являются внутрикадровыми и не используют корреляцию соседних срезов, а известные межкадровые методы принимают решение о способе предсказания для кадра целиком, без учета того, как внутри кадра распределены однородные и контурные области. В работе предложен алгоритм обратимого кодирования серий медицинских изображений, расширяющий стандарт JPEG-LS этапом выборочной межкадровой декорреляции ошибок предсказания. Кадр разбивается на неперекрывающиеся блоки размером восемь на восемь пикселей; блоки, содержащие анатомические границы, выделяются детектором Кэнни, и для каждого из них в опорном (предыдущем) кадре осуществляется поиск пространственно-согласованного блока по критерию нормированной взаимной корреляции. Для таких блоков кодируется разность ошибок предсказания текущего и опорного (предыдущего) блоков, что снижает дисперсию кодируемой величины на входе энтропийного кодера. Экспериментальная проверка на восемнадцати сериях компьютерной томографии общим объемом 6213 кадров дала средний прирост коэффициента сжатия 18,44 % и 22,81 % по сравнению с JPEG-LS и JPEG2000.

*Ключевые слова:* обратимое сжатие, медицинские изображения, межкадровая избыточность, оценка смещения, компьютерная томография.

*Для цитирования:* Краюшкин Д. В. Алгоритм обратимого сжатия серий медицинских изображений с выборочным устранением межкадровой избыточности. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):86–91.

*Поступила в редакцию: 07.08.2026.* *В окончательном варианте: 11.09.2026.*

# LOSSLESS COMPRESSION ALGORITHM FOR MEDICAL IMAGE SEQUENCES WITH SELECTIVE INTER-FRAME REDUNDANCY REDUCTION

**D. V. Krayushkin**

*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

*ORCID: https://orcid.org/0009-0004-5474-1397,* ✍ *KrayushkinDenV@yandex.ru*

*Abstract:* the increasing number and resolution of computed tomography examinations place a growing burden on medical image archives, while lossless compression is required for diagnostic images. The lossless compression schemes specified by the medical image interchange standard are intra-frame and do not exploit correlations between adjacent slices. Existing inter-frame methods, in turn, typically select a prediction mode for an entire frame and therefore do not account for the distribution of homogeneous and edge regions within the frame. We developed a lossless coding algorithm for medical image series that extends JPEG-LS with selective inter-frame decorrelation of prediction errors. We partitioned each frame into non-overlapping $8 \times 8$-pixel blocks and identified blocks containing anatomical boundaries using the Canny edge detector. For each selected block, we searched the preceding frame for a spatially corresponding block using normalized cross-correlation. We then encoded the difference between the prediction errors of the current and reference blocks, thereby reducing the variance of the values supplied to the entropy coder. Experiments on 18 computed tomography series comprising 6,213 frames showed mean compression-ratio gains of 18.44% over JPEG-LS and 22.81% over JPEG2000.

*Keywords:* lossless compression, medical images, inter-frame redundancy, displacement estimation, MRI.

*Cite this article:* Krayushkin D. V. Lossless Compression Algorithm for Medical Image Sequences with Selective Inter-Frame Redundancy Reduction. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):86–91.

*Original article submitted: 07.08.2026.* *Revision submitted: 11.09.2026.*

**Введение**

В распределенной архитектуре PACS/РИС исследования сначала накапливаются в локальных архивах лечебно-профилактических учреждений и лишь затем передаются на центральный сервер, поэтому емкость архивов и пропускная способность каналов связи становятся определяющими ограничениями [1]. Сжатие медицинских изображений при этом должно быть обратимым (без потерь): потеря диагностически значимой информации недопустима.

Стандарт JPEG-LS (ISO/IEC 14495-1 [2]) допущен DICOM [3] в качестве обратимой схемы наряду с JPEG, RLE, JPEG 2000, High-Throughput JPEG 2000 и JPEG XL. В его основе лежит алгоритм LOCO-I: предсказание медианным детектором границ (Median Edge Detector, MED), контекстное моделирование по градиентам соседних пикселей и кодирование ошибок предсказания кодами Голомба–Райса [4]. В гладких областях дисперсия ошибки предсказания остается низкой, а вблизи границ и текстурных переходов существенно возрастает [5]. Все эти схемы внутрикадровые и не используют корреляцию соседних снимков, высокий уровень которой в некоторых типовых исследованиях отмечен в обзоре [6].

Эталоном схем с предсказанием принято считать кодек CALIC [7]. Трехмерный метод на основе предикторов минимальной скорости превосходит JPEG-LS, JPEG 2000, CALIC и HEVC более чем на 15 % и 12 % для 8- и 16-битных данных соответственно [8]. Переключение между внутри- и межкадровым предсказанием по степени корреляции соседних срезов реализовано в работах [9] и [10], а Гильмутдинов М. Р. и Веселов А. И. кодируют расхождение текущего и опорного кадров с переназначением опорного кадра при значительном отличии [11]. Во всех этих схемах решение о межкадровой обработке принимается для кадра целиком, без учета того, как внутри него распределены однородные и контурные области, а блочная оценка смещения, лежащая в основе видеокодирования, при обратимом сжатии медицинских серий практически не применяется. Между тем наибольший выигрыш межкадровое снижение избыточности дает именно в областях с выраженными границами.

В настоящей работе предложен согласованный со стандартом JPEG-LS алгоритм ESIC (Edge-Selective Interframe Coding, контурно-селективное межкадровое кодирование). Контурные блоки текущего кадра выделяются детектором Кэнни, для каждого из них в опорном кадре по критерию нормированной взаимной корреляции (Normalized Cross-Correlation, NCC) находится пространственно-согласованный блок, и вместо внутрикадровой ошибки предсказания кодируется разность ошибок предсказания этих блоков. Энтропийное кодирование и контекстная модель стандарта не изменяются.

**Алгоритм межкадрового обратимого кодирования**

Пусть кадр $I$ — матрица размером $H \times W$ значений интенсивности пикселей с координатами $(x, y)$, а $I_{\text{тек}}$ и $I_{\text{оп}}$ — текущий и опорный (предыдущий) кадры серии. Алгоритм ESIC состоит из десяти шагов.

**Шаг 1. Выделение контуров.** К текущему кадру применяется детектор границ Кэнни [12], формирующий бинарную маску $E$: контурным пикселям соответствует $E(x, y) = 1$. Маска выделяет границы анатомических структур, где ошибка предсказания MED наибольшая.

**Шаг 2. Разбиение на блоки.** Кадр разбивается на неперекрывающиеся блоки размером $m \times m$ ($m = 8$); множество координат пикселей блока с номером $n$ обозначим $\Omega_n$, $n = 1, \ldots, N_{\text{бл}}$.

**Шаг 3. Классификация блоков.** Блок считается контурным, если содержит хотя бы один контурный пиксель:

$$\delta_{\text{бл}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists\,(x,y) \in \Omega_n : \; E(x,y) = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Контурные блоки кодируются в межкадровом режиме, однородные ($\delta_{\text{бл}}(n) = 0$) — во внутрикадровом; значения $\delta_{\text{бл}}(n)$ образуют карту режимов $K$.

**Шаг 4. Оценка смещения.** Для каждого контурного блока перебираются все позиции блока-кандидата в окне поиска $w \times w$ ($w = 16$) опорного кадра с центром в положении блока, и для каждого смещения $u = (dx, dy)$ вычисляется коэффициент нормированной взаимной корреляции с вычитанием среднего:

$$\rho(u) = \frac{\sum\limits_{(x,y)\in B} \big[I_{\text{тек}}(x,y) - \overline{I}_{\text{тек}}\big]\big[I_{\text{оп}}(x+dx,y+dy) - \overline{I}_{\text{оп}}(u)\big]}{\sqrt{\sum\limits_{(x,y)\in B} \big[I_{\text{тек}}(x,y) - \overline{I}_{\text{тек}}\big]^2}\sqrt{\sum\limits_{(x,y)\in B} \big[I_{\text{оп}}(x+dx,y+dy) - \overline{I}_{\text{оп}}(u)\big]^2}}, \tag{2}$$

где $\overline{I}_{\text{тек}}$, $\overline{I}_{\text{оп}}(u)$ — средние значения интенсивности блоков, $B$ — множество координат пикселей блока. Пространственно-согласованным считается блок-кандидат с наибольшим значением $\rho(u)$:

$$u^* = (dx,dy) = \arg\max_u \rho(u), \tag{3}$$

причем $|dx|, |dy| \le (w-m)/2 = 4$. Значение $\rho(u)$ не меняется при линейном изменении интенсивности и контраста, которое возможно между соседними срезами КТ. Векторы смещения контурных блоков образуют карту $M$.

**Шаг 5. Внутрикадровое предсказание.** Для каждого пикселя по левому $a$, верхнему $b$ и верхне-левому $c$ соседям вычисляются предсказанное значение и ошибка предсказания:

$$P(x,y) = \text{MED}(a,b,c), \tag{4}$$

$$e(x,y) = I(x,y) - P(x,y). \tag{5}$$

Верхне-правый сосед $d$ в предсказании не участвует и используется при вычислении градиентов контекстной модели.

**Шаг 6.** Режим серий выполняется согласно ISO/IEC 14495-1 без изменения алгоритма, но только в однородных блоках; в контурных блоках все пиксели кодируются в регулярном режиме.

**Шаг 7. Межкадровая разность ошибок.** Для пикселей контурного блока тем же предсказателем MED вычисляется ошибка предсказания $e_{\text{оп}}$ пространственно-согласованного пикселя опорного кадра и межкадровая разность

$$d_e(x,y) = e_{\text{тек}}(x,y) - e_{\text{оп}}(x+dx,y+dy). \tag{6}$$

Для пространственно-согласованных блоков $e_{\text{тек}} \approx e_{\text{оп}}$, поэтому распределение $d_e$ сосредоточено вблизи нуля и имеет меньшую дисперсию, чем $e_{\text{тек}}$.

**Шаг 8.** Энтропийное кодирование остатков кодом Голомба–Райса и обновление контекстной статистики выполняются согласно ISO/IEC 14495-1 без изменения алгоритма. Выбор параметра кода $k$ и обновление накопителей $A(q), B(q), N(q)$ контекста $q$ при этом выполняются над фактически закодированной величиной

$$e(x,y) = \begin{cases} d_e(x,y), & \text{если } \delta_{\text{бл}}\big(n(x,y)\big) = 1, \\ e_{\text{тек}}(x,y), & \text{иначе,} \end{cases} \tag{7}$$

где $n(x,y)$ — номер блока, содержащего пиксель $(x,y)$. Контекстная статистика накапливается по реальному распределению кодируемой величины, а кодер и декодер обновляют контекст синхронно одной и той же величиной, что сохраняет обратимость. Результат шага — поток остатков $B_e$.

**Шаг 9. Кодирование карты смещений.** Карта $M$ кодируется двумя частями: битовой картой режимов $K$ (один бит на блок) и составляющими $dx$, $dy$ только для контурных блоков, которые отображаются на неотрицательные индексы и кодируются кодом Голомба–Райса с отдельным параметром $k$ для каждой составляющей. Результат шага — поток $B_M$.

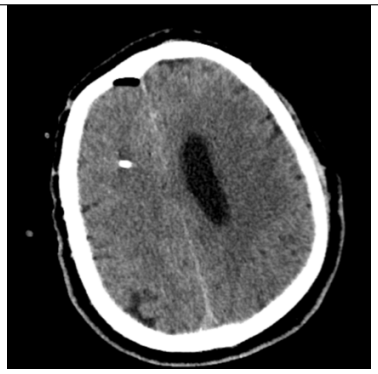
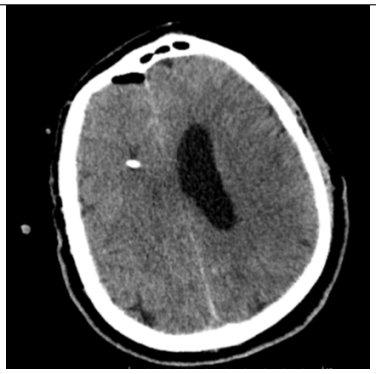
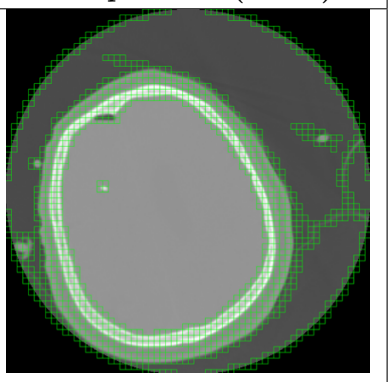
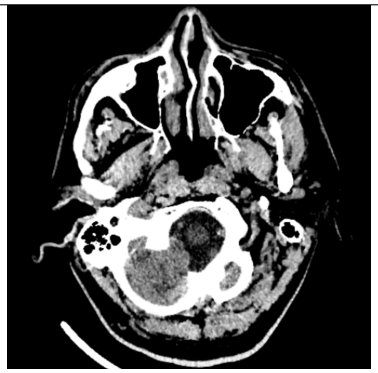
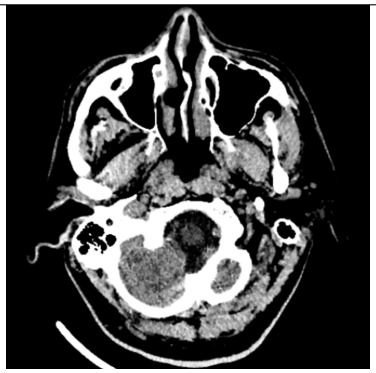
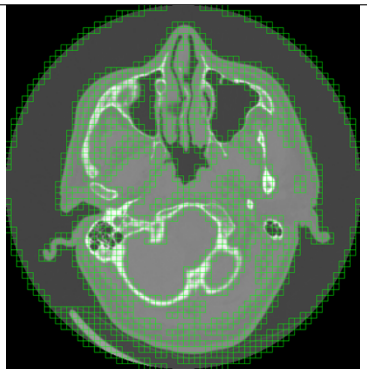
**Шаг 10. Выходной поток $B = B_M + B_e$.** Декодер сначала восстанавливает $K$ и $M$, что определяет для каждого пикселя, закодирована величина $d_e$ или $e_{\text{тек}}$, затем выполняет симметричную кодированию процедуру: к декодированной разности $d_e$ прибавляется ошибка $e_{\text{оп}}$, вычисленная по восстановленному опорному кадру, и кадр восстанавливается побитово.

**Применение алгоритма**

В таблице 1 для двух пар соседних кадров КТ отмечены блоки, которые алгоритм отобрал для межкадрового кодирования.

*Таблица 1*

*Кадры КТ и блоки, отобранные для межкадрового кодирования*

| | **Текущий кадр** | **Опорный кадр** | **Области для сжатия предложенным алгоритмом (ESIC)** |
|---|---|---|---|
| КТ1 |  |  |  |
| КТ2 |  |  |  |

Выборка включает 7 исследований головы и шеи, выполненных на сканерах различных производителей, — 18 серий и 6213 кадров. В нее вошли мягкотканые (Head), костные (Bone, Spine) и контраст-усиленные (CE) серии, включая КТ-ангиографию (CTA 0.5 CE), а также серии с межкадровым расстоянием 5–8 мм; обозначения взяты из метаданных DICOM. Для всех кадров подтверждено побитовое совпадение восстановленного изображения с исходным. Результаты приведены в таблице 2.

**Обсуждение результатов**

В среднем по 18 сериям предложенный алгоритм увеличил коэффициент сжатия на 18,44 % относительно JPEG-LS и на 22,81 % относительно JPEG2000; по отдельным сериям выигрыш относительно JPEG-LS составил от +5,06 до +28,39 %. Наибольший прирост дали контраст-усиленные серии: +24,01 % и +27,04 % соответственно, в них за счет введенного контраста, помимо костных структур, выражены контуры сосудов и внутренних органов, где алгоритм и устраняет межкадровую избыточность. Для мягкотканых серий прирост составил +19,61 % и +25,47 %, для костных — +8,84 % и +11,52 %; на костных сериях черепа он минимален (+6,83 % относительно JPEG-LS), а JPEG2000 на них не уступает JPEG-LS. У мягкотканых серий без контраста выявлено снижение выигрыша относительно JPEG-LS с ростом толщины среза, в том числе в пределах одного исследования: +27,05 % при 0,5 мм, +18,55 % при 1,0 мм и +10,40 % при 5,0 мм; контраст-усиленные серии толщиной 8,0 мм при этом дают около +25 %.

**Заключение**

Предложен алгоритм ESIC, расширяющий JPEG-LS выборочным устранением межкадровой избыточности: для контурных блоков кодируется разность ошибок предсказания текущего блока и пространственно-согласованного блока опорного кадра, найденного по критерию NCC, а

*Таблица 2*

*Результаты сжатия КТ-исследований*

| № | Описание серии | Срез, мм | Кадров | JPEG-LS (JLS) | JPEG2000 (J2K) | Предложенный подход (ESIC) | Выигрыш ESIC/JLS, % | Выигрыш ESIC/J2K, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Head | 1,0 | 282 | 2,42 | 2,41 | 2,88 | +18,87 | +19,50 |
| | Bone | 1,0 | 282 | 2,06 | 2,06 | 2,16 | +5,06 | +4,70 |
| 2 | Head | 1,0 | 326 | 2,41 | 2,36 | 2,85 | +18,23 | +20,82 |
| | Bone | 1,0 | 326 | 1,98 | 2,01 | 2,09 | +5,80 | +4,12 |
| 3 | CTA CE | 0,5 | 1171 | 2,17 | 1,96 | 2,58 | +19,17 | +31,43 |
| 4 | Spine | 0,5 | 741 | 2,21 | 1,98 | 2,54 | +14,86 | +28,42 |
| 5 | Head | 0,5 | 438 | 2,46 | 2,29 | 3,06 | +24,71 | +33,79 |
| | Bone | 0,5 | 584 | 1,98 | 1,99 | 2,17 | +9,64 | +8,84 |
| 6 | Head | 5,0 | 31 | 2,55 | 2,36 | 2,82 | +10,57 | +19,68 |
| | Head CE | 8,0 | 26 | 2,19 | 2,15 | 2,73 | +24,90 | +26,63 |
| | Head CE | 8,0 | 26 | 2,20 | 2,21 | 2,75 | +25,00 | +24,92 |
| | Head CE | 8,0 | 26 | 2,22 | 2,22 | 2,78 | +25,59 | +25,41 |
| | Head CE | 8,0 | 26 | 2,23 | 2,21 | 2,80 | +25,37 | +26,81 |
| | Head | 0,5 | 601 | 2,31 | 2,31 | 2,95 | +27,46 | +27,59 |
| 7 | Head | 5,0 | 33 | 2,50 | 2,27 | 2,77 | +10,03 | +21,95 |
| | Head | 5,0 | 32 | 2,46 | 2,23 | 2,73 | +10,61 | +22,21 |
| | Head | 0,5 | 641 | 2,29 | 2,23 | 2,92 | +27,63 | +31,15 |
| | Head | 0,5 | 621 | 2,26 | 2,19 | 2,90 | +28,39 | +32,57 |
| **ИТОГО** | **18 серий, 7 исследований** | — | **6213** | **2,27** | **2,19** | **2,69** | **+18,44** | **+22,81** |

контекстная модель и энтропийное кодирование стандарта не изменяются. На 18 сериях КТ (6213 кадров) средний коэффициент сжатия составил 2,69 против 2,27 у JPEG-LS и 2,19 у JPEG2000 (+18,44 % и +22,81 %), выигрыш получен во всех сериях. Наибольший прирост дали контраст-усиленные и мягкотканые серии, наименьший — костные.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов А. В., Краюшкин Д. В., Куликов И. В., Соломинов М. В., Чеповский А. М. Современные подходы к сопровождению медицинских информационных систем при внедрении новых технологий. *Вопросы кибербезопасности.* 2025;2:41–51. DOI: 10.21681/2311-3456-2025-2-41-51.
2. *Information Technology — Lossless and Near-Lossless Compression of Continuous-Tone Still Images: Baseline.* ISO/IEC 14495-1:1999. Geneva: ISO; 1999.
3. *Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM). PS3.5: Data Structures and Encoding.* Rosslyn: NEMA; 2026.
4. Weinberger M. J., Seroussi G., Sapiro G. The LOCO-I Lossless Image Compression Algorithm: Principles and Standardization into JPEG-LS. *IEEE Transactions on Image Processing.* 2000;9(8):1309–1324. DOI: 10.1109/83.855427.
5. Краюшкин Д. В. Снижение межкадровой избыточности КТ-изображений. *Международная конференция «Математические идеи академика П. Л. Чебышёва, их приложения в естественных науках и технологиях искусственного интеллекта» (Обнинск, 14–16 мая 2026 г.): сборник тезисов научной конференции.* М.: НИЯУ МИФИ; 2026. С. 144–146.
6. Гаврилов А. В., Краюшкин Д. В., Чеповский А. М. Проблемы методов сжатия медицинских изображений. *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии.* 2025;23(4):23–43. DOI: 10.25205/1818-7900-2025-23-4-23-43.

7. Wu X., Memon N. Context-Based, Adaptive, Lossless Image Coding. *IEEE Transactions on Communications*. 1997;45(4):437–444. DOI: 10.1109/26.585919.
8. Lucas L. F. R., Rodrigues N. M. M., da Silva Cruz L. A., de Faria S. M. M. Lossless Compression of Medical Images Using 3-D Predictors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2017;36(11):2250–2260. DOI: 10.1109/TMI.2017.2714640.
9. Miaou S.-G., Ke F.-S., Chen S.-C. A Lossless Compression Method for Medical Image Sequences Using JPEG-LS and Interframe Coding. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*. 2009;13(5):818–821. DOI: 10.1109/TITB.2009.2022971.
10. Sharma U., Sood M., Puthooran E. Volumetric Medical Image Compression Using Inter-Slice Correlation Switched Prediction Approach. *International Journal of Imaging Systems and Technology*. 2020;30(4):1120–1138. DOI: 10.1002/ima.22425.
11. Гильмутдинов М. Р., Веселов А. И. Способ устранения межкадровой избыточности при сжатии медицинских 3D-изображений. *Сборник докладов 18-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение — DSPA-2016»*. М., 2016. С. 832–838.
12. Canny J. A Computational Approach to Edge Detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1986;8(6):679–698. DOI: 10.1109/TPAMI.1986.4767851.

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НОРМАЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

**А. Л. Леготин[а], Г. К. Виноградов[б]**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»», г. Москва, Российская Федерация*

[а] ✍ *andrlegotin@yandex.com,* [б] *vinogradovgk@mail.ru*

*Аннотация:* ставится задача интерполяции нормали вдоль ребра криволинейного треугольника, обсуждаются проблемы интерполяции нормалей. Решена интерполяция нормали пространственной кривой.

*Ключевые слова:* интерполяция нормали, PN-кривая, треугольник Безье, криволинейный треугольник.

*Для цитирования:* Леготин А. Л., Виноградов Г. К. Интерполяция нормали пространственной кривой. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):92–100.

*Поступила в редакцию: 25.08.2026. В окончательном варианте: 27.09.2026.*

# INTERPOLATION OF NORMALS ALONG A 3D CURVE

**A. L. Legotin[a], G. K. Vinogradov[b]**

*Scientific Research Institute for System Analysis of the National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation*

[a] ✍ *andrlegotin@yandex.com,* [b] *vinogradovgk@mail.ru*

*Abstract:* we solved the problem of interpolating the normal along the edge of a curvilinear and discusses other related problems.

*Keywords:* interpolation of the normal, PN-curve, Bezier triangle, curved point-normal triangles.

*Cite this article:* Legotin A. L., Vinogradov G. K. Interpolation of Normals Along a 3D Curve. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):92–100.

*Original article submitted: 25.08.2026. Revision submitted: 27.09.2026.*

## Введение

При построении поверхности из криволинейных треугольников Безье требуется сшивка этих элементов на ребрах в целях обеспечения необходимой гладкости и непрерывности. Для этого производится расчет контрольных точек из соображений, изложенных в [1, с. 323, 368]. По этой методике два криволинейных треугольника сшиваются заданием тангенциальных плоскостей вдоль ребер — соответствующим расположением контрольных точек, определяющих эти плоскости. В итоге при построении контрольных точек криволинейного треугольника одновременно должны быть построены контрольные точки смежных треугольников.

Если тангенциальные плоскости у вершин определяются однозначно — по нормалям вершин, то срединные тангенциальные плоскости, а значит, и соответствующие контрольные точки — в зависимости от алгоритма. Контрольные точки могут быть рассчитаны отдельно для каждого смежного треугольника и сведены попарно по обеим сторонам ребра в ту или иную конфигурацию с помощью смешивающих функций, исходя из геометрии плоских треугольников и т.д.

*Результат может быть искаженным*, так как нормали в вершинах могут быть заданы одним способом (в том числе неизвестным) или произвольно (если требуется сформировать нужную геометрию), а тангенциальные плоскости на середине ребра в этом случае будут найдены другим способом, что *приведет к иной геометрии поверхности.* Все необходимые параметры корректнее определять начальными условиями — взаимным положением вершин и их нормалями, именно они в первую очередь должны влиять на вычисления.

Следовательно, если для точек ребра и нормалей ребра криволинейного треугольника существуют

$$f = r \tag{1}$$

и

$$g = \frac{N}{|N|}, \tag{2}$$

то они должны быть такими, чтобы совпадать для смежных треугольников, а значит, должны зависеть только от вершин ребра:

$$f = f(t,P_i,P_j,N_i,N_j) \tag{3}$$

$$g = g(t,P_i,P_j,N_i,N_j), \tag{4}$$

где $P_i$ и $P_j$ — вершины ребер, а $N_i$ и $N_j$ — нормали в этих вершинах, $i \neq j$, $0 \leq t \leq 1$.

При заданных в таком виде $f$ и $g$ для расчета внутренних контрольных точек не будет необходимости рассматривать смежные треугольники. Вычисленные с помощью $g$ нормали на ребрах определят тангенциальные плоскости, с опорой на которые построятся внутренние контрольные точки. Задача упрощается, при этом соблюдаются начальные условия.

$f$ может быть элементарно получена как сторона криволинейного треугольника.

$g$ необходимо сформулировать.

**Проблема интерполяции нормали вдоль ребра**

Как описано выше, для корректного построения криволинейного треугольника на одном из этапов требуется значение нормали на точках ребра. Но так как криволинейный треугольник еще не определен, нет возможности произвести непосредственное вычисление нормали поверхности вдоль ребра.

Vlachos A. и соавторы в [2] предлагают интерполировать нормаль треугольника Безье квадратичной функцией:

$$n(u,v) = \sum_{i+j+k=2} u^i v^j w^k n_{ijk} \quad = w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + v^2 n_{002} \quad + wun_{110} + uvn_{011} + wvn_{101}. \tag{5}$$

$$u,v,w \geq 0, w = 1 - u - v. \tag{6}$$

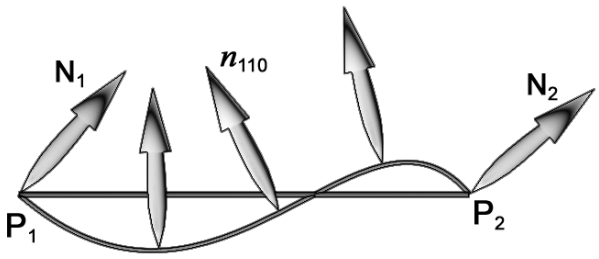



**Рис. 1.** *Заявленная интерполяция нормали [1]*

По ребрам криволинейного треугольника одна из барицентрических координат нулевая, возьмем для примера $v = 0$, и тогда нормаль:

$$n(u,0) = w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + wun_{110}, w = 1 - u. \tag{7}$$

Что можно записать как:

$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + (1-t)tN_{12}$, $0 \leq t \leq 1$, $N_1$ и $N_2$ — нормали вершин.

Коэффициент на середине ребра $N_{12}$ является по построению отраженным вектором среднего нормалей вершин:

$$n_{110} = N_{12} = \frac{h_{12}}{|h_{12}|}, h_{12} \quad = N_1 + N_2 - 2\frac{(\Delta, N_1 + N_2)}{\Delta^2}\Delta, \qquad \Delta = P_2 - P_1. \tag{8}$$

Как нетрудно заметить из $N(t)$, если обе нормали наклонены в одну сторону, то нормаль никогда не пересечет перпендикуляр ребра.

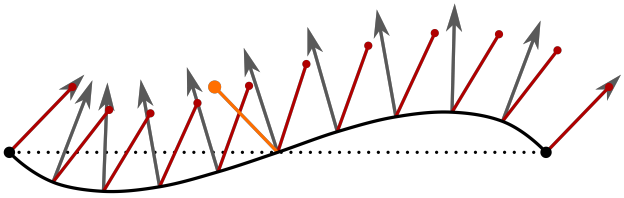


**Рис. 2.** *Интерполяция нормали по методу Vlachos — красным, отражение средней нормали — оранжевым, истинная нормаль — серым*

*Примечание*: здесь и далее под истинной нормалью подразумевается ожидаемая интерполяция нормали между вершинами. В каждой точке кривой такая нормаль должна быть перпендикулярна касательной и обеспечивать плавный переход от нормали $N_1$ к $N_2$ (нормали вершин лежат в пространстве в общем случае не в одной плоскости, то есть дополнительно могут быть перекручены относительно друг друга).

Если использовать полином Бернштейна второй степени

$$\begin{aligned} n(u,v) &= \sum_{i+j+k=2} b_{ijk,2} n_{ijk} = \sum_{i+j+k=2} \frac{2!}{i!j!k!} u^i v^j w^k n_{ijk} \\ &= w^2 n_{200} + u^2 n_{020} + v^2 n_{002} + 2wun_{110} + 2uvn_{011} + 2wvn_{101}, \end{aligned} \tag{9}$$

то после проведения аналогичных преобразований получим для ребра нормаль
$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + 2(1-t)tN_{12}$, где $N_{12}$ находится тем же способом, как выше.

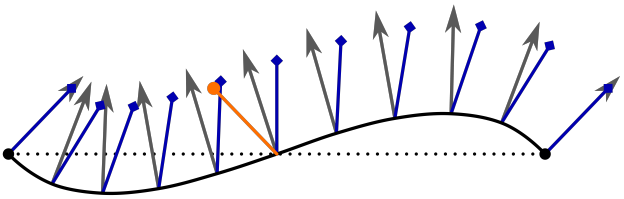


**Рис. 3.** *Интерполяция нормали полиномом Бернштейна второй степени — синим, отражение средней нормали — оранжевым, истинная нормаль — серым*

В работе van Overveld C. W. A. M. и Wyvill B. [3] используется квадратичный интерполянт:

$$N(t) = N_1 + at + bt^2, \tag{10}$$

где $a = N_2 - N_1 - b$, $b = 3\frac{(N_1+N_2,\Delta)}{\Delta^2}\Delta$, $\Delta = P_2 - P_1$.

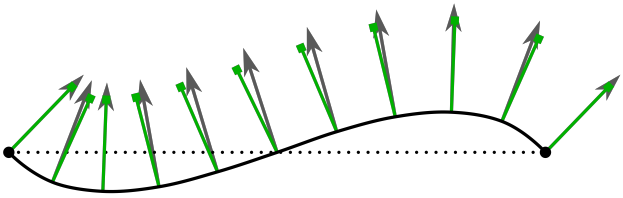


**Рис. 4.** *Интерполяция нормали по методу Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

Наиболее близкие к истинной нормали значения при данном расположении нормалей вершин дает интерполянт Overveld–Wyvill (см. рис. 5, где приведено сравнение методов интерполяции).

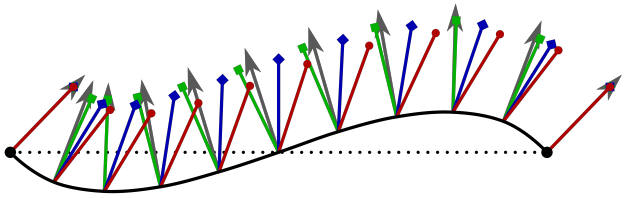


**Рис. 5.** *Сравнение методов интерполяции нормали. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

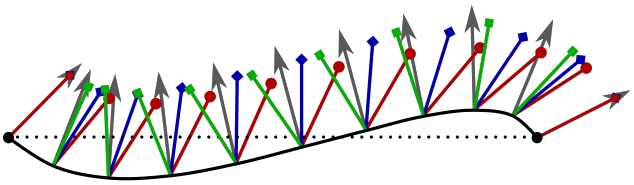


**Рис. 6.** *Сравнение методов интерполяции нормали при другом направлении нормалей в вершинах. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

Если задать несимметричное положение нормалей вершин, то значения разных методов интерполяции нормалей разойдутся сильнее (см. рис. 6).

Расхождение ожидаемо, так как типы/степени интерполирующих функций нормалей и кривых разные. Область применения вышеприведенных методов ограничена специфическими требованиями.

Для полноты картины на рис. 7 приведен результат методов интерполяции нормали на выпуклой кривой, когда нет точки перегиба.

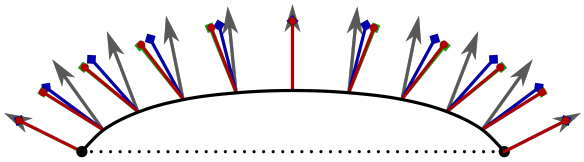


**Рис. 7.** *Сравнение методов интерполяции нормали на выпуклой кривой. Vlachos — красным, полином Бернштейна второй степени — синим, Overveld–Wyvill — зеленым, истинная нормаль — серым*

В [4] предлагается интерполировать нормаль квадратичным полиномом Бернштейна:
$N(t) = (1-t)^2 N_1 + t^2 N_2 + 2(1-t)tN_{12}$ (преобразовано для ребра)
с коэффициентом
$N_{12} = 2N(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(N_1 + N_2)$, где $N(\frac{1}{2})$ — нормаль на середине ребра.

Такая интерполяция описывает нормаль существенно корректнее из подобных методов, но требуется значение нормали на середине ребра, которая в этом алгоритме вычисляется непосредственно из поверхности. Поэтому данная интерполяция использоваться в нашем случае не может, так как поверхность еще не построена.

Воспользуемся понятием главной нормали кривой [5]:

$$N(t) = \left[\left[f'(t), f''(t)\right], f'(t)\right], \tag{11}$$

где $f(t)$ — пространственная кривая, $f'(t)$ и $f''(t)$ — первая и вторая производные соответственно.

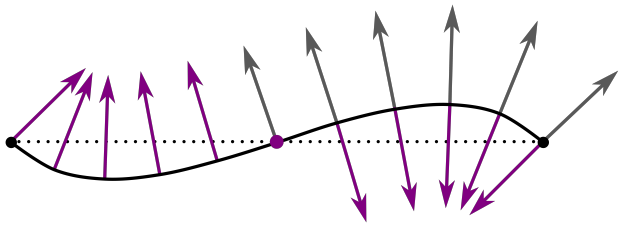


**Рис. 8.** *Главная нормаль кривой (нормализованный вектор), истинная нормаль — серым*

На плоской кривой направление главной нормали инвертируется в точке перегиба (см. рис. 8). Для наглядности перехода на рис. 9 показаны значения главной нормали без нормировки.

На кривой в пространстве главная нормаль поворачивается, следуя изгибам кривой, что в проекции выглядит аналогично рис. 9 (например, вогнутость вниз — ближе, вогнутость вверх — дальше, вектор главной нормали идет по спирали вдоль кривой и соответствующим образом укорачивается. *Примечание*: нормали при этом должны еще несколько больше сместиться в сторону кривизны, на схеме пренебрежем этим).

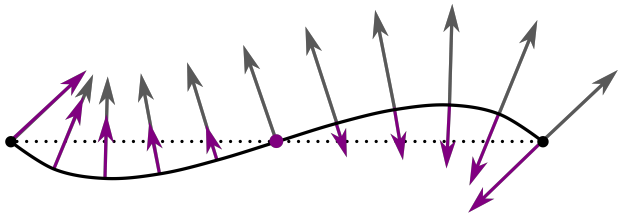


**Рис. 9.** *Главная нормаль кривой, истинная нормаль — серым*

Так как главная нормаль:

а) направлена в сторону вогнутости пространственной кривой;

б) при нулевой кривизне не определена,

то напрямую использовать главную нормаль в качестве интерполятора нормалей вершин нецелесообразно.

Проинтерполируем нормаль по кривой с помощью смешивающей функции.

Пусть $f(t)$ — пространственная кривая, $f'(t)$ — ее производная, на концах кривой заданы нормали. Определим нормаль вдоль кривой следующим образом:

$$N(t) = \left[\left[f'(t), n(t)\right], f'(t)\right], \tag{12}$$

где $n(t)$ — смешивающая функция нормалей вершин,

$$n(0) = N_1 \tag{13}$$

$$n(1) = N_2 \tag{14}$$

(см. рис. 10, где показаны основные элементы построения).

Результат совпадает с истинной нормалью на схемах выше (см. рис. 2–9, нормаль серым цветом).

Но в таком построении нормали есть особенность. Если $n(t)$ и $f'(t)$ коллинеарны, нормаль вырождается, а при смене относительного наклона $n(t)$ и $f'(t)$ нормаль инвертируется. В общем случае — не плоской кривой в пространстве — при изменении относительного наклона $n(t)$ и $f'(t)$ нормаль поворачивается тем быстрее, чем меньше угол между ними.

На рис. 11 показана область инвертирования нормали. При приближении к этой области нормаль в пространстве начинает, закручиваясь по спирали (в случае неплоской кривой), переходить в инвертированное состояние (при выходе из области — обратный процесс).

Сделать нормализацию направления и реинвертировать нормаль простыми способами не представляется возможным.

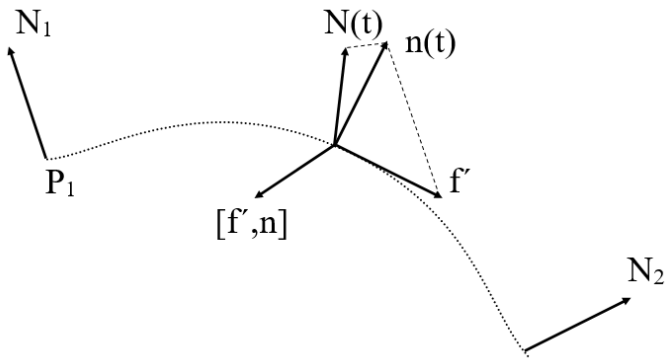



**Рис. 10.** *Интерполяция нормали*

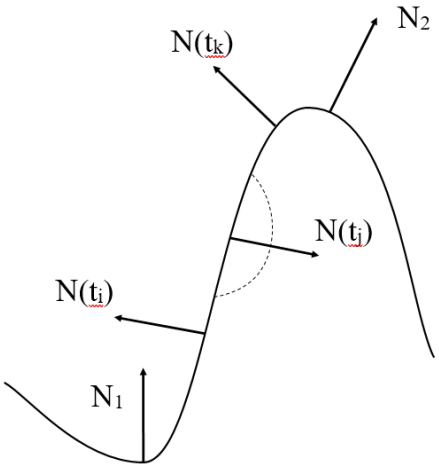



**Рис. 11.** *Инвертирование нормали. Пунктиром — область, где нормаль инвертирована*

Чтобы избежать этой особенности, несколько изменим построение.

**Нормаль кривой**

На пространственной кривой $f(t)$ введем нормаль
$N(t) = [\beta(t), f'(t)]$, где $\beta(t)$ — смешивающая функция бинормалей вершин,

$$\beta(0) = \frac{[f'(0), N_1]}{|f'(0)|}, \beta(1) = \frac{[f'(1), N_2]}{|f'(1)|}. \tag{15}$$

*Примечание*: под бинормалью здесь имеется в виду вышеприведенное построение, бинормаль кривой $[f'(t), f''(t)]$ в целом (в том числе и в вершинах) отлична от $\beta(t)$.

Так как форма кривой задана нормалями в вершинах, этим ограничена, в результате интерполируемая бинормаль $\beta(t)$ в общем случае меняется слабее (см. рис. 12) интерполированной нормали $n(t)$ (здесь $n(t)$ совпадает с $N(t)$ на схеме). Таким образом, интерполяция бинормалью вносит меньше потенциальных искажений при большей гибкости — отсутствии особенности $n(t)$.

На рис. 13 показана пространственная кривая, позиции вершин расположены и нормали в вершинах направлены так, чтобы проявилась упомянутая выше особенность. Нормаль, полученная с помощью смешивающей функции нормалей вершин, инвертируется при пересечении области, где проявляется особенность. Нормаль, определенная через бинормали, интерполируется корректно.

Искомая функция $g$ есть:

$$g(t) = \frac{N(t)}{|N(t)|} = \frac{[\beta(t), f'(t)]}{|[\beta(t), f'(t)]|}. \tag{16}$$

По аналогии с [1] совокупность $\{f, g\}$ можно назвать PN-кривой.

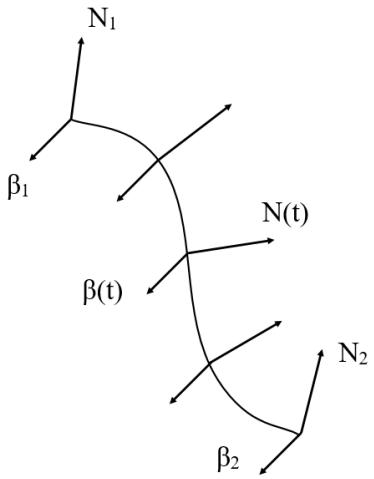
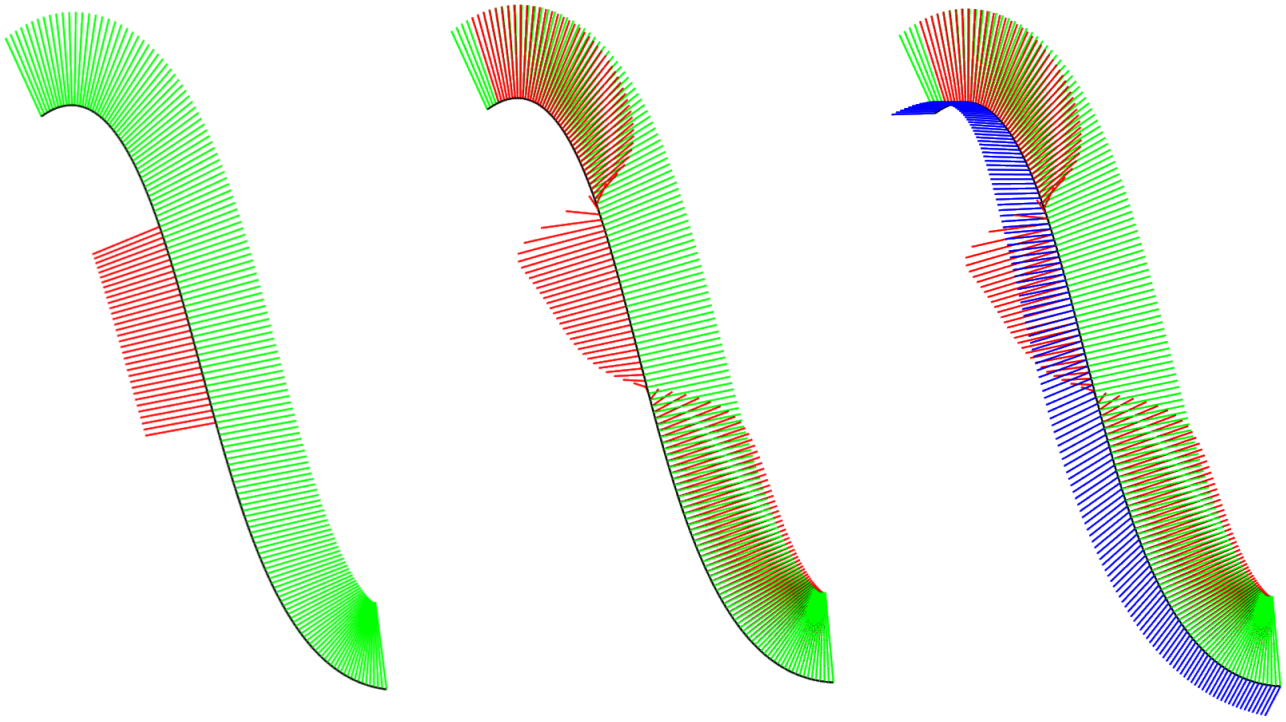



**Рис. 12.** *Сравнение изменения интерполируемой нормали и бинормали на кривой*



а) б) в)

**Рис. 13.** *Интерполяция нормали смешивающей функцией бинормалей (зеленым), смешивающей функцией нормалей вершин (красным), бинормаль (синим). а) случай плоской кривой; б–в) нормали в вершинах слегка смещены от общей плоскости; в) вид с бинормалью*

Для примера рассмотрим кубическую PN-кривую Безье:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t) p_i \\ &= (1-t)^3 p_0 + 3(1-t)^2 t p_1 + 3(1-t) t^2 p_2 + t^3 p_3 \end{aligned} \tag{17}$$

и линейную смешивающую функцию бинормалей:

$$\beta(t) = (1-t)\beta_0 + t\beta_3, \tag{18}$$

где $\beta_0 = \frac{[f'(0),n_0]}{|f'(0)|}$, $\beta_3 = \frac{[f'(1),n_3]}{|f'(1)|}$ — бинормали на концах кривой — соответственно в точках $p_0$ и $p_3$ с заданными нормалями $n_0$ и $n_3$. Контрольные точки $p_1$ и $p_2$ рассчитаны по алгоритму выше.

Подставив производную кубической кривой Безье

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t)(p_{i+1} - p_i) \\ &= 3(1-t)^2(p_1 - p_0) + 6(1-t)t(p_2 - p_1) + 3t^2(p_3 - p_2) \end{aligned} \tag{19}$$

и смешивающую функцию $\beta$ в $N$, получим:

$$\begin{aligned} N(t) &= \big[\beta(t),f'(t)\big] \\ &= 3(1-t)^3\big[\beta_0,p_1 - p_0\big] + 3(1-t)^2t\big[\beta_3,p_1 - p_0\big] \\ &\quad + 6(1-t)^2t\big[\beta_0,p_2 - p_1\big] + 6(1-t)t^2\big[\beta_3,p_2 - p_1\big] \\ &\quad + 3(1-t)t^2\big[\beta_0,p_3 - p_2\big] + 3t^3\big[\beta_3,p_3 - p_2\big]. \end{aligned} \tag{20}$$

После перегруппировки выражение примет вид

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i \\ &= (1-t)^3c_0 + 3(1-t)^2tc_1 + 3(1-t)t^2c_2 + t^3c_3 \end{aligned} \tag{21}$$

кубической кривой Безье с коэффициентами

$$c_0 = 3\,[\beta_0,p_1 - p_0] \tag{22}$$

$$c_1 = [\beta_3,p_1 - p_0] + 2\,[\beta_0,p_2 - p_1] \tag{23}$$

$$c_2 = [\beta_0,p_3 - p_2] + 2\,[\beta_3,p_2 - p_1] \tag{24}$$

$$c_3 = 3\,[\beta_3,p_3 - p_2] \tag{25}$$

$$\beta_0 = \frac{[f'(0),n_0]}{|f'(0)|} = \frac{[p_1 - p_0,n_0]}{|p_1 - p_0|} \tag{26}$$

$$\beta_3 = \frac{[f'(1),n_3]}{|f'(1)|} = \frac{[p_3 - p_2,n_3]}{|p_3 - p_2|}. \tag{27}$$

При малых углах перекручивания нормалей вершин (перекручивание по оси кривой, углы расхождения нормалей при этом могут быть много большими) линейной интерполяции вполне достаточно для многих применений.

Для лучшей точности или при экстремальных углах перекручивания линейную интерполяцию стоит заменить кватернионом поворота или поворотом вектора по формуле Родрига.

Смешивающая функция поворота бинормалей по формуле Родрига:

$$\beta(t) = \cos(t\varphi)\beta_0 + \sin(t\varphi)\,[\vartheta,\beta_0]\,, \tag{28}$$

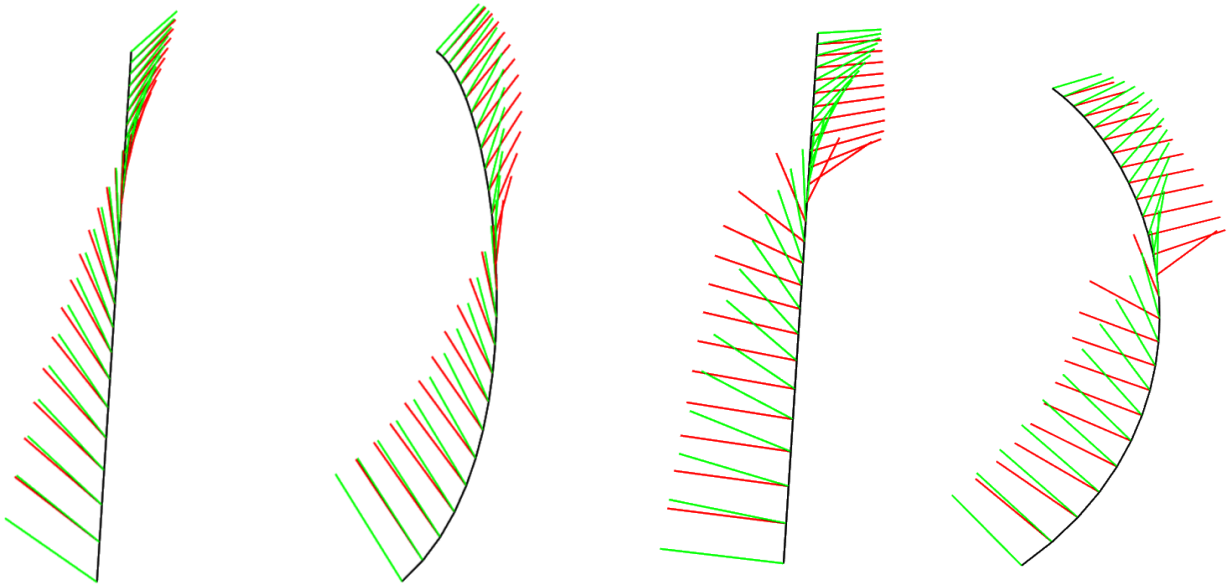
где $\varphi = \arccos\frac{(\beta_0,\beta_3)}{|\beta_0||\beta_3|}$, $\vartheta = \frac{[\beta_0,\beta_3]}{|[\beta_0,\beta_3]|}$.

На рис. 14 приведен результат интерполяции при экстремальных осевых кручениях нормалей вершин. При угле перекручивания в 90 градусов разница сравнительно небольшая между линейной смешивающей функцией и смешивающей функцией Родрига, при другом положении нормалей вершин, когда кривая дополнительно изгибается, отличие возрастает. Для сравнения на рис. 14б интерполяция с разворотом нормалей вершин в ∼180 градусов.

**Результаты**

Интерполяция нормали по кривой получилась устойчивой и универсальной, есть потенциал для расширения и обобщения.

PN-кривая может быть полезна и в других применениях. Например, в алгоритмах следования по пути (follow path) в пространстве, где необходимо сохранение естественной ориентации объекта, нормаль послужит осью ориентации. В таких алгоритмах применяются итерационные методы вычисления, а при использовании PN-кривой результат в любой точке кривой определяется непосредственно.



а) б)

**Рис. 14.** *Интерполяция нормали по кривой с экстремально развернутыми нормалями вершин (формулой Родрига — зеленым, линейной функцией — красным)*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Farin G. E. *Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide.* 5th edition. San Francisco: Morgan Kaufmann; 2002. 520 p.
2. Vlachos A., Peters J., Boyd C., Mitchell J. L. Curved PN Triangles. *Proceedings of the 2001 Symposium on Interactive 3D graphics (I3D '01).* 2001:159–166. DOI: 10.1145/364338.364387.
3. Van Overveld C. W. A. M., Wyvill B. Phong Normal Interpolation Revisited. *ACM Trans. on Graphics.* 1997;16(4):397–419. DOI: 10.1145/263834.263849.
4. Fünfzig C., Müller K., Hansford D., Farin G. PNG1 Triangles for Tangent Plane Continuous Surfaces on the GPU. *Proceedings of Graphics Interface.* 2008:219-226. DOI: 10.1145/1375714.1375751.
5. Кудрявцев Л. Д. *Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной.* М.: Физматлит; 2015. 444 с.

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЗАГРУЗКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КЛАСТЕРА МЕТОДАМИ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

**Д. А. Михалевич**
*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация*
*ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4758-4510, ✍ dmitriymikhalevich02@gmail.com*

*Аннотация:* управление ресурсами вычислительного кластера требует прогноза будущей загрузки: недооценка спроса приводит к деградации сервисов, переоценка — к избыточному резервированию и лишним затратам. В работе на данных производственной трассы Alibaba GPU Trace 2020 решается задача краткосрочного прогнозирования почасовой загрузки процессоров, графических ускорителей и оперативной памяти кластера с горизонтом в один час и тестовым окном в 168 часов. События задач агрегированы в почасовые ряды усреднением по времени. Сопоставлены пять моделей: наивный прогноз по последнему наблюдению, модель проинтегрированного скользящего среднего, рекуррентная нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью, байесовская динамическая линейная модель и многомерная модель векторной авторегрессии с отбором лагов глубиной до 168 часов. Критерии сравнения — точность прогноза, качество 99-процентного доверительного интервала, точность предсказания направления изменения и экономия резервируемых ресурсов. Наивысшую точность дает байесовская динамическая линейная модель: средняя абсолютная ошибка на 6–9 процентов ниже, чем у наивного прогноза; для оперативной памяти конкурентоспособна рекуррентная сеть, а векторная авторегрессия полезна для прогнозирования загрузки процессоров и ускорителей. Переход от резервирования по историческому максимуму к резервированию по верхней границе прогнозного интервала сокращает объем резерва на 22–30 процентов при покрытии 96–99 процентов.

*Ключевые слова:* прогнозирование временных рядов, загрузка вычислительного кластера, байесовские динамические линейные модели, векторная авторегрессия, планирование ресурсов.

*Для цитирования:* Михалевич Д. А. Прогнозирование загрузки вычислительного кластера методами анализа временных рядов. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):101–109.

*Поступила в редакцию: 09.09.2026.* *В окончательном варианте: 24.09.2026.*

# COMPUTING CLUSTER LOAD PREDICTION FROM TIME-SERIES DATA

**D. A. Mikhalevich**
*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation*
*ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4758-4510, ✍ dmitriymikhalevich02@gmail.com*

*Abstract:* we studied short-term computing cluster load prediction using the Alibaba GPU Trace 2020 production trace. We considered hourly processor, graphics accelerator, and random-access memory (RAM) loads, with a one-hour prediction horizon and a 168-hour test window. We aggregated task events into hourly time series by averaging the concurrent load over time. We compared five prediction models: a naive last-value model, an integrated moving-average model, a long short-term memory (LSTM) recurrent neural network, a Bayesian dynamic linear model, and a multivariate vector autoregression model with lag selection up to 168 hours. We evaluated prediction accuracy, 99% prediction-interval coverage, accuracy in predicting the direction of load changes, and the potential savings in reserved resources. The Bayesian dynamic linear model achieved the lowest errors, with mean absolute errors 6–9% lower than those of the naive model. The LSTM model was competitive for RAM, whereas the multivariate model performed well for processor and accelerator loads. Replacing reservation based on the historical maximum with reservation based on the upper bound of the prediction interval reduced the reserve by 22–30% while maintaining 96–99% coverage.

*Keywords:* time series forecasting, computing cluster load, Bayesian dynamic linear models, vector autoregression, capacity planning.

*Cite this article:* Mikhalevich D. A. Computing Cluster Load Prediction from Time-Series Data. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):101–109.

*Original article submitted: 09.09.2026.* *Revision submitted: 24.09.2026.*

## Введение

Развитие облачных платформ и кластеров с графическими ускорителями делает управление ресурсами одной из ключевых задач эксплуатации инфраструктуры. Статическое резервирование по пиковому значению исключает нехватку ресурсов, но систематически завышает затраты: реальная загрузка подвержена выраженной суточной и недельной цикличности [1, 2]. Альтернатива — динамическое резервирование по краткосрочному прогнозу с интервальной оценкой.

Для прогнозирования нагрузки применялись классические модели временных рядов — линейные модели загрузки узла [3] и модели проинтегрированного скользящего среднего ARIMA [4], — и методы глубокого обучения, прежде всего рекуррентные сети с долгой краткосрочной памятью LSTM [5, 6]; превосходство сложных моделей при этом не универсально [7]. Зачастую модели сравниваются по точности прогноза, тогда как для планирования ресурсов важнее верхняя граница интервала: она определяет объем резерва.

Подход, принятый в работе, состоит в том, чтобы свести планирование ресурсов к задаче анализа временных рядов. Журнал событий кластера сам по себе временным рядом не является, и способ его свертки задает то, что затем прогнозируется. Здесь для каждого ресурса строится ряд средней одновременной заявленной загрузки за час, а резервирование сводится к интервальному прогнозу этого ряда на шаг вперед. Такое сведение определяет единицу планирования, горизонт и смысл верхней границы интервала как объема резерва.

## Постановка задачи

Кластер обслуживает поток задач. Каждая задача при запуске заявляет требуемые объемы процессорного времени, занятость графических ускорителей и оперативной памяти. Суммарная заявленная загрузка, усредненная по часу, образует три временных ряда — по одному на ресурс.

Первый шаг решения — переход от журнала событий к временным рядам. Задачи запускаются и завершаются в произвольные моменты, поэтому загрузка задана не последовательностью наблюдений, а кусочно-постоянной функцией времени; выбор шага агрегации фиксирует объект прогноза и горизонт планирования. Час взят как естественная единица: за него планировщик успевает перераспределить резерв, и сохраняется суточная цикличность, ради которой прогноз и строится.

Требуется на каждом шаге по истории вплоть до предыдущего часа построить точечный прогноз на час вперед и доверительный интервал уровня 99%, верхняя граница которого назначается объемом резервируемого ресурса. Практическая цель — сократить резерв, не увеличивая риск нехватки: чем уже интервал, тем больше экономия, но тем чаще фактическая загрузка выходит за его границы.

Цель работы — разработать методологию прогнозирования спроса на ресурсы кластера: свести задачу планирования к анализу временных рядов, отобрать модели, сопоставить их на единой производственной трассе по общему набору критериев и выбрать наиболее подходящие для каждого из трех ресурсов.

## Методология

### *Данные и агрегация*

Использована трасса Alibaba GPU Trace 2020 — таблица *pai_task_table* кластера платформы PAI (около 1800 машин, более 6500 ускорителей): 1,24 млн записей с временем запуска, статусом и заявленными объемами спроса:

- *plan_cpu* — на процессорные мощности в процентах, одно ядро эквивалентно 100%;
- *plan_mem* — на оперативную память в гигабайтах;
- *plan_gpu* — на мощности графического ускорителя в процентах, 100% эквивалентно запросу на использование всех ядер и памяти графического ускорителя.

События приведены к почасовым рядам усреднением одновременной загрузки. Внутри часа строится равномерная сетка с шагом, равным минимальной длительности активной в этом часе задачи. В каждой точке берется суммарный заявленный объем ресурса работающих в этот

момент задач. Значение ряда за час — среднее по точкам:

$$y_t = \frac{1}{|S_t|} \sum_{s \in S_t} R(s), \tag{1}$$

где $S_t$ — точки сетки часа $t$, $R(s)$ — суммарный заявленный объем ресурса момента $s$.

Полный ряд покрывает 07.07 — 13.09.2020; значения по краям отражают запуск и остановку сбора трассы, поэтому оставлен интервал 15.07 — 01.09.2020 — устойчивое окно в 49 суток, или 1176 часовых точек. Последние 168 точек образуют тестовую выборку, предшествующие 1008 — обучающую.

***Разведочный анализ***

Почасовые диаграммы размаха выявили выраженную суточную сезонность: спрос на все три ресурса нарастает к 6–8 часам, снижается и вновь подходит к пику около 18 часов; тепловые карты «час — день недели» дают более слабую недельную составляющую. По расширенному тесту Дики–Фуллера ряды нестационарны в уровнях ($p$-значение от 0,10 до 0,19) и стационарны в первых разностях. Автокорреляционные функции выделяют лаги 1, 2, 3, 24 и 168 часов, вторые разности обнаруживают признаки скользящего среднего второго порядка с сезонным шумом — отсюда спецификация ARIMA (0,2,2); лаг 24 в остальных моделях оказался незначимым, рабочий набор регрессоров составили лаги 1, 2 и 168.

***Схема эксперимента и метрики***

Прогноз строится на один час вперед по скользящему окну на протяжении 168 тестовых часов: после каждого шага фактическое значение добавляется к истории. ARIMA переобучается на каждом шаге; LSTM, BDLM и Subset VAR оцениваются однократно и далее только прогнозируют по наблюдаемым лагам. Ни одна оценка не использует сведений о моментах позже прогнозируемого.

Точность точечного прогноза измеряют MAE, RMSE и MAPE; качество интервального прогноза — доля тестовых точек, покрытых 99-процентным интервалом, и его средняя ширина, а показатель MDA (Mean Directional Accuracy) — доля шагов с верно предсказанным направлением изменения.

Прикладная метрика экономии — средний по тестовым шагам процент экономии верхней границы доверительного интервала относительно текущего исторического максимума:

$$Saving = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^{n} \left( \frac{M_t - \hat{y}_t^{upper}}{M_t} \right), \tag{2}$$

где $M_t$ — исторический максимум ряда на шаге $t$ (по обучающей выборке и уже пройденной части теста), $\hat{y}_t^{upper}$ — верхняя граница интервала, $n$ — число тестовых шагов. Покрытие и экономия (2) — конкурирующие требования: сужение интервала повышает экономию, но увеличивает риск нехватки ресурсов, поэтому модели сопоставляются по обоим показателям.

***Моделирование***

Базовая модель (T-1) — прогноз по последнему наблюдению:

$$y_t = y_{t-1} + v_t,\ v \sim N\left(v; 0, \sigma_v^2\right). \tag{3}$$

В формуле (3) $v_t$ — ошибка прогноза с нулевым средним и дисперсией $\sigma_v^2$. Границы интервала задает стандартное отклонение $\sigma_v$, оцениваемое по накопленным одношаговым ошибкам с экспоненциальным затуханием веса (коэффициент 0,95). Так же строится интервал для LSTM.

Модель ARIMA (0,2,2) — проинтегрированное скользящее среднее второго порядка, записанное через вторую разность:

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2}. \tag{4}$$

В формуле (4) $\varepsilon_t$ — белый шум, $\beta_1$ и $\beta_2$ — коэффициенты скользящего среднего. Модель оценивается заново на каждом шаге, интервал берется из самой модели.

Сеть LSTM [5] — двухслойная, 64 скрытых состояния, прореживание 0,2, окно из 168 стандартизованных значений ряда, однократное обучение методом Adam ($10^{-3}$, 100 эпох).

Байесовская динамическая линейная модель BDLM [8] описывает ряд регрессией на лаги, коэффициенты которой меняются во времени:

$$y_t = x_t^{LL} + x_t^{AR1} y_{t-1} + x_t^{AR2} y_{t-2} + x_t^{AR168} y_{t-168} + v_t,\ v \ \sim \ N(v; 0, \sigma_v^2). \tag{5}$$

В формуле (5) $x_t^{LL}$ — коэффициент при локальном уровне, остальные — при лагах $t-1$, $t-2$, $t-168$; скорость их изменения задается дисконтированием 0,99. Прогноз и границы интервала — среднее и квантили 0,5 и 99,5% по 10 000 выборкам апостериорного распределения.

Модель Subset VAR (1…168) многомерная: она описывает три ряда совместно и потому использует зависимости между ресурсами. Ряды берутся в первых разностях и стандартизуются; для каждого уравнения строится регрессия наименьших квадратов по лагам с 1-го по 168-й всех трех переменных с пошаговым исключением незначимых при уровне 0,01. Интервал строится по дисперсии оценки коэффициентов и остаточной дисперсии.

**Результаты**

Итоговые метрики пяти моделей приведены в таблицах 1–5, строки — три ресурсных ряда, значения в единицах трассы. Для каждого ресурса разбирается модель, выбранная по нему лучшей: оперативная память — LSTM, графические ускорители — BDLM, процессоры — Subset VAR; для каждой из них приведены прогноз на тестовой неделе и диагностика остатков.

***Базовая модель***

*Таблица 1*

*Метрики тестирования базовой модели*

| Ряд | MAE | RMSE | MAPE, % | Покрытие, % | Ширина ДИ | MDA, % | Экономия, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plan_cpu* | 58 907 | 74 405 | 6,7 | 98,8 | 385 483 | — | 23,3 |
| *plan_gpu* | 4 943 | 6 732 | 6,7 | 97,0 | 34 033 | — | 27,6 |
| *plan_mem* | 2 438 | 3 039 | 7,7 | 99,4 | 15 371 | — | 28,6 |

Наивный прогноз уже дает содержательный результат: средняя абсолютная процентная ошибка по трем ресурсам в пределах 6,7–7,7%, покрытие — 97,0–99,4%, экономия — 23,3–28,6%. Распределение остатков близко к нормальному, однако их автокорреляционные функции белому шуму не соответствуют: структура ряда исчерпана не полностью. Остальные модели сравниваются, прежде всего, с этой.

***ARIMA (0,2,2)***

*Таблица 2*

*Метрики тестирования модели ARIMA (0,2,2)*

| Ряд | MAE | RMSE | MAPE, % | Покрытие, % | Ширина ДИ | MDA, % | Экономия, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plan_cpu* | 59 895 | 75 176 | 6,8 | 99,4 | 494 736 | 52,1 | 19,4 |
| *plan_gpu* | 4 730 | 6 529 | 6,4 | 96,4 | 31 992 | 59,9 | 28,3 |
| *plan_mem* | 2 487 | 3 068 | 7,8 | 99,4 | 17 079 | 53,3 | 27,1 |

Коэффициенты модели значимы, но их сумма по модулю с учетом стандартных ошибок превышает единицу — процесс с точки зрения модели неустойчив, что делает ее применение рискованным. Точечный прогноз лучше базового только по *plan_gpu*; покрытие интервала выше базового для *plan_cpu*, направление изменения предсказывается верно в 52,1–59,9% случаев. Главный недостаток — самый широкий интервал: 494 736 по *plan_cpu*, на 20–36% шире, чем у остальных моделей, отчего экономия наименьшая: 19,4%.

*Таблица 3*

*Метрики тестирования модели LSTM*

| Ряд | MAE | RMSE | MAPE, % | Покрытие, % | Ширина ДИ | MDA, % | Экономия, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plan_cpu* | 57 195 | 74 598 | 6,4 | 99,4 | 364 535 | 63,5 | 25,3 |
| *plan_gpu* | 4 934 | 6 947 | 6,5 | 95,2 | 33 113 | 57,5 | 29,2 |
| *plan_mem* | 2 331 | 2 856 | 7,4 | 99,4 | 14 230 | 61,1 | 30,2 |

***LSTM***

Точечный прогноз лучше базового по всем трем ресурсам; интервал уже базового, покрытие не ниже базового, кроме *plan_gpu*, экономия выше базовой для всех ресурсов. Лучший результат модель показывает на оперативной памяти: самый узкий интервал во всем сравнении, 14 230, при покрытии 99,4% и наибольшей экономии 30,2%. Прогноз уверенно повторяет и суточные колебания, и снижающийся тренд конца августа (рис. 1). В остатках, однако, сохраняется значимая автокорреляция на лаге 24 (рис. 2): суточная сезонность моделью, вероятно, исчерпана не полностью, и это оставляет запас для улучшения.

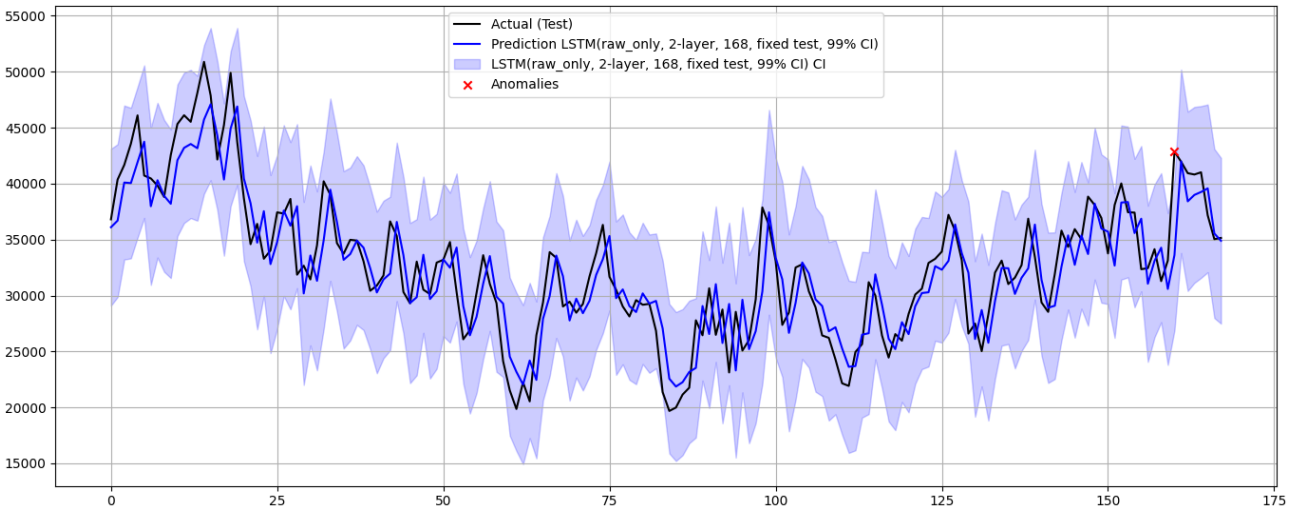



**Рис. 1.** *Прогноз почасовой загрузки оперативной памяти моделью LSTM на тестовой неделе: факт, точечный прогноз и 99-процентный доверительный интервал*

***BDLM***

*Таблица 4*

*Метрики тестирования модели BDLM*

| Ряд | MAE | RMSE | MAPE, % | Покрытие, % | Ширина ДИ | MDA, % | Экономия, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plan_cpu* | 55 024 | 69 336 | 6,3 | 99,4 | 413 374 | 64,1 | 22,2 |
| *plan_gpu* | 4 492 | 6 247 | 6,1 | 96,4 | 30 318 | 62,3 | 28,9 |
| *plan_mem* | 2 240 | 2 806 | 7,1 | 98,8 | 15 354 | 61,1 | 28,5 |

Модель точнее базовой по всем трем ресурсам: 55 024 против 58 907 по *plan_cpu* (на 6,6% ниже) и 4 492 против 4 943 по *plan_gpu* (на 9,1% ниже). Наибольшее преимущество — на графических ускорителях: там у нее лучшие в сравнении MAE, RMSE, MAPE и MDA при интервале уже базового. Прогноз воспроизводит суточные колебания и снижающийся тренд конца августа, фактические значения почти всюду остаются внутри интервала (рис. 3), а остатки по виду автокорреляционных функций близки к белому шуму (рис. 4): регулярная структура ряда исчерпана, что не удалось остальным моделям.

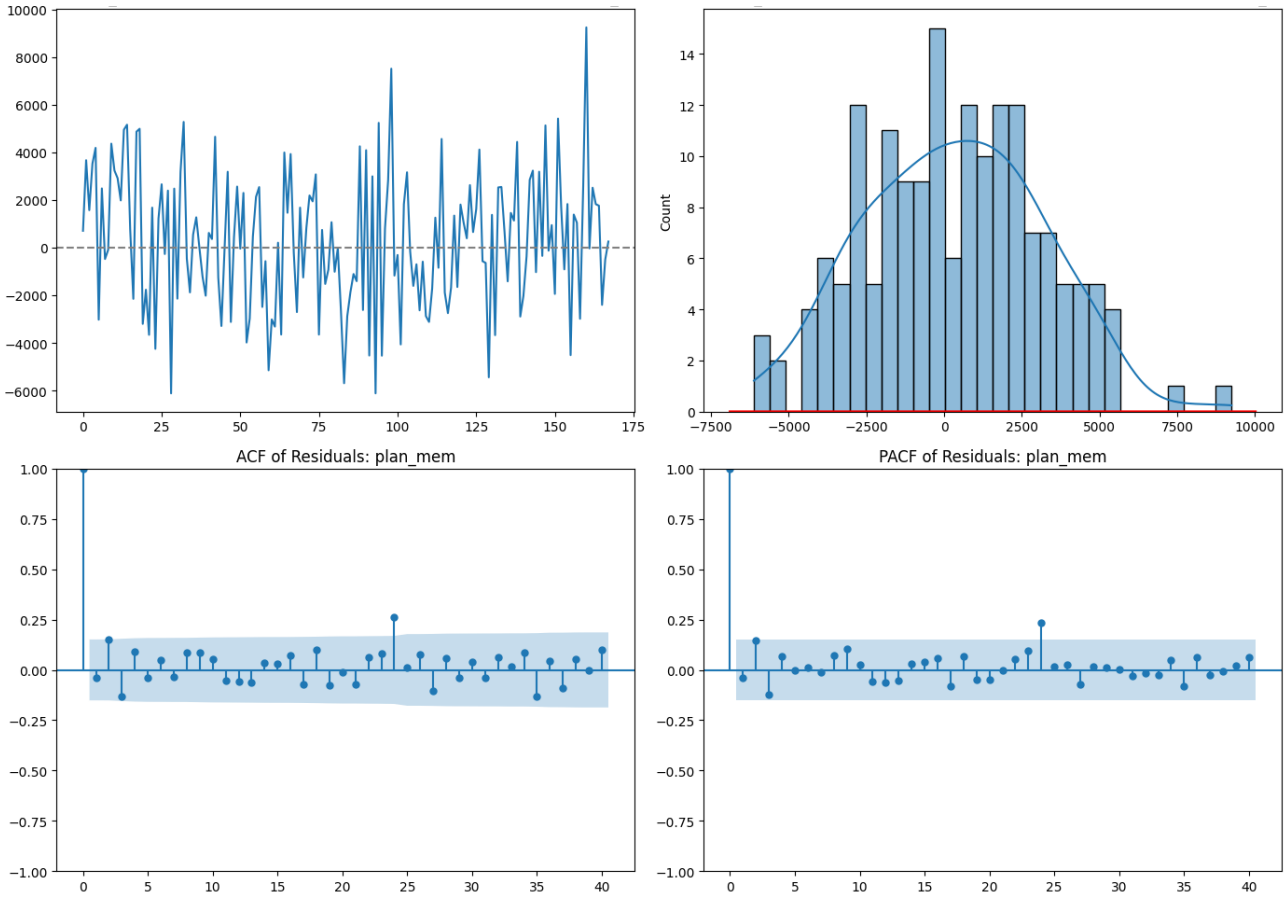



**Рис. 2.** *Диагностика остатков модели LSTM для прогноза почасовой загрузки оперативной памяти*

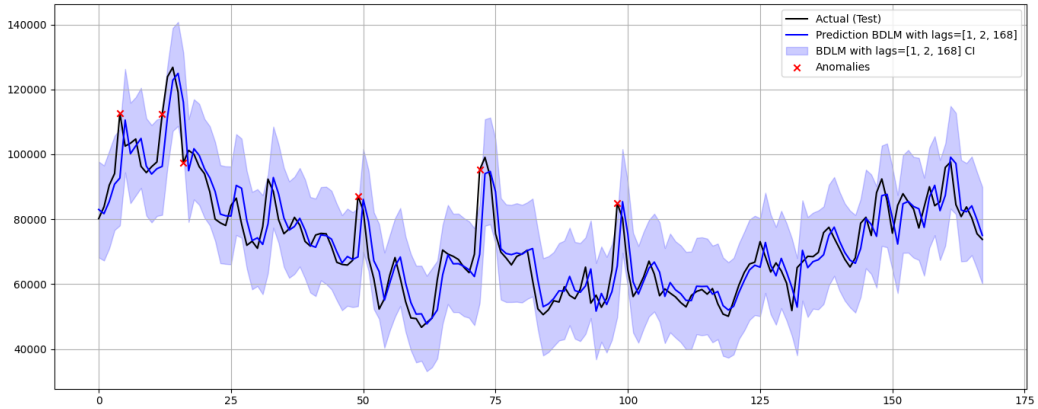



**Рис. 3.** *Прогноз почасовой загрузки графических ускорителей моделью BDLM на тестовой неделе*

### *Subset VAR*

*Таблица 5*

*Метрики тестирования модели Subset VAR (1. . . 168)*

| Ряд | MAE | RMSE | MAPE, % | Покрытие, % | Ширина ДИ | MDA, % | Экономия, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plan_cpu* | 56 402 | 72 774 | 6,4 | 99,4 | 395 313 | 62,9 | 23,0 |
| *plan_gpu* | 4 885 | 6 704 | 6,6 | 95,8 | 26 590 | 61,1 | 29,6 |
| *plan_mem* | 2 237 | 2 834 | 7,0 | 97,6 | 14 373 | 65,3 | 29,5 |

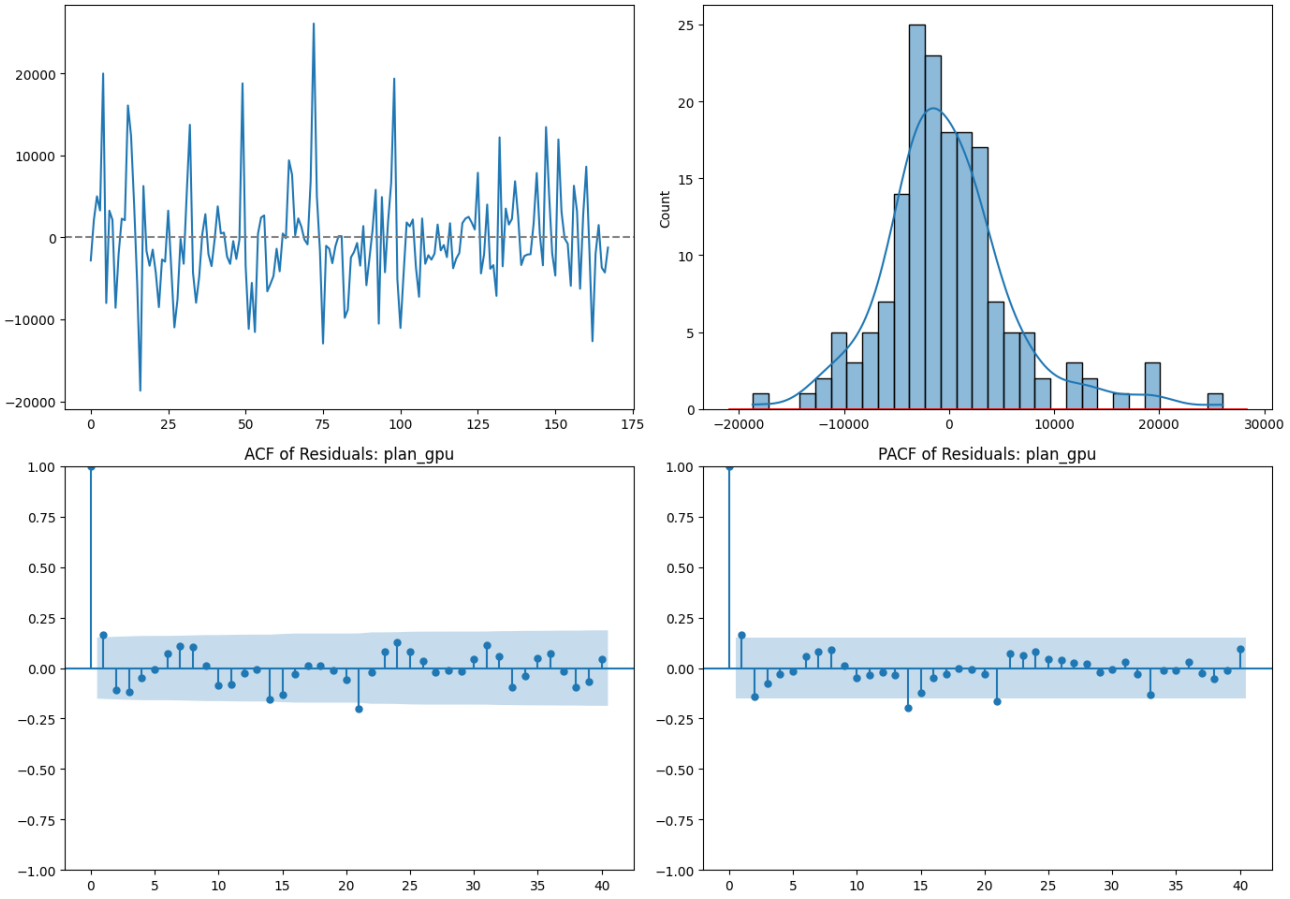



**Рис. 4.** *Диагностика остатков модели BDLM для прогноза почасовой загрузки графических ускорителей*

Точечный прогноз лучше базового по всем трем ресурсам; покрытие выше базового для *plan_ cpu*, интервал уже для *plan_ gpu* и *plan_ mem*, экономия выше для *plan_ gpu* и *plan_ mem*. Направление изменения предсказывается верно в 61,1–65,3% случаев, причем для *plan_ mem* это лучший результат в сравнении. Наиболее полезна модель для *plan_ cpu*: прогноз повторяет и суточные колебания, и снижающийся тренд конца августа (рис. 5), а остатки по виду автокорреляционных функций близки к белому шуму (рис. 6). По *plan_ mem* на лаге 3 значимая автокорреляция сохраняется.

**Обсуждение**

Наилучшие результаты по точности точечного прогноза показывает BDLM; она же лидирует по MDA для процессоров и ускорителей. LSTM дает достойный результат для *plan_ mem*, особенно по ширине и покрытию интервала, а Subset VAR — для *plan_ cpu* и *plan_ gpu*. Доверительные интервалы этих трех моделей имеют практическое преимущество: благодаря высокой точности точечного прогноза их проще откалибровать. ARIMA (0,2,2) уступает по ключевым метрикам, базовая модель служит ориентиром. Итоговая рекомендация: для процессоров и ускорителей — Subset VAR и BDLM, для памяти — LSTM.

Преимущество BDLM и Subset VAR объясняется тем, что обе явно используют выявленную лаговую структуру и описывают неопределенность внутри модели — через апостериорное распределение и через дисперсию оценки коэффициентов. Отсюда более калиброванные и при этом узкие интервалы, чем у ARIMA, где неопределенность накапливается из-за двукратного дифференцирования, и чем у моделей с интервалом, построенным отдельно по остаткам. Subset VAR дополнительно учитывает зависимости между ресурсами: некоторые заявки порождаются одними и теми же задачами и коэффициенты зависимости между ресурсами в многомерной модели доходят до 0,27.

У результатов есть ограничения. Прогнозируется заявленный, а не фактически потреб-

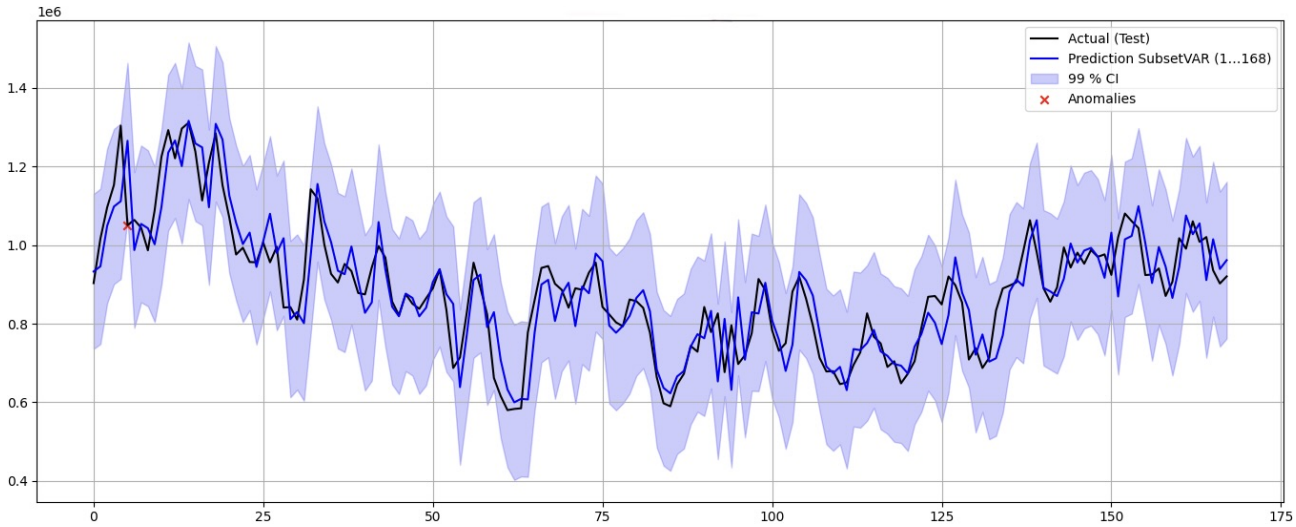



**Рис. 5.** *Прогноз почасовой загрузки процессоров моделью Subset VAR (1…168) на тестовой неделе*

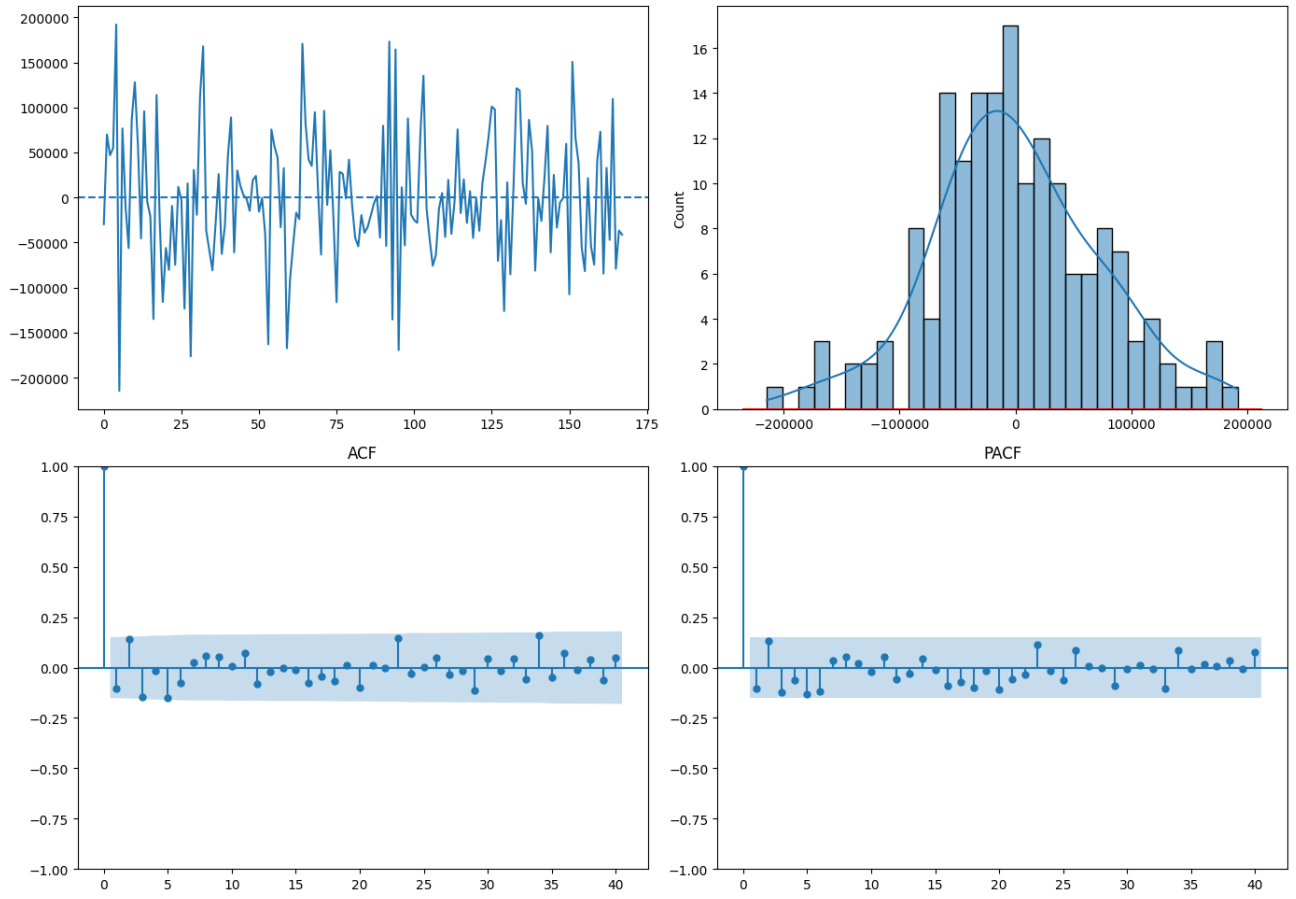



**Рис. 6.** *Диагностика остатков модели Subset VAR (1…168) для прогноза почасовой загрузки процессоров*

ленный объем ресурсов: для резервирования это корректно, но ряды не следует трактовать как утилизацию. Выводы получены на одной трассе за 49 суток и на горизонте в один час.

### Заключение

На данных производственной трассы Alibaba GPU Trace 2020 сопоставлены пять моделей краткосрочного прогнозирования почасовой загрузки кластера. Наилучшие результаты по большинству метрик показали байесовская динамическая линейная модель, Subset VAR и LSTM: у

байесовской модели средняя абсолютная ошибка на 6–9% ниже, чем у наивного прогноза, направление изменения выбранные модели предсказывают верно в 61–63% случаев, остатки BDLM и Subset VAR близки к белому шуму; ARIMA (0,2,2) оказалась менее точной и устойчивой. Замена статического резервирования по историческому максимуму резервированием по верхней границе прогнозного интервала сокращает объем резерва на 22–30% при покрытии 96–99%. Дальнейшее развитие работы связано с переходом к различным временным масштабам, единой многомерной байесовской моделью для пошагового прогноза, прогнозированием на несколько шагов и анализом непосредственной утилизации ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Weng Q., Xiao W., Yu Y. et al. MLaaS in the Wild: Workload Analysis and Scheduling in Large-Scale Heterogeneous GPU Clusters. *Proceedings of the 19th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation (NSDI'22)*; 2022. Режим доступа: https://www.usenix.org/system/files/nsdi22-paper-weng.pdf.
2. Amiri M., Mohammad-Khanli L. Survey on Prediction Models of Applications for Resources Provisioning in Cloud. *Journal of Network and Computer Applications*. 2017;82:93–113. DOI: 10.1016/j.jnca.2017.01.016.
3. Dinda P. A., O'Hallaron D. R. Host Load Prediction Using Linear Models. *Cluster Computing*. 2000;3(4):265–280. DOI: 10.1023/A:1019075903624.
4. Calheiros R. N., Masoumi E., Ranjan R., Buyya R. Workload Prediction Using ARIMA Model and Its Impact on Cloud Applications' QoS. *IEEE Transactions on Cloud Computing*. 2015;3(4):449–458. DOI: 10.1109/TCC.2014.2350475.
5. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory. *Neural Computation*. 1997;9(8):1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735.
6. Li Y. Y., Do T. V., Nguyen H. T. A Comparison of Forecasting Models for the Resource Usage of MapReduce Applications. *Neurocomputing*. 2020;418:36–55. DOI: 10.1016/j.neucom.2020.07.059.
7. Makridakis S., Spiliotis E., Assimakopoulos V. Statistical and Machine Learning Forecasting Methods: Concerns and Ways Forward. *PLoS ONE*. 2018;13(3):e0194889. DOI: 10.1371/journal.pone.0194889.
8. Prado R., West M. *Time Series: Modeling, Computation, and Inference*. New York; 2010. 368 p.

# ОБОСНОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ КОМПЛЕКТА УПАКОВОЧНОГО ТУК-27/1 ПРИ ИСПЫТАНИЯХ, ИМИТИРУЮЩИХ АВАРИЙНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРЕВОЗКИ ЛОВУШЕК, СОДЕРЖАЩИХ ГЕКСАФТОРИД УРАНА

**К. К. Новичков[а], О. И. Федин[б], Н. А. Шубин[в]**
*АО «НИИ НПО «ЛУЧ» (Акционерное общество «Научно-исследовательский институт Научно-производственное объединение «ЛУЧ»), Подольск, Российская Федерация*
[а] *KKNovichkov@rosatom.ru,* [б] *OIFedin@rosatom.ru,* [в] ✍ *ShubinNA@sialuch.ru*

*Аннотация:* в настоящей работе проведено обоснование прочности и герметичности пенала для ловушек с гексафторидом урана из состава упаковочного комплекта ТУК-27/1 при всех видах динамических воздействий, имитирующих аварийные условия перевозки в соответствии с требованиями Правил НП-053-16, предъявляемых к упаковкам типа В.

Данная работа является частной задачей общего обоснования прочности при использовании ТУК-27/1 для перевозки ловушек, содержащих гексафторид урана. Для обоснования прочности защитного контейнера из состава упаковки использовались результаты межведомственных натурных испытаний ТУК-27. Определение напряженно-деформированного состояния металлической конструкции нового пенала для ловушек с гексафторидом урана проводилось путем решения системы уравнений для сплошной среды, записанных в переменных Лагранжа. Для интегрирования указанной системы уравнений применялся метод конечных элементов с использованием явного интегрирования по времени, реализованный в аттестованном программном комплексе ANSYS LS-DYNA. Все физико-механические характеристики металлов, из которых изготовлены новые пеналы, консервативно принимались на основании данных, приведенных в ПНАЭ Г-7-002-86. При задании материалов конструктивных элементов пеналов в расчетной модели принималась билинейная аппроксимация диаграммы нагружения соответствующего металла.

Результаты проведенных расчетов позволили обосновать безопасность использования новых пеналов для ловушек с гексафторидом урана в части прочности при транспортировке упаковочного комплекта ТУК-27/1 в соответствии с действующими на территории Российской Федерации правилами.

*Ключевые слова:* уран, гексафторид, транспортный упаковочный комплект, программное средство, численные методы, метод конечных элементов, ANSYS LS-DYNA, расчет, прочность, пенал, ловушки, корзина, контейнер.

*Для цитирования:* Новичков К. К., Федин О. И., Шубин Н. А. Обоснование прочности комплекта упаковочного ТУК-27/1 при испытаниях, имитирующих аварийные условия перевозки ловушек, содержащих гексафторид урана. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):110–117.

*Поступила в редакцию: 27.08.2026.* *В окончательном варианте: 23.09.2026.*

# STRUCTURAL INTEGRITY OF THE TUK-27/1 PACKAGING SYSTEM IN SIMULATED TRANSPORTATION ACCIDENTS INVOLVING URANIUM HEXAFLUORIDE TRAPS

**K. K. Novichkov[a], O. I. Fedin[b], N. A. Shubin[c]**
*LUCH Research Institute, Podolsk, Russian Federation*
[a] *KKNovichkov@rosatom.ru,* [b] *OIFedin@rosatom.ru,* [c] ✍ *ShubinNA@sialuch.ru*

*Abstract:* we assessed the structural integrity and leak tightness of a new protective case for uranium hexafluoride traps used in the TUK-27/1 transport package under dynamic loads simulating the accident conditions specified for Type B packages by NP-053-16. The study forms part of the overall safety assessment of the TUK-27/1 for transporting uranium hexafluoride traps. Results from full-scale tests of the TUK-27 transport package conducted by an interdepartmental commission were used as a basis for assessing the structural integrity of the new protective case. We performed a stress-strain analysis of its metal frame by solving the equations of continuum mechanics in Lagrangian coordinates. The equations were integrated using an explicit time-stepping finite-element method implemented in the certified ANSYS LS-DYNA software package. The physical and mechanical properties of the case materials were conservatively taken from PNAE G-7-002-86. The material

models used a bilinear approximation of the stress-strain curves for the respective metals. The calculations demonstrated that the new protective cases retain their structural integrity and safety under the specified accident loads during transport of the TUK-27/1 transport package in accordance with the applicable Russian regulations.

*Keywords:* uranium, hexafluoride, transport package, software, numerical methods, finite element method, ANSYS LS-DYNA, analysis, structural integrity, canister, traps, basket, container.

*Cite this article:* Novichkov K. K., Fedin O. I., Shubin N. A. Structural Integrity of the TUK-27/1 Packaging System in Simulated Transportation Accidents Involving Uranium Hexafluoride Traps. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):110–117.

*Original article submitted: 27.08.2026.* *Revision submitted: 23.09.2026.*

**Введение**

В данной работе было проведено расчетное обоснование сохранения прочности и герметичности нового пенала ТУК-27/1 при наиболее опасных испытаниях на механические повреждения, имитирующих аварийные условия перевозки.

Численные расчеты упаковочного комплекта проведены методом конечных элементов, реализованным в аттестованной программе ANSYS LS-DYNA. Погрешность не превышает 10 %.

Обоснование прочности транспортного упаковочного комплекта ТУК-27/1, предназначенного для перевозки гексафторида урана (ГФУ), при всех видах динамических воздействий, имитирующих аварийные условия перевозки, проведено в соответствии с требованиями Правил НП-053-16 (Федеральные нормы и правила в области использования атомной энергии «Правила безопасности при транспортировании радиоактивных материалов» НП-053-16. Федеральная служба по экологическому, технологическому и атомному надзору России. М., 2016), предъявляемых к упаковкам типа В.

Данные о механических характеристиках материалов взяты в соответствии с ПНАЭ Г-7-002-86 (Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок, Госатомэнергонадзор СССР. М.: Энергоатомиздат, 1989).

**Материалы и методы**

Согласно отчету об испытаниях НРП-93 (Нормы расчета на прочность транспортных упаковочных комплектов для перевозки ядерных делящихся материалов, Минатом России. М., 1993) приемочные межведомственные испытания транспортного упаковочного комплекта ТУК-27 были проведены в два этапа: первый — в октябре 1991 г., второй — в феврале 1992 г. Целью испытаний было определение его соответствия требованиям Правил ОПБЗ-83 при нормальных и аварийных условиях транспортирования.

Результаты зачетных механических испытаний на аварийные ситуации при транспортировании включали падения с высоты 9 м на жесткое основание на крышку, днище, образующую и кромку крышки, а также с высоты 1 м на штырь наиболее поврежденной частью в каждом из этих же положений. Наиболее опасным повреждением, полученным после падения на штырь смятой образующей, явилось образование отверстия на наружной обечайке с пробитием слоя теплоизоляции (перлитобетон) на глубину 100 мм. При всех остальных падениях образовались пластические повреждения, не приводящие к разрушению наружных обечаек, а также частичное ослабление крепежных элементов защитного контейнера. Нарушения герметичности внутренней емкости, а также отрыва крышки защитного контейнера ни в одном случае не обнаружено.

С учетом результатов тепловых испытаний сделан вывод о соответствии ТУК-27 требованиям Правил ОПБЗ-83 (Основные правила безопасности и физической защиты при перевозке ядерных материалов. М., 1983). Для повышения прочности разъема защитного контейнера принято решение о ряде конструктивных изменений для элементов крепления крышки к корпусу, которые вошли в окончательную конструкцию ТУК-27 и ТУК-27/1.

Требования Правил безопасности при транспортировании радиоактивных материалов НП-053-16 в части механических воздействий на упаковки данного типа аналогичны требованиям Правил ОПБЗ-83. С учетом того, что масса заполненного пенала в составе ТУК-27/1 не превышает массу содержимого ТУК-27, можно распространить выводы о сохранении прочности защитного контейнера ТУК-27 на ТУК-27/1.

Для оценки прочности и определения степени возможного повреждения пеналов с ловушками из состава ТУК-27/1 при ударном взаимодействии с жесткой мишенью были проведены численные расчеты его конструкции методом конечных элементов с использованием аттестованной программы ANSYS LS-DYNA. Определение напряженно-деформированного состояния металлоконструкций в программном средстве ANSYS LS-DYNA проводится путем решения системы уравнений для сплошной среды, записанных в переменных Лагранжа. Система уравнений включает в себя уравнения сохранения импульса, энергии, а также граничные и начальные условия. В качестве граничных условий используются силовые и кинематические параметры, задаваемые в узлах конечно-элементной сетки расчетной модели. Для интегрирования вышеуказанной системы уравнений применяется метод конечных элементов с использованием явного интегрирования по времени. Для моделирования разрушения материала используется алгоритм эрозии, суть которого состоит в исключении элемента из расчетной схемы при достижении в нем заранее определенных критериев разрушения. Задачи контактного взаимодействия решаются с использованием несогласованных сеток, что позволяет описывать процессы деформирования среды при любых относительных смещениях контактных границ. При этом учитывается возможный отрыв или проскальзывание контактирующих поверхностей.

Механические характеристики материалов, из которых изготовлены основные конструктивные элементы ТУК, принимались на основании данных, приведенных в ПНАЭ Г-7-002-86.

**Описание расчетной модели ТУК-21/1**

На рисунке 1 представлен общий вид трехмерной модели ТУК-27/1. На рисунке 2 показана конечно-элементная модель ТУК-27/1, где подробно представлены все основные силовые элементы ТУК, взаимодействие которых осуществлялось посредством их контактов между собой. Все конструктивные элементы ТУК-27/1 моделировались при помощи четырех- и восьмиузловых объемных конечных элементов.

При расчете прочности для моделирования усилий, передаваемых со стороны содержимого на ТУК-27/1, использовалась массогабаритная модель содержимого с соответствующей массой. Содержимое и основание моделировалось в виде недеформируемых тел, что идет в запас расчета.

Расчеты проводились в геометрически и физически нелинейной постановке.

Для элементов конструкции ТУК, выполненных из стали марки 12Х18Н10Т, принимались следующие характеристики прочности и упругости при температуре +50 °С в соответствии с ПНАЭ Г-7-002-86:

модуль упругости ..... $E = 202$ ГПа
коэффициент поперечной деформации ..... $\nu = 0{,}3$
условный предел текучести ..... $\sigma_{0,2} = 191$ МПа
временное сопротивление при разрыве ..... $\sigma_{\text{в}} = 480$ МПа
относительное удлинение при разрыве ..... $\delta = 37$ %

Для элементов конструкции ТУК, выполненных из стали марки 38ХН3МФА, принимались следующие характеристики прочности и упругости при температуре +50 °С в соответствии с ПНАЭ Г-7-002-86:

модуль упругости ..... $E = 212$ ГПа
коэффициент поперечной деформации ..... $\nu = 0{,}3$
условный предел текучести ..... $\sigma_{0,2} = 880$ МПа
временное сопротивление при разрыве ..... $\sigma_{\text{в}} = 981$ МПа
относительное удлинение при разрыве ..... $\delta = 11$ %

При падении с 9 м начальная скорость соударения ТУК-27/1 с жестким основанием составляет:

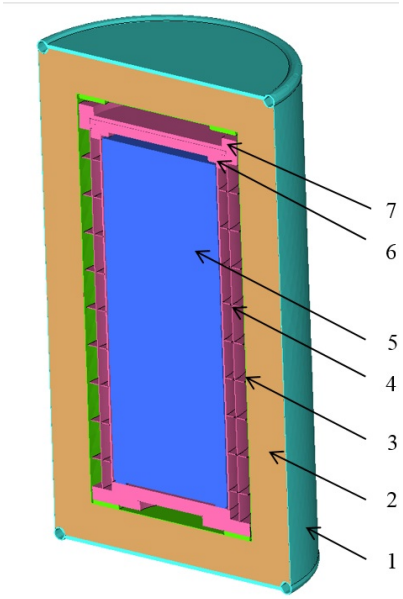
$$\mathrm{V_H} = \sqrt{2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{H}} = 13{,}3 \text{ м/с}, \qquad (1)$$

где H = 9 — высота падения упаковки;

g = 9,81 $/^2$ — ускорение свободного падения.

К узлам модели прикладывалась начальная скорость соударения с мишенью, равная V (см. формулу (1)). В ходе работы были проанализированы следующие варианты падений ТУК:

- вертикальные падения на днище и крышку;
- наклонный удар кромкой крышки контейнера (ориентация ТУК-27/1 выбиралась таким образом, чтобы ось, проведенная из точки касания с мишенью и проходящая через центр масс упаковки, была перпендикулярна плоскости мишени);
- удар образующей корпуса контейнера (горизонтальное падение).




1 — наружная обечайка контейнера; 2 — перлитобетон контейнера; 3 — внутренняя обечайка контейнера; 4 — пенал; 5 — содержимое пенала; 6 — крышка пенала внутренняя; 7 — крышка пенала наружная

**Рис. 1.** *Общий вид трехмерной модели ТУК-27/1 в разрезе*

**Падение с 9 м на кромку крышки контейнера ТУК-27/1**

Основные результаты расчета для рассматриваемого варианта падения упаковки сводятся к следующему.

На рисунке 3 показана схема деформирования ТУК-27/1 после его падения на кромку крышки. Энергия удара при данном варианте ориентации контейнера при падении, а также всех рассматриваемых далее вариантах, поглощается, в основном, за счет деформации перлитобетона и внешней стальной оболочки контейнера. Деформации основных конструктивных элементов пенала незначительны (см. рис. 4).

Наибольшие пластические деформации локализуются в шляпках 4-х ближайших к месту удара болтов наружной крышки и не превышают 10 %. Пластические деформации болтов внутренней крышки не превышают 0,6%.

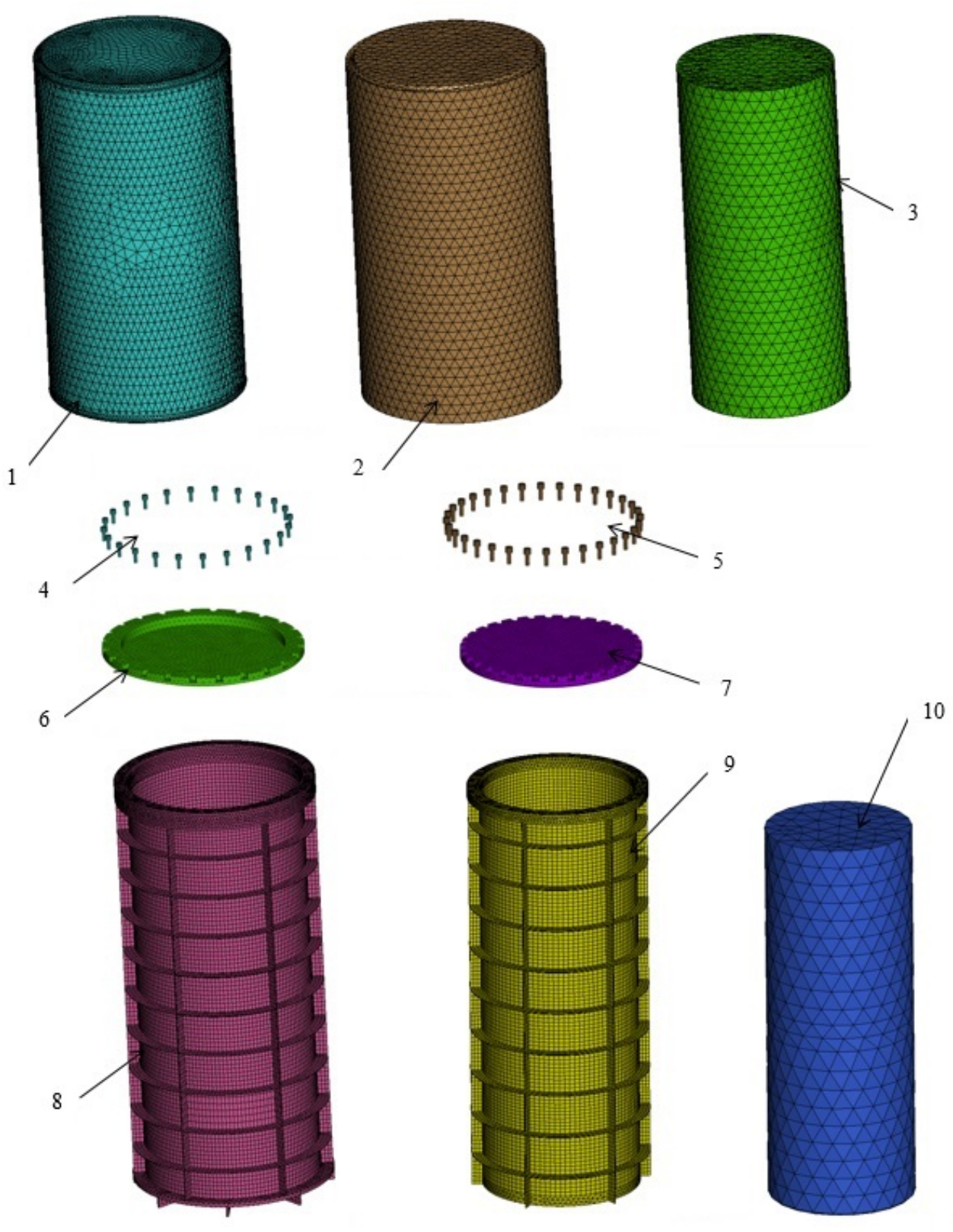
Величина раскрытия стыка между наружной крышкой и наружной емкостью и между внутренней крышкой и внутренней емкостью за все время удара не превышает соответственно 0,3 мм и 0,4 мм. Полученные значения раскрытия стыков значительно ниже величины обжатия герметизирующих прокладок 2 мм. Таким образом, можно сделать вывод, что герметичность узлов крепления крышек пенала сохраняется.

**Падение с 9 м на плоскость крышки контейнера ТУК-27/1**

Основные результаты расчета для рассматриваемого варианта падения упаковки сводятся к следующему.

На рисунке 5 показана схема деформирования верхней части корпуса пенала после вертикального падения ТУК-27/1 на крышку контейнера.

Для наружной крышки наибольшие напряжения достигают 904 МПа, для внутренней крышки наибольшие напряжения составляют 910 МПа. Данные величины превышают величину условного предела текучести стали 38ХН3МФА, составляющего 880 МПа. Таким образом, в болтах возможно возникновение незначительных пластических деформаций.




1 — наружная обечайка контейнера; 2 — перлитобетон контейнера; 3 — внутренняя обечайка контейнера; 4 — болты крепления наружной крышки; 5 — болты крепления внутренней крышки; 6 — крышка наружная; 7 — крышка внутренняя; 8 — емкость наружная; 9 — емкость внутренняя; 10 — корзины

**Рис. 2.** *Конечно-элементная модель ТУК-27/1*

Величина раскрытия стыка между наружной крышкой и наружной емкостью и между внутренней крышкой и внутренней емкостью за все время удара не превышает соответственно

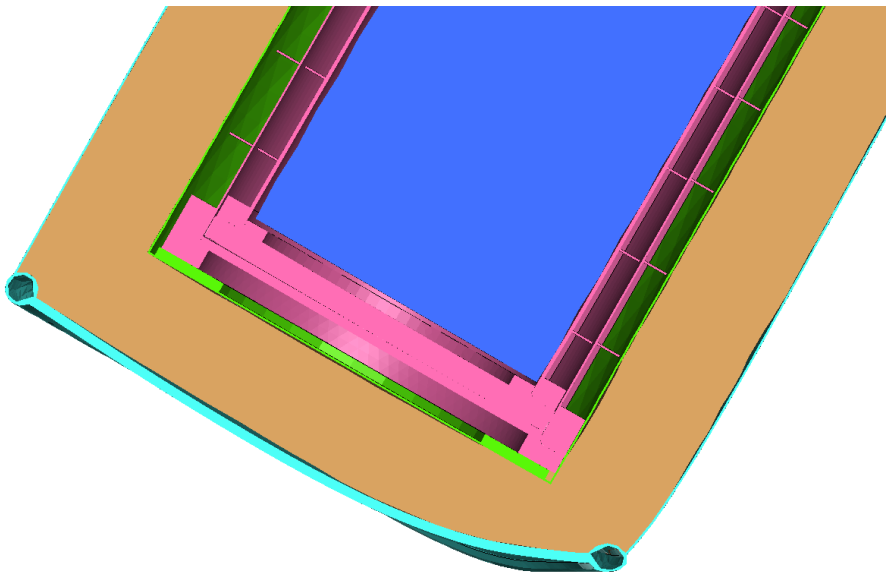


**Рис. 3.** *Схема деформирования ТУК-27/1 после падения на кромку крышки*

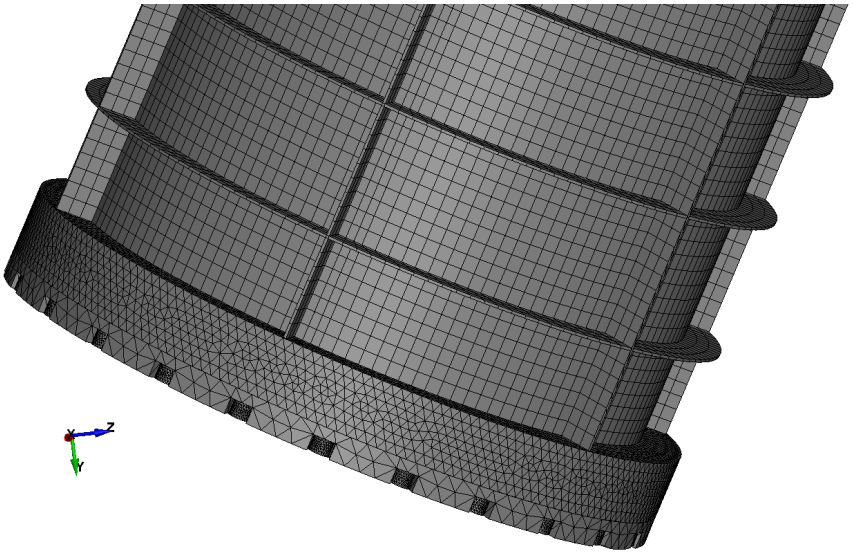


**Рис. 4.** *Схема деформирования пенала ТУК-27/1 после падения на кромку крышки*

0,12 мм и 0,2 мм. Полученные значения раскрытия стыков значительно ниже величины обжатия герметизирующих прокладок 2 мм. Таким образом, можно сделать вывод, что герметичность узлов крепления внутренней и наружной крышек к емкостям сохраняется.

**Падение с 9 м на плоскость днища корпуса контейнера ТУК-27/1**

Основные результаты расчета для рассматриваемого варианта падения упаковки сводятся к следующему.

На рисунке 6 показана схема деформирования нижней части корпуса пенала после вертикального падения ТУК-27/1 на днище контейнера. После контакта с жестким неподвижным основанием происходит пластическое деформирование нижних радиальных ребер, воспринимающих удар о преграду.

Для наружной крышки наибольшие напряжения достигают 889 МПа, для внутренней крышки наибольшие напряжения составляют 907 МПа. Данные величины превышают величину условного предела текучести стали 38ХН3МФА, составляющего 880 МПа. Таким образом, в болтах возможно возникновение незначительных пластических деформаций.

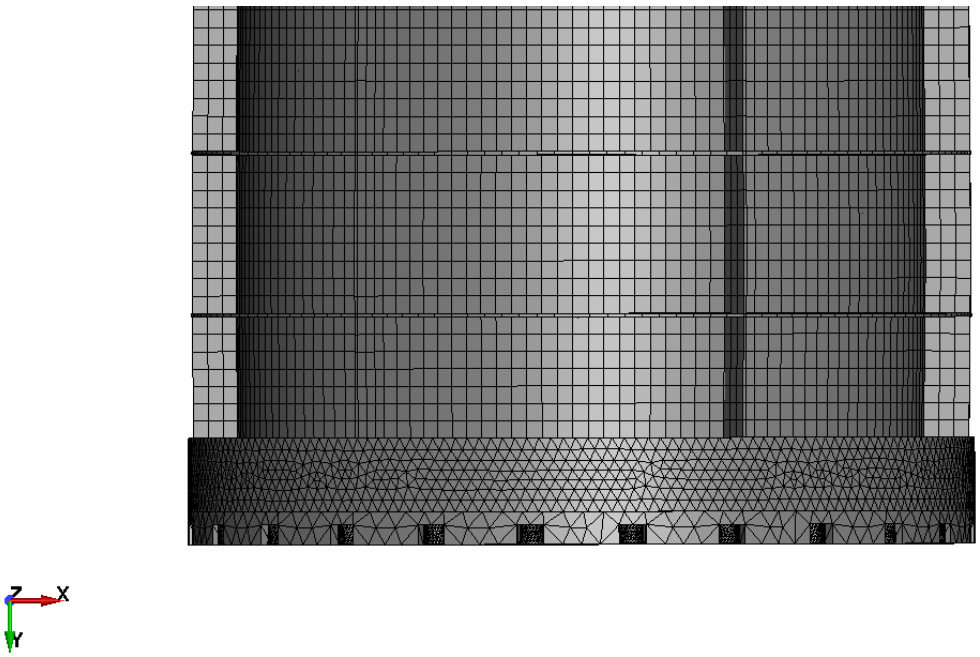



**Рис. 5.** *Схема деформирования пенала ТУК-27/1 после падения на крышку*

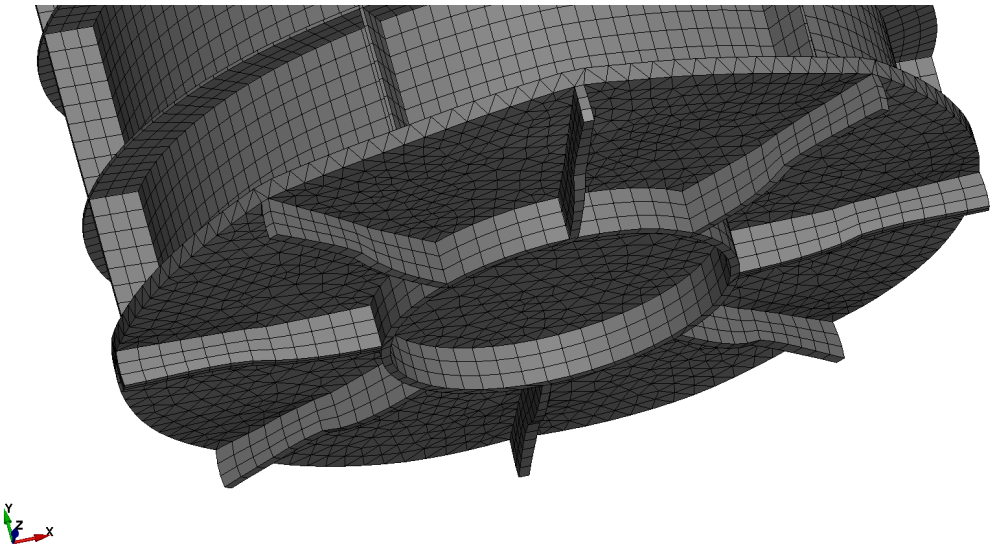



**Рис. 6.** *Схема деформирования пенала ТУК-27/1 после падения на днище*

Величина раскрытия стыка между наружной крышкой и наружной емкостью и между внутренней крышкой и внутренней емкостью за все время удара не превышают 0,06 мм. Полученные значения раскрытия стыков значительно ниже величины обжатия герметизирующих прокладок 2 мм. Таким образом, можно сделать вывод, что герметичность узлов крепления внутренней и наружной крышек к емкостям сохраняется.

**Падение с 9 м на образующую корпуса контейнера ТУК-27/1**

Основные результаты расчета для варианта падения упаковки на образующую сводятся к следующему.

На рисунке 7 показана схема деформирования корпуса пенала после падения контейнера ТУК-27/1 на образующую.

Величина раскрытия стыка между наружной крышкой и наружной емкостью за все время удара не превышает 0,05 мм. Полученное значение раскрытия стыка значительно ниже величины обжатия герметизирующих прокладок 2 мм. Таким образом, можно сделать вывод, что герметич-

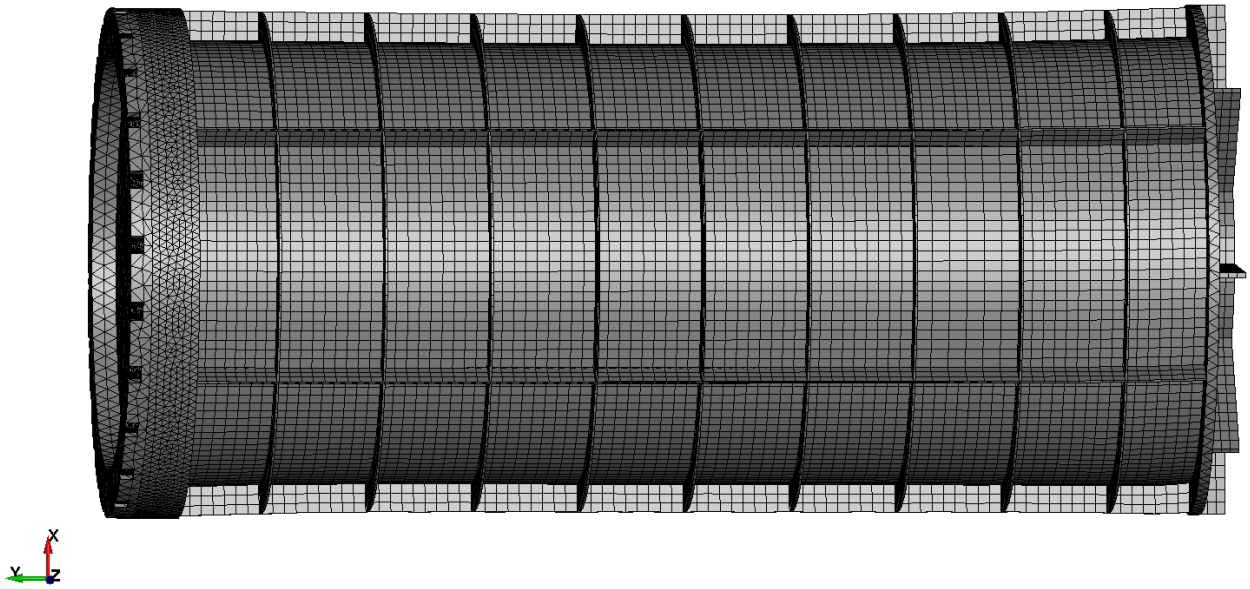



**Рис. 7.** *Схема деформирования корпуса наружной емкости после падения на образующую*

ность узлов крепления наружной крышки к емкости сохраняется.

**Результаты расчетов**

При всех вариантах аварийных падений прочность защитного контейнера и герметичность пенала из состава ТУК-27/1 сохраняется.

Испытания на статическое сжатие и погружение в воду заменены расчетами (НРП-93).

Расчет прочности при статическом сжатии (НРП-93) показал, что напряжения в элементах защитного контейнера не превышают допустимых. Запас прочности по условному пределу текучести составляет не менее 2, запас устойчивости сжатых тонкостенных элементов — не менее 4.

Таким образом, прочность ТУК-27/1 при испытаниях, имитирующих нормальные и аварийные условия перевозки, обеспечена.

**Выводы**

По результатам анализа результатов испытаний ТУК-27 (НРП-93), проведенных ранее расчетов (НРП-93), а также проведенного в рамках данной работы расчета прочности ТУК-27/1 можно сделать следующие основные выводы:

- защитный контейнер ТУК-27/1 сохраняет прочность при динамических испытаниях, имитирующих аварийные условия транспортирования. Выхода содержимого защитного контейнера ТУК-27/1 не происходит;
- прочность и герметичность нового пенала из состава ТУК-27/1 обеспечена при всех видах воздействий, имитирующих аварийные условия перевозки.

Таким образом, можно заключить, что ТУК-27/1, загруженный новым пеналом с ловушками с ГФУ, удовлетворяет всем требованиям Правил НП-053-16 в части прочности.

# ЭПСИЛОН-СЕТЕВОЙ АЛГОРИТМ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КОМПЛЕКСАХ ЭЛЕМЕНТОВ

**А. Н. Рожков**[1,а], **А. С. Демидов**[2,3,б], **В. В. Галишникова**[3,в]

[1] *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Российская Федерация*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

[3] *Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, г. Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0729-5644, ✍ rozhkovalex@hotmail.com*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0245-233X, demidov.alexandre@gmail.com*

[в] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-7255, galishni@yandex.ru*

*Аннотация*: в данной работе представлен $\varepsilon$-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов с заданной ранговой структурой. Основной проблемой при анализе высокодетализированных комплексов является рост вычислительной сложности, связанный с увеличением пространства состояний. Для ее сокращения предложен метод факторизации множества состояний с использованием $\varepsilon$-сетей, позволяющий заменить исходную структуру укрупненным графом. Элементы нулевого ранга объединяются в классы по заданной метрике, а классы элементов старших рангов формируются по классам составляющих их элементов. В статье использована лексикографическая оптимизация целевого функционала, при которой сначала минимизируется число переходов между $\varepsilon$-классами, а затем — длина маршрута в исходном комплексе. Работа алгоритма показана на примере полиэдрального комплекса при решении задачи маршрутизации в информационной модели реального здания. Рассматриваемая модель включает узлы, ребра, грани и пространственные ячейки здания. Программная реализация обеспечивает построение исходного и факторизованного графов, поиск обычного, $\varepsilon$-классового и лексикографического маршрутов, а также их визуальное сравнение. Предложенный подход может быть применен к другим функционалам, заданным на комплексах элементов, при выборе меры близости и правил формирования классов.

*Ключевые слова:* комплекс элементов, полиэдральный комплекс, эпсилон-сеть, факторизованный граф, лексикографическая оптимизация, маршрутизация.

*Для цитирования:* Рожков А. Н., Демидов А. С., Галишникова В. В. Эпсилон-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):118–125.

*Поступила в редакцию: 05.08.2026.* *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

# AN EPSILON-NET-BASED ALGORITHM FOR MINIMIZING FUNCTIONALS ON COMPLEXES

**A. N. Rozhkov**[1,a], **A. S. Demidov**[2,3,b], **V. V. Galishnikova**[3,c]

[1] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[3] *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0729-5644, ✍ rozhkovalex@hotmail.com*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0245-233X, demidov.alexandre@gmail.com*

[c] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-7255, galishni@yandex.ru*

*Abstract:* we developed an $\varepsilon$-net algorithm for minimizing functionals defined on complexes with a prescribed rank structure. A major challenge in analyzing highly detailed complexes is the rapid growth in computational complexity as the state space increases. To address this problem, we proposed a method for partitioning the state space into $\varepsilon$-net classes and replacing the original complex with a coarsened graph. We grouped rank-zero elements into classes according to a specified metric and constructed classes of higher-rank elements from the classes of their constituent elements. We used

lexicographic optimization of the objective functional: we first minimized the number of transitions between $\varepsilon$-classes and then minimized the route length in the original complex. We demonstrated the algorithm on a polyhedral complex representing an actual building and applied it to routing problems. The model included the building's nodes, edges, faces, and three-dimensional cells. Our software implementation supports the construction of the original and factorized graphs, the computation of conventional, $\varepsilon$-class-based, and lexicographically optimal routes, and their visual comparison. The proposed approach can also be applied to other functionals defined on complexes, provided that a suitable proximity measure and rules for forming classes are specified.

*Keywords:* complex, polyhedral complex, epsilon net, quotient graph, lexicographic optimization, routing.

*Cite this article:* Rozhkov A. N., Demidov A. S., Galishnikova V. V. An Epsilon-Net-Based Algorithm for Minimizing Functionals on Complexes. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):118–125.

*Original article submitted: 05.08.2026.* *Revision submitted: 20.09.2026.*

**Введение**

Широкий класс задач оптимизации связан с поиском экстремумов функционалов на объектах, обладающих сложной структурой. Такие объекты могут быть представлены в виде комплексов элементов, где каждый элемент характеризуется определенным рангом (размерностью). Это позволяет формализовать связи между элементами разных уровней и описывать сложные системы через совокупность их составляющих.

Основной проблемой при работе с высокодетализированными комплексами элементов является рост вычислительной сложности, обусловленный увеличением числа элементов пространства состояний. При высокой степени детализации прямой поиск оптимального решения на исходном графе требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому возникает необходимость в сокращении пространства состояний без потери существенных характеристик комплекса.

Одним из способов упрощения пространства поиска является применение $\varepsilon$-сетей для факторизации множества состояний. Объединение элементов одного ранга, близких по заданной метрике, в классы позволяет перейти от анализа отдельных элементов к анализу их классов. В результате исходный граф заменяется факторизованным с меньшим числом состояний.

Целью данной работы является разработка алгоритма минимизации функционалов на комплексах элементов с использованием $\varepsilon$-сетей. Предложен метод лексикографической оптимизации, учитывающий приоритетно число переходов между $\varepsilon$-классами и затем длину маршрута в исходном комплексе.

**Структурные характеристики: комплекс элементов**

Комплекс элементов $\boldsymbol{K}$ — это структура, состоящая из элементов, ранжированных по «размерности» (рангу). Два различных элемента $A$ и $B$ из $\boldsymbol{K}$ одной размерности $k \geq 1$ называются смежными (обозначается как $A \sim B$), если их пересечение $A \cap B$ является элементом комплекса размерности $(k-1)$ и это пересечение не пусто [1, 2]. В работе будут введены и рассмотрены полиэдральные комплексы.

**Структурные характеристики: целевые функционалы на комплексах элементов**

Интерес представляет минимизация тех или иных числовых характеристик на комплексах. Они называются целевыми функционалами. Приведем примеры таких функционалов на комплексах элементов:

- функционал **маршрутизации** — длина того или иного пути (маршрута) на графе комплекса (например, кратчайший или самый «безопасный» маршрут между заданными узлами комплекса). Такой функционал характерен для навигационных задач, включая эвакуацию и логистику внутри сложных объектов;
- функционал **доступности** — это числовая характеристика доступности элементов комплекса. Например, количество ячеек $\left|N^{(t)}\left(\{c_0\}\right)\right|$, достижимых (доступных) из исходного узла за какое-то заданное или не превосходящее $t$ шагов;

• функционал **математического ожидания распределения случайной величины на комплексе**;

• функционал **рассогласования** — численная мера различия между двумя распределениями на комплексе;

• функционал **числа переходов между различными классами** разбиений комплекса.

Перечисленные примеры иллюстрируют широкий спектр оптимизационных задач на комплексах — от классических проблем теории графов (пути, потоки, центральности) до специальных функционалов для машинного обучения на графах [3, 4]. Все они сводятся к оптимизации того или иного целевого показателя, определенного на элементах и связях комплекса.

**Структурные характеристики: эпсилон-сети на комплексах элементов**

Поскольку комплекс, как правило, состоит из весьма большого числа элементов, поиск минимума целевого функционала на этих элементах комплекса может потребовать весьма значительного времени. Поэтому целесообразно объединять близкие элементы в классы, расстояние между элементами которых не превышает заданного малого параметра $\varepsilon$, выбирать в каждом классе представителя и проводить факторизацию комплекса по полученным классам.

Расстояние между элементами комплекса определяется конкретной метрикой $\rho$, выбираемой в зависимости от решаемой задачи. В частности, для полиэдрального комплекса метрика задается следующим образом. Расстояние между элементами 0-го ранга (узлами) вычисляется как евклидово расстояние между их координатами:

$$\rho(n_i,n_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \tag{1}$$

Элементы 0-го ранга объединяются в классы, в каждом из которых выбирается представитель. Элемент включается в класс, если расстояние от него до представителя этого класса не превышает $\varepsilon$. Для элементов более высокого ранга прямое геометрическое сравнение не применяется. Элементы ранга $k \geq 1$ относятся к одному классу, если совпадают наборы классов, к которым принадлежат составляющие их элементы ранга $(k-1)$.

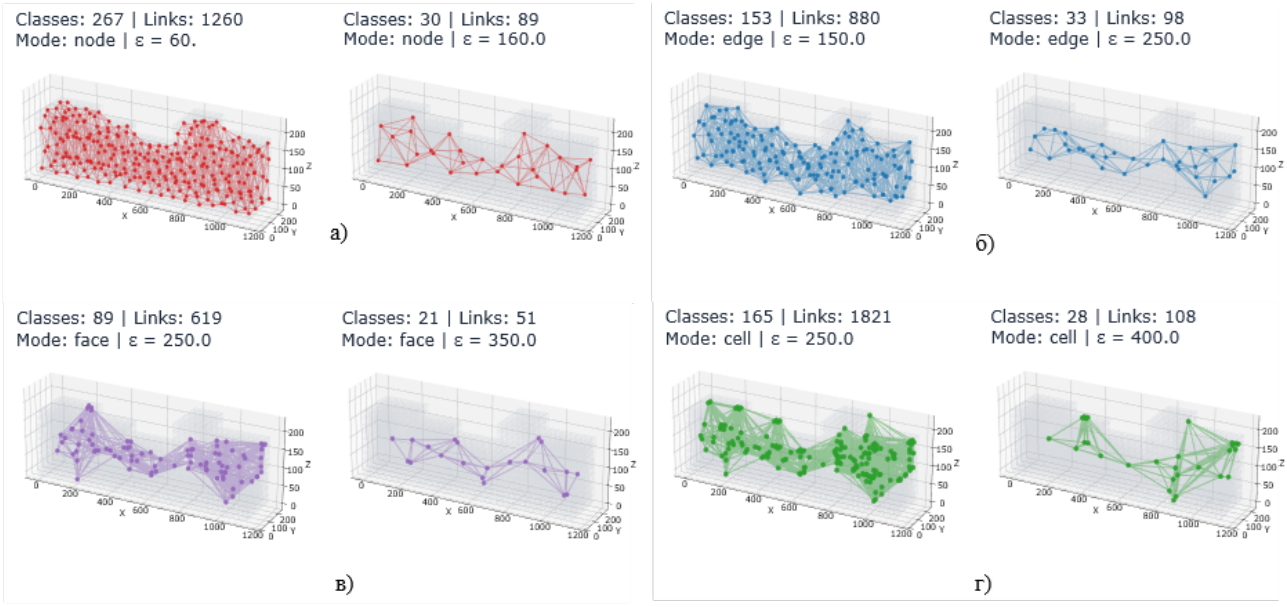



**Рис. 1.** *Факторизация полиэдрального комплекса для элементов:*
*а) 0-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 60$ *и* $\varepsilon_{\max} = 160$*; б) 1-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 150$ *и* $\varepsilon_{\max} = 250$*;*
*в) 2-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 250$ *и* $\varepsilon_{\max} = 350$*; г) 3-го ранга,* $\varepsilon_{\min} = 250$ *и* $\varepsilon_{\max} = 400$

Приведем пример факторизации комплекса элементов некого здания, жилого или общественного, например, гипермаркета, состоящего из элементов: 0 ранг — 7423, 1 ранг — 20697, 2 ранг — 19215, 3 ранг — 5940 элементов с минимальной и максимальной экспертной оценкой параметра $\varepsilon$, приведенных на рис. 1.

**Структурные характеристики: графы на $\varepsilon$-сети комплекса элементов**

Графы являются хорошо изученной структурой (например, [3, 5–7]) с множеством различных алгоритмов (обходы, кластеризация, маршрутизация и т.д.). Поэтому будем рассматривать комплекс элементов как комплекс-граф с явными связями между элементами. В дальнейшем на нем проведем факторизацию по $\varepsilon$-близким элементам.

**Структурные характеристики: программная платформа**

Общая концепция минимизации функционалов на комплексах элементов представлена на блок-схеме (рис. 2). Предложенная схема алгоритма базируется на принципе последовательного перехода от высокодетализированного представления объекта к его редуцированной форме (факторизованному графу), что позволяет существенно снизить вычислительную сложность задачи оптимизации без потери структурной целостности системы.




**Рис. 2.** *Блок-схема программной платформы минимизации функционала на комплексах элементов*

Предложенная концепция может быть применена к различным типам комплексов — от полиэдральных моделей пространственных объектов до алгебраических структур, что делает ее применимой для широкого спектра задач.

**Полиэдральные комплексы**

Определим полиэдральный комплекс как цифровую модель некого здания в виде объединения выпуклых многогранников с попарно непересекающимися внутренностями. В зависимости от их размерности (ранга), равной 0, 1, 2 или 3, будем их называть, соответственно, узел, ребро, грань или ячейка {node,edge,face,cell}. Каждый элемент $n$-го ранга определяется составляющими его элементами $(n-1)$ ранга. Множество элементов $(n-1)$ ранга будем обозначать через $K_n$ [1, 2].

Маршрутизация в здании описывает допустимые перемещения внутри его пространственной структуры. Примером таких задач являются внештатные и аварийные ситуации — например, эвакуация при пожаре, задымлении, утечке газа, землетрясении или угрозе теракта. В этих условиях необходимо быстро и безопасно вывести людей из здания, выбирая маршруты с учетом

блокировок, зон повышенного риска и ограниченной проходимости. Другим важным примером являются задачи роботизированной навигации: мобильные платформы и сервисные роботы должны планировать безопасные и эффективные траектории движения по внутренним пространствам, избегая препятствий и учитывая ограничения среды. Кроме того, методы маршрутизации применяются [8] при моделировании людских потоков в зданиях, где анализируются закономерности перемещения людей с целью повышения комфорта, предотвращения заторов и оценки пропускной способности помещений и маршрутов.

Как было сказано ранее, для комплекса, представляемого в виде графа, возможно использование стандартных алгоритмов маршрутизации, в частности Дейкстры и A* [5, 7]. Ранговая структура комплекса дает возможность поиска путей не только по узлам и ребрам, но и по элементам более высоких размерностей.

**Полиэдральные комплексы: постановка задачи**

Пусть задан полиэдральный комплекс $\boldsymbol{K}$ и выбран режим маршрутизации $m \in \{\text{node,edge,face,cell}\}$. Для каждого такого режима строится соответствующий ему граф смежности $G_m = (X_m,\Gamma_m)$, где $S_m \subseteq X_m$ и $T_m \subseteq X_m$ множества допустимых стартовых и финишных состояний. Графы смежности всех режимов определяют пространство допустимых состояний задачи маршрутизации.

Под маршрутом будем понимать последовательность состояний $P = (x_0,x_1,\cdots,x_k)$, где $x_0 \in S_m$, $x_k \in T_m$, $(x_i,x_{i+1}) \in \Gamma_m$ ($\Gamma_m$ — допустимый переход). Тогда задача маршрутизации в комплексе $\boldsymbol{K}$ формулируется как задача минимизации функционала пути:

$$\min_{P\in\mathcal{P}(S_m,T_m)} J(P), \qquad J(P) = |P| - 1, \tag{2}$$

где $\mathcal{P}(S_m,T_m)$ — множество всех допустимых маршрутов из $S_m$ в $T_m$, $|P|$ — число состояний в маршруте $P$.

**Полиэдральные комплексы: факторизация множества состояний**

Множество допустимых состояний факторизуется по $\varepsilon$-близким элементам в соответствии с определением, данным в разделе «**Структурные характеристики: эпсилон-сети на комплексах элементов**». Элементы 0-го ранга (узлы) объединяются в классы, в каждом из которых отбирается 1 представитель. Элементы старших рангов отождествляются последовательно по рангам: элементы ранга $k$ относятся к одному классу, если совпадают наборы классов, к которым принадлежат составляющие их элементы ранга $(k-1)$. В рассматриваемой модели полиэдрального комплекса это определение эквивалентно отождествлению элементов старших рангов при совпадении классов всех составляющих их элементов 0-го ранга. Таким образом, исходное множество состояний $X_m$ заменяется укрупненным множеством классов, сопоставляющим каждому состоянию его $\varepsilon$-класс:

$$\tilde{X}_m = X_m/{\sim_\varepsilon} \tag{3}$$

по операции отождествления, обозначенной символом $\sim_\varepsilon$.

На редуцированном пространстве поиска $\tilde{X}_m$ строится факторизованный граф $\tilde{G}_m = \left(\tilde{X}_m,\tilde{\Gamma}_m\right)$, где $\tilde{\Gamma}_m = \Gamma_m/{\sim_\varepsilon}$. Исходная задача заменяется факторизованной, т.е. поиском оптимального маршрута на $\tilde{G}_m$ факторизованной задачи:

$$\min_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{S}_m,\tilde{T}_m)} \tilde{J}(\tilde{P}), \qquad \tilde{J}(\tilde{P}) = |\tilde{P}| - 1. \tag{4}$$

В ней следует обеспечить выполнение двух требований:

- минимизация числа переходов между классами $\varepsilon$-факторизации;
- минимизация длины маршрута в исходном графе.

Поскольку приоритет этих требований неодинаков, оптимизация проводится лексикографически: сначала минимизируется число переходов между $\varepsilon$-классами, затем число шагов реального маршрута.

Помимо длины маршрута, существенным становится число переходов между классами $\varepsilon$-факторизации. Введем функционал числа переходов между различными $\varepsilon$-классами вдоль маршрута, минимизация которого естественна для нашей задачи, а именно:

$$\chi_\varepsilon(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta\big(\pi_\varepsilon(x_i), \pi_\varepsilon(x_{i+1})\big), \tag{5}$$

где $\delta(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 1, & \alpha_i \neq \alpha_j \\ 0, & \alpha_i = \alpha_j \end{cases}$ — индикаторная функция, а $\pi_\varepsilon \colon X_m \to \tilde{X}_m$.

Таким образом, маршруту $P$ сопоставляются две характеристики: $\chi_\varepsilon(P)$ и $J(P)$, которые необходимо учитывать одновременно. Так как данные характеристики имеют разный смысл, то целесообразно использование лексикографического порядка. Первичным будет являться число переходов между $\varepsilon$-классами $\chi_\varepsilon(P)$, вторичной — длина маршрута $J(P)$. Тогда задача принимает вид:

$$\min_{P \in \mathcal{P}(S_m,T_m)} \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big). \tag{6}$$

Оптимальный маршрут $P^*$ определяется условием:

$$\big(\chi_\varepsilon(P^*),J(P^*)\big) \leq_{\text{lex}} \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big) \iff \big(\chi_\varepsilon(P^*) < \chi_\varepsilon(P)\big) \vee \big(\chi_\varepsilon(P^*) = \chi_\varepsilon(P) \ \wedge \ J(P^*) \leq J(P)\big). \tag{7}$$

Иначе говоря, среди всех допустимых маршрутов сначала выбираются те, для которых минимально число переходов между $\varepsilon$-классами, а затем среди них выбирается маршрут минимальной длины.

Аналогично рассматривается векторная стоимость каждого перехода $x \to y$:

$$\boldsymbol{c}(x,y) = \big(\delta(\pi_\varepsilon(x),\pi_\varepsilon(y)),1\big). \tag{8}$$

А стоимости маршрута $P$ ставится в соответствие сумма:

$$\boldsymbol{C}(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{c}(x_i,x_{i+1}) = \big(\chi_\varepsilon(P),J(P)\big). \tag{9}$$

Задача сведена к поиску маршрута минимальной векторной стоимости в лексикографическом порядке.

**Полиэдральные комплексы: восстановление оптимального маршрута и его интерпретация**

Пусть в результате решения лексикографической задачи найдено оптимальное конечное состояние $x^* \in T_m$.

Введем отображение parent: $X_m \to X_m \cup \{\emptyset\}$, которое каждому состоянию из $X_m$ сопоставляет предшествующее ему состояние, а начальному состоянию $x_0$ — значение $\emptyset$.

Оптимальный маршрут восстанавливается обратным проходом от $x^*$ до $x_0$:

$$x_n = x^*, \quad x_{n-1} = \text{parent}(x_n), \quad x_{n-2} = \text{parent}(x_{n-1}), \quad \ldots, x_0. \tag{10}$$

После чего полученная последовательность инвертируется. В результате получается оптимальный маршрут:

$$P^* = \{x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n\}. \tag{11}$$

Поскольку каждое состояние $x_i$ обладает образом $\pi_\varepsilon(x_i)$, маршруту $P^*$ сопоставляется последовательность классов $\{\pi_\varepsilon(x_0),\pi_\varepsilon(x_1),\ldots,\pi_\varepsilon(x_n)\}$. Маршрут определяется переходами от одного класса к следующему. Поэтому вводится операция сжатия (факторизация $\varepsilon$-классов):

$$\mathrm{Comp}_\varepsilon(P^*) = (q_0, q_1, \ldots, q_k), \tag{12}$$

где $q_i = \pi_\varepsilon(x_i)$, а каждый следующий класс $q_j$ добавляется в случае, если он отличен от предыдущего.

Таким образом, оптимальное решение интерпретируется как пара $(P^*, \mathrm{Comp}_\varepsilon(P^*))$ с числовыми характеристиками $\chi_\varepsilon(P^*)$ и $J(P^*)$.

**Полиэдральные комплексы: численная реализация маршрутизации на ЭВМ**

Объект здания, например гипермаркет, моделируется как полиэдральный комплекс. При построении оптимального маршрута из узла $n1$ в узел $n7163$ используются три варианта маршрутизации:

1. Простой маршрут (рис. 3а), без $\varepsilon$-факторизации.
2. Маршрут по $\varepsilon$-классам (рис. 3б). В этом случае путь строится в факторизованном пространстве, где близкие элементы объединяются в классы. Такой маршрут отражает общую схему перемещения и показывает укрупненную структуру пути.
3. Маршрут с учетом лексикографической структуры (рис. 3в): сначала минимизируется число переходов между $\varepsilon$-классами, затем — длина маршрута. В результате получается реальный путь, согласованный с $\varepsilon$-факторизацией.

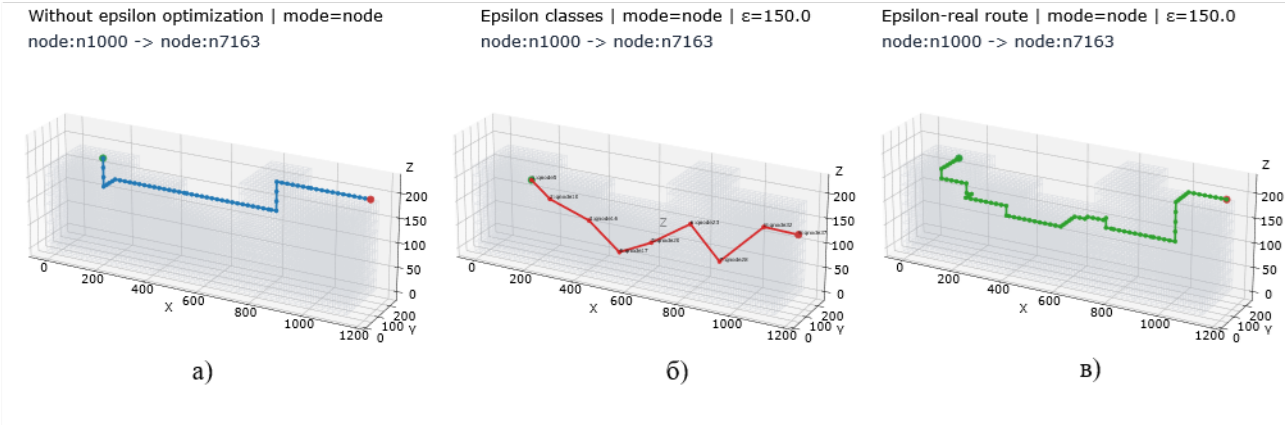



**Рис. 3.** *Маршрут из узла $n1$ в узел $n7163$: а) простой маршрут; б) факторизованный маршрут; в) лексикографический маршрут*

**Заключение**

В данной работе представлен $\varepsilon$-сетевой алгоритм минимизации функционалов на комплексах элементов. Разработанный подход к факторизации пространства состояний позволяет эффективно снизить размерность задачи оптимизации, сохраняя при этом связность исходной структуры и ее основные свойства. Предложенный метод универсален и может быть применен к широкому классу задач, где данные представимы в виде комплекса элементов.

Использованный в работе лексикографический порядок позволяет решать задачи с выполнением нескольких требований, а именно: приоритетное сокращение числа переходов между $\varepsilon$-классами в сочетании с минимизацией длины маршрута. Работа алгоритма показана на примере маршрутизации в полиэдральном комплексе здания. Дальнейшим направлением исследования является применение алгоритма к другим типам комплексов, в том числе к полиномиальным комплексам при решении задач физики плазмы.

Построение решений оптимизационных задач посредством перебора по эпсилон-сетям и эффективное построение таких сетей было изначально предложено в работах [9, 10].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Rozhkov A. N., Galishnikova V. V. Explicit Digital Models of Linear Complexes. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022;18(4):101–110. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-4-101-110.
2. Rozhkov A. N., Galishnikova V. V. Construction and Modification of Topological Tables for Digital Models of Linear Complexes. *Mathematical and Computational Applications*. 2023;28(2):37. DOI: 10.3390/mca28020037.
3. Bondy J. A., Murty U. S. R. *Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics*. London: Springer; 2008. 655 p.
4. Hamilton W. L., Ying R., Leskovec J. Representation Learning on Graphs: Methods and Applications. *IEEE Data Engineering Bulletin*. 2017;40(3):52–74.
5. Dijkstra E. W. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. *Numerische Mathematik*. 1959;1:269–271. DOI: 10.1007/BF01386390.
6. Fortunato S. Community Detection in Graphs. *Physics Reports*. 2010;486(3–5):75–174. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.11.002.
7. Hart P. E., Nilsson N. J., Raphael B. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*. 1968;4(2):100–107. DOI: 10.1109/TSSC.1968.300136.
8. Helbing D., Molnár P., Farkas I. J., Bolay K. Self-Organizing Pedestrian Movement. *Environment and Planning B: Planning and Design*. 2001;28(3):361–383. DOI: 10.1068/b2697.
9. Demidov A. S., Kochurov A. S., Popov A. Yu. To the Problem of the Recovery of Nonlinearities in Equations of Mathematical Physics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009;163(1):46–77. DOI: 10.1007/s10958-009-9658-x.
10. Demidov A. S., Savel'ev V. V. Essentially Different Distributions of Current in the Inverse Problem for the Grad-Shafranov Equation. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2010;17(1):56–65. DOI: 10.1134/S106192081001005X.

# СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ КОДИРОВАНИЯ АУДИОСИГНАЛОВ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СПАЙКОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ

**Р. Б. Рыбка**[1,2,а], **Д. Г. Крикунов**[1,3,б], **Я. П. Ивина**[1,в]

[1] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Российская Федерация*

[2] *Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация*

[3] *Московский инженерно-физический институт (Национальный исследовательский ядерный университет), г. Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5595-6398,* ✍ *rybkarb@gmail.com*

[б] *ORCID: http://orcid.org/0009-0004-0770-8842, kdg006@campus.mephi.ru*

[в] *ORCID: http://orcid.org/0009-0008-4307-9376, yana.ivina.00@mail.ru*

*Аннотация:* рассматривается представление коротких речевых сигналов последовательностями спайков для классификации многослойной спайковой нейронной сетью в потоковом режиме. Сравниваются три метода кодирования: интегральное частотное кодирование, потоковое спектральное кодирование и кодирование локальной динамики сигнала — все с единой архитектурой сети из нейронов Leaky Integrate-and-Fire, обучаемой методом суррогатного градиента. Эксперименты на наборах Google Speech Commands v0.01 (GSC) и Heidelberg Digits (HD) показали: для GSC наивысшая точность (83,1 %) достигается при интегральном кодировании, для HD все методы дают сравнимые точности. Потоковое спектральное кодирование требует лишь 4 шагов симуляции на один шаг спектрограммы, что снижает задержку ответа сети. Кодирование локальной динамики дает на GSC точность 80,1 % (на 3 % ниже интегрального) при более компактном входном представлении. Результаты позволяют дать рекомендации по выбору спайкового кодирования под заданные ограничения на вычислительные ресурсы.

*Ключевые слова:* спайковые нейронные сети, кодирование аудиосигналов, распознавание речи, многослойный перцептрон, суррогатный градиент.

*Благодарности:* работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт». Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов федерального центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных для установок мега-класса» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», http://ckp.nrcki.ru/.

*Для цитирования:* Рыбка Р. Б., Крикунов Д. Г., Ивина Я. П. Сравнение методов кодирования аудиосигналов для многослойных спайковых нейронных сетей в задачах классификации. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):126–132.

*Поступила в редакцию: 22.07.2026.* *В окончательном варианте: 12.08.2026.*

# COMPARISON OF AUDIO SIGNAL ENCODING METHODS FOR CLASSIFICATION WITH MULTILAYER SPIKING NEURAL NETWORKS

**R. B. Rybka**[1,2,a], **D. G. Krikunov**[1,3,b], **Ya. P. Ivina**[1,c]

[1] *National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation*

[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, Russian Federation*

[3] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

[a] *ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5595-6398,* ✍ *rybkarb@gmail.com*

[b] *ORCID: http://orcid.org/0009-0004-0770-8842, kdg006@campus.mephi.ru*

[c] *ORCID: http://orcid.org/0009-0008-4307-9376, yana.ivina.00@mail.ru*

*Abstract:* we compared three computationally simple methods for encoding short speech recordings as spike sequences for real-time classification with a multilayer spiking neural network. The methods included integral coding of spectral features, stream spectral encoding, and direct encoding of

local signal dynamics. All three methods used the same network of Leaky Integrate-and-Fire neurons trained by surrogate-gradient backpropagation. Experiments on the Google Speech Commands v0.01 (GSC) and Heidelberg Digits (HD) datasets showed that integral rate coding achieved the highest accuracy on GSC (83.1%), whereas all three methods performed comparably on HD. Stream spectral encoding required only four simulation time steps per spectrogram frame, substantially reducing response latency. Speech2Spikes achieved 80.1% accuracy on GSC, only 3% below integral rate coding, while using a more compact input representation. The results provide a basis for selecting spike encoding methods under different computational and latency constraints.

*Keywords:* spiking neural networks, audio signal encoding, speech recognition, multilayer perceptron, surrogate gradient.

*Acknowledgements:* this study is a part of a government contract awarded to the National Research Centre “Kurchatov Institute”. The authors utilized the computing resources of the Simulation and Data Processing for Megascience shared research facility at the “Kurchatov Institute”, http://ckp.nrcki.ru/.

*Cite this article:* Rybka R. B., Krikunov D. G., Ivina Ya. P. Comparison of Audio Signal Encoding Methods for Classification with Multilayer Spiking Neural Networks. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):126–132.

*Original article submitted: 22.07.2026.* *Revision submitted: 12.08.2026.*

**Введение**

Импульсные (спайковые) нейронные сети перспективны для энергоэффективного искусственного интеллекта благодаря событийной обработке и совместимости с нейроморфными устройствами [1–6]. Для распознавания речевых команд в реальном времени важны малая задержка и компактность модели.

Частотное кодирование отображает амплитуду признака спектрограммы в среднюю частоту спайков. Оно обеспечивает высокую точность [7–10], но требует обработки всей спектрограммы. Потоковое спектральное кодирование работает с текущим кадром, а кодирование локальной динамики передает направление изменения признака относительно порога [5, 11]. Частотное кодирование имеет три ограничения: для представления признака без потери информации нужно несколько временных шагов (что увеличивает задержку ответа), размерность входа растет с числом временных отсчетов спектрограммы, а само формирование спектрограммы требует предварительного накопления фрагмента сигнала. Потоковые методы кодирования частично компенсируют сокращение временного контекста за счёт внутренней динамики сети — нелинейности мембранного потенциала, утечки и порогового механизма.

Цель работы — сравнить эти методы при фиксированной архитектуре сети Leaky Integrate-and-Fire, обучаемой суррогатным градиентом [1, 8].

Основные результаты:

- на GSC интегральное кодирование даёт 83,1 %, а на HD — 77,1 %;
- на HD точности методов близки: 78,5 %, 77,1 % и 76,5 %;
- на GSC динамическое кодирование превосходит потоковое: 80,1 % против 70,9 %;
- даны рекомендации по выбору метода с учётом точности, задержки и ресурсов.

**Наборы данных**

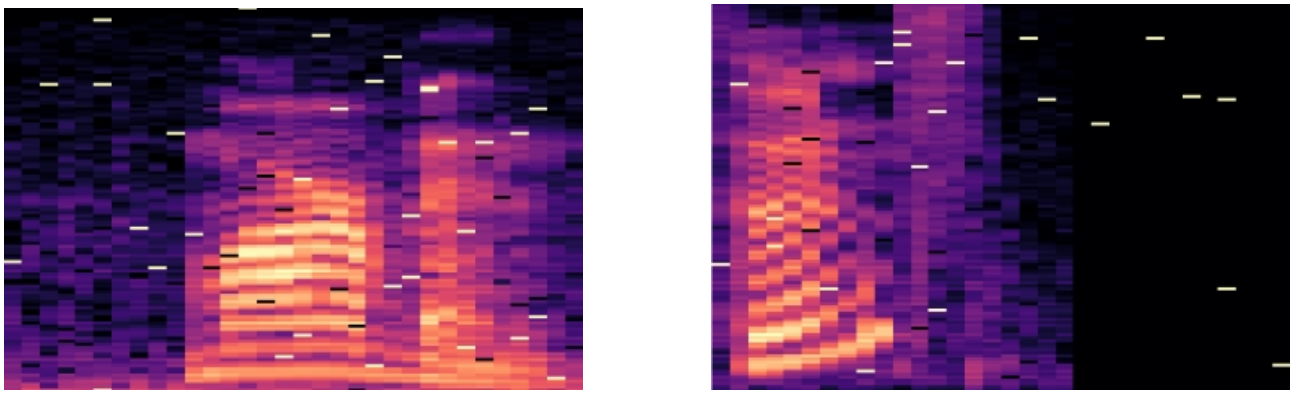
Используются Google Speech Commands (GSC) и Heidelberg Digits (HD); основные характеристики приведены в таблице 1. GSC содержит 30 голосовых команд от 1881 диктора [7], HD — 20 классов цифр на английском и немецком языках от 12 дикторов [4].

*Таблица 1*

*Сводные характеристики используемых наборов данных*

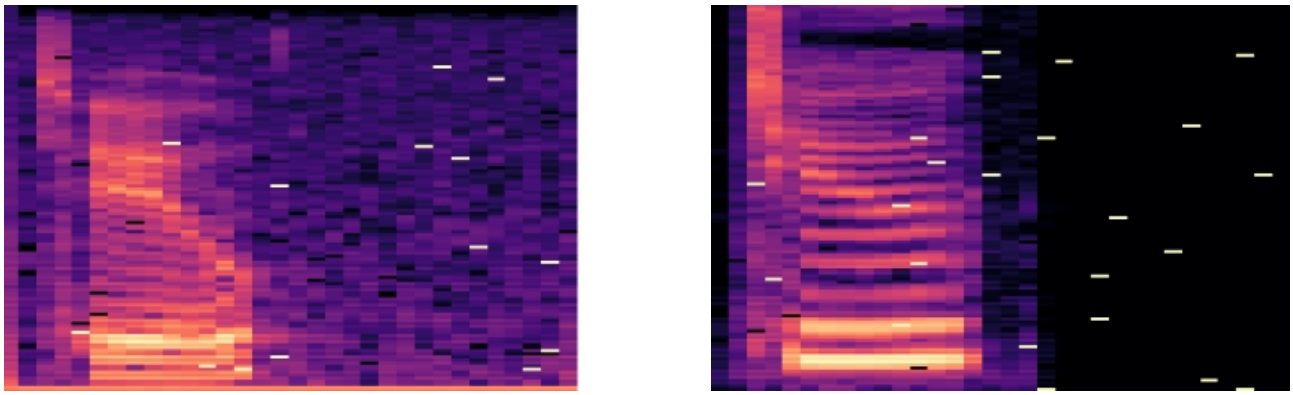
| Характеристики | Google Speech Commands | Heidelberg Digits |
|---|---|---|
| Длина аудио: мин/макс/ср., с | 0.37/1.00/0.98 | 0.23/1.37/0.72 |
| Классов | 30 | 20 |
| Аудиозаписей в обучающей выборке | ≈ 51000 | ≈ 8300 |
| Аудиозаписей в валидационной выборке | ≈ 6800 | – |
| Аудиозаписей в тестировочной выборке | ≈ 6800 | ≈ 2100 |

Примеры мел-спектрограмм представлены на рисунках 1 и 2.



*GSC: команда* **marvin** *HD: цифра 3 (нем.)*

**Рис. 1.** *Примеры мел-спектрограмм различных классов из наборов данных GSC и HD*



*GSC: цифра 2 (англ.)* *HD: цифра 2 (англ.)*

**Рис. 2.** *Мел-спектрограммы записей произнесения английской цифры 2 в наборах данных GSC (слева) и HD (справа)*

Все сигналы приводятся к длительности 1 с и частоте дискретизации 16 кГц: короткие записи дополняются нулями, длинные обрезаются. На их основе вычисляются мел-спектрограммы с $N = 128$ частотными каналами:

$$m(f) = 2595 \log_{10}\left(1 + \frac{f}{700}\right). \tag{1}$$

Спектрограмма имеет размерность $N \times T_{\text{frames}}$, где $T_{\text{frames}}$ определяется шагом окна. Значения признаков нормируются по всему набору данных:

$$x_{\text{norm}} = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}. \tag{2}$$

### Методы кодирования в спайковые последовательности

#### *Интегральное кодирование (rate coding)*

Нормированное значение признака $x_{\text{norm}}$ задает вероятность спайка на каждом из $T$ временных шагов [3]:

$$s_t \sim \text{Bernoulli}(p(x_{\text{norm}})), \quad t = 1, \ldots, T. \tag{3}$$

Средняя частота спайков кодирует амплитуду признака, а размер входа равен $N_{\text{in}} = N \times T_{\text{frames}}$.

***Потоковое спектральное кодирование (frequency stream coding)***

Метод обрабатывает кадры мел-спектрограммы последовательно [5]. Каждый кадр разбивается на $K = 4$ подшага, а нормированная амплитуда определяет число равномерно распределённых спайков $m_{k,t_f}$. Поэтому $T = T_{\text{frames}} \times K$, а $N_{\text{in}} = N$.

***Кодирование локальной динамики сигнала (Speech2Spikes)***

Метод кодирует увеличение и уменьшение признака относительно порога $\theta$ [11]. Для каждого признака формируются положительный и отрицательный потоки:

$$s^{+}_{i,t} = \mathbb{I}\left(x_{i,t} - x_{i,t-1} > \theta\right), \tag{4}$$

$$s^{-}_{i,t} = \mathbb{I}\left(x_{i,t-1} - x_{i,t} > \theta\right), \tag{5}$$

где $\theta$ — порог чувствительности, а $\mathbb{I}(\cdot)$ — индикаторная функция. Первый поток соответствует увеличению признака, второй — его уменьшению.

Размер входа равен $N_{\text{in}} = 2N$. Для сопоставимости с потоковым методом используется шаг спектрограммы $hop/K$, где $K = 4$.

Параметры приведены в таблице 2.

*Таблица 2*

*Параметры извлечения мел-спектрограммы и размерность входа спайковой сети при различных методах кодирования*

| Метод | Шаг сдвига, точек | Шаг сдвига, мс | $N_{\text{in}}$ | Длина окна $T_{\text{frames}}$ | Длит. симуляции $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Интегральное кодирование | 512 | 32.0 | 4096 | 1 | 10 |
| Потоковое спектральное кодирование | 512 | 32.0 | 128 | 32 | 4 |
| Кодирование локальной динамики сигнала | 122 | 7.6 | 256 | 128 | 32 |

Для всех методов используется частота дискретизации 16000 Гц, размер окна БПФ 400 и число частотных каналов $N = 128$.

**Архитектура спайковой нейронной сети**

Используется полносвязная многослойная сеть MLP-LIF, состоящая из входного слоя, двух скрытых слоев и выходного классификатора (рисунок 3). Размерность входа $N_{\text{in}}$ приведена в таблице 2.

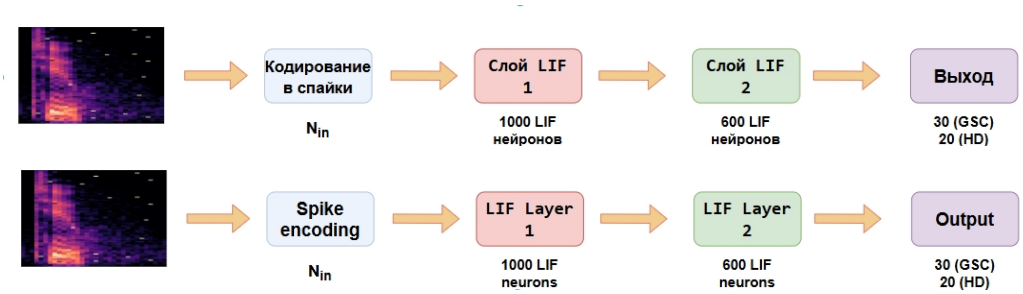



**Рис. 3.** *Схема архитектуры MLP-LIF: спектрограмма, кодирование, два скрытых слоя LIF и выходной слой классификатора*

Скрытые слои содержат 1000 и 600 нейронов LIF. Динамика мембранного потенциала описывается уравнениями (6) и (7).

$$v_{t+1} = \alpha v_t + W x_t - v_{\text{th}} s_t, \tag{6}$$

где $v_t$ — мембранный потенциал в момент времени $t$, $x_t$ — вектор входных спайков, $W$ — матрица весов, $\alpha \in (0{,}1)$ — коэффициент утечки, $v_{\text{th}}$ — порог генерации спайка, $s_t \in \{0{,}1\}$ — бинарный выход нейрона. Спайк генерируется при превышении порога:

$$s_t = H(v_t - v_{\text{th}}), \tag{7}$$

где $H(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Выходной слой содержит 30 нейронов для GSC и 20 для HD. Спайки суммируются по времени, после чего применяются линейное преобразование и *softmax*. Для всех методов изменяется только размер входного слоя. Архитектура MLP-LIF намеренно выбрана простой: в ней отсутствуют рекуррентные связи и специальные блоки памяти, а вся временная информация обрабатывается за счет внутренней динамики мембранного потенциала LIF-нейронов. Такой выбор упрощает интерпретацию результатов: изменение точности при переходе от одного метода кодирования к другому можно напрямую связывать с различиями во входном представлении, поскольку механизмы обработки внутри сети остаются неизменными.

**Обучение и суррогатная функция активации**

Для обучения используется адаптация метода обратного распространения ошибки на основе суррогатных градиентов: в прямом проходе применяется ступенчатая функция (7), а в обратном проходе ее производная заменяется гладкой аппроксимацией в окрестности порога.

В качестве суррогатной функции для мембранного потенциала $\sigma(U)$ используется трёхлепестковая функция (Multi-Gaussian), предложенная в работе [12]:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v} \approx (1-h)\,g(v-v_{\text{th}}) - h\,g(v-v_{\text{th}}-l_s) - h\,g(v-v_{\text{th}}+l_s), \tag{8}$$

где $g(x) = \exp\bigl(-x^2/(2s^2)\bigr)$ — нормированная гауссова функция, $v_{\text{th}}$ — порог срабатывания нейрона, а параметры $h \in (0{,}1)$, $l_s > 0$ и $s > 0$ задают параметры боковых лепестков. В численных экспериментах параметры суррогатного градиента фиксировались: $h = 0.15$, $l_s = 1.0$, $s = 6.0$.

Суррогатная функция передает градиент вблизи порога и ограничивает его норму при BPTT. В процессе обучения нейросетевой модели настраиваются веса сети и коэффициент утечки нейронов скрытых слоев $\alpha$ .

**Эксперименты и результаты**

Сравниваются три метода кодирования при фиксированной архитектуре MLP-LIF и одинаковых гиперпараметрах обучения (см. таблицу 3). Каждый эксперимент повторяется четыре раза с различными начальными весами. Гиперпараметры подбирались по валидационной выборке набора GSC (как более сложного среди выбранных датасетов) и далее не изменялись при смене метода кодирования. Тестовые точности приведены в таблице 4.

*Таблица 3*

*Гиперпараметры обучения модели MLP-LIF*

| **Параметр** | **Значение** |
|---|---|
| Оптимизатор | Adam |
| Функция потерь | NLLLoss |
| Размер батча | 256 |
| Число эпох | 50 |
| Длина временного окна для rate coding | 10 шагов |
| Начальная скорость обучения | $2 \cdot 10^{-3}$ |
| Порог генерации спайка $v_{\text{th}}$ | 1.0 |
| Инициализация весов | Xavier uniform |

*Таблица 4*

*Точность и характеристики итоговой модели MLP-LIF при различных методах кодирования*

| **Метод** | **Пар.** | $N_{\text{in}} \times T$ | **Режим** | **GSC, %** | **HD, %** |
|---|---|---|---|---|---|
| Интегральное кодирование | ≈4.7M | $4096 \times 10$ | офлайн | $\mathbf{83.1 \pm 1.2}$ | $77.1 \pm 2.5$ |
| Кодирование локальной динамики | ≈0.9M | $256 \times 128$ | онлайн | $80.1 \pm 1.7$ | $76.5 \pm 1.3$ |
| Потоковое частотное кодирование | ≈0.7M | $128 \times 128$ | онлайн | $70.9 \pm 1.5$ | $\mathbf{78.5 \pm 2.1}$ |

На HD методы дают близкие результаты (76,5–78,5 %). На GSC интегральный метод дает 83,1 %, динамический — 80,1 %, а потоковый — 70,9 %. Для базовых нерекуррентных спайковых

сетей без обучаемых задержек на близком по составу наборе Spiking Heidelberg Digits (SHD) [4] сообщаются точности порядка 75–80 %, тогда как добавление адаптивной динамики и совместно обучаемых синаптических задержек позволяет повысить точность до ≈ 90 % и выше [12, 13]. Таким образом, наблюдаемое ограничение точности на HD связано не только со способом кодирования, но и с простотой архитектуры MLP-LIF.

**Обсуждение результатов**

Выбор кодирования определяется компромиссом между точностью, размером модели и задержкой. Интегральное кодирование использует вектор $N_{\text{in}} = 4096$ и дает наивысшую точность на GSC, но требует около 4,7 млн параметров и предварительного накопления записи. В отличие от интегрального кодирования, Speech2Spikes передает не абсолютное значение спектрального признака в кадре, а лишь величину его изменения относительно предыдущего кадра. Это делает метод чувствительным к разрешению спектрограммы по времени и частоте: при крупном шаге дискретизации локальные изменения сигнала между соседними кадрами могут оказаться меньше порога $\theta$ и не порождать спайков, что приводит к потере информации о сигнале. Для повышения точности целесообразно использовать более плотные спектральные признаки.

Потоковое кодирование использует $N_{\text{in}} = 128$ и около 0,7 млн параметров, обеспечивая минимальную задержку. Кодирование локальной динамики требует $N_{\text{in}} = 256$ и около 0,9 млн параметров; на GSC оно уступает интегральному методу примерно на 3 процентных пункта. Интегральное кодирование предпочтительно при возможности накопления фрагментов длительностью более 1 с и поддержке входного слоя размером ≈4 тыс. нейронов. При более жестких ограничениях (компактность модели, снижение задержек и затрат на память) предпочтительны потоковые методы.

**Заключение**

Сравнены три метода кодирования аудиосигналов в сети MLP-LIF на наборах GSC и HD. На GSC интегральное кодирование обеспечивает 83,1 %, а динамическое — 80,1 % при сокращении числа параметров примерно с 4,7 до 0,9 млн. На HD точности методов составляют 76,5–78,5 %.

Дальнейшая работа включает совместную настройку кодирования и архитектуры сети, в том числе сочетание потоковых методов с рекуррентными связями, адаптивной динамикой и обучаемыми задержками [2, 8, 12, 13].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Neftci E. O., Mostafa H., Zenke F. Surrogate Gradient Learning in Spiking Neural Networks: Bringing the Power of Gradient-Based Optimization to Spiking Neural Networks. *IEEE Signal Processing Magazine*. 2019;36(6):51–63.
2. Bellec G., Salaj D., Subramoney A., Legenstein R., Maass W. Spike-Frequency Adaptation Provides a Long Short-Term Memory to Networks of Spiking Neurons. *Nature Communications*. 2020;11:3690.
3. Auge D., Hille J., Mueller E., Knoll A. A Survey of Encoding Techniques for Signal Processing in Spiking Neural Networks. *Neural Networks*. 2021;142:273–301.
4. Cramer B., Stradmann Y., Schemmel J., Zenke F. The Heidelberg Spiking Data Sets for the Systematic Evaluation of Spiking Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2022;33(7):2744–2757.
5. Rybka R. B., Dyakova E. O., Serenko A. V., Sboev A. G. Spiking Neural Network with Quantized Weights for Audio Stream Classification. *Studies in Computational Intelligence*. 2025;1179:89–97.
6. Matsukatova A. N., Prudnikov N. V., Kulagin V. A. et al. Combination of Organic-Based Reservoir Computing and Spiking Neuromorphic Systems for a Robust and Efficient Pattern Classification. *Adv. Intell. Syst.* 2023;5:2200407.
7. Warden P. Speech Commands: A Dataset for Limited-Vocabulary Speech Recognition. 2018. arXiv:1804.03209.
8. Bittar A., Garner P. N. A Surrogate Gradient Spiking Baseline for Speech Command Recognition. *Frontiers in Neuroscience*. 2022;16:865897.

9. Wang J., Yu L., Huang L., Zhou C., Zhang H., Song Z., Zhang M., Ma Z., Zhang Z. Efficient Speech Command Recognition Leveraging Spiking Neural Network and Curriculum Learning-Based Knowledge Distillation. 2024. arXiv:2412.12858.
10. Zhang S., Yang Q., Ma C., Wu J., Li H., Tan K. C. TC-LIF: A Two-Compartment Spiking Neuron Model for Long-Term Sequential Modelling. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2024.
11. Stewart K. M., Shea T., Pacik-Nelson N., Gallo E., Danielescu A. Speech2Spikes: Efficient Audio Encoding Pipeline for Real-Time Neuromorphic Systems. *Proceedings of the 2023 Annual Neuro-Inspired Computational Elements Conference (NICE)*. 2023:1–7. DOI: 10.1145/3584954.3584995.
12. Yin B., Corradi F., Bohté S. M. Accurate and Efficient Time-Domain Classification With Adaptive Spiking Recurrent Neural Networks. *Nature Machine Intelligence*. 2021;3:905–913.
13. Hammouamri I., Khalfaoui-Hassani I., Masquelier T. Learning Delays in Spiking Neural Networks Using Dilated Convolutions with Learnable Spacings. *The Twelfth International Conference on Learning Representations (ICLR)*. 2024.

# АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СЛОВАРЯ ТИПИЗИРОВАННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ШАБЛОНОВ УПРАВЛЯЮЩЕГО КОДА ПО ПРОМЫШЛЕННОМУ КОРПУСУ

**С. Е. Щигал**[1,а], **В. И. Соловьев**[2,б]

[1] *Российский государственный социальный университет, Москва, Российская Федерация*

[2] *Государственный университет по землеустройству, Москва, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-0295-2934,* ✍ *swimanshigal@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0338-1227, vs@guz.ru*

*Аннотация:* буквальное сравнение управляющих программ чувствительно к именам переменных и не всегда выделяет существенные изменения. Цель — формализовать построение словаря типизированных канонических шаблонов языка Structured Text и определить ограничения статического сравнения. Материал — промышленный проект вентиляции из 189 программных единиц. Операторы преобразуются в сигнатуры, сохраняющие вид конструкции, ограниченную структуру выражений, роли и типы переменных, классы литералов. Частые сигнатуры образуют словарь, редкие заменяются общими категориями. Исправленный синтаксический анализ дал 7794 вхождения; при глубине один и минимальной частоте пять выделено 238 шаблонов с покрытием 54,0 %. Полные и пороговые последовательности сохранились после лексической замены идентификаторов в 188 измененных единицах. На шести процедурах расстояние до переименованного варианта равно нулю, до контролируемого изменения — от одного до трех. Во внешнем архиве из 110 вариантов полные представления различались в 65 и 75 случаях при глубинах один и два относительно модального эталона. Эти результаты не доказывают функциональной корректности. Основные ограничения — потеря тождества переменных, укрупнение литералов, неполный охват синтаксиса и отсутствие независимой экспертной проверки реально сгенерированных программ.

*Ключевые слова:* Structured Text, статический анализ, канонический шаблон, корпусный словарь, расстояние Левенштейна, промышленная вентиляция.

*Для цитирования:* Щигал С. Е., Соловьев В. И. Автоматическое построение словаря типизированных канонических шаблонов управляющего кода по промышленному корпусу. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):133–138.

*Поступила в редакцию: 16.08.2026.* *В окончательном варианте: 21.09.2026.*

# TYPED CANONICAL PATTERN DICTIONARY FOR STATIC COMPARISON OF STRUCTURED TEXT PLC PROGRAMS

**S. E. Shchigal**[1,a], **V. I. Soloviev**[2,b]

[1] *Russian State Social University, Moscow, Russian Federation*

[2] *State University of Land Use Planning, Moscow, Russian Federation*

[a] *ORCID: https://orcid.org/0009-0004-0295-2934,* ✍ *swimanshigal@mail.ru*

[b] *ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0338-1227, vs@guz.ru*

*Abstract:* we investigated a method for comparing numerical-control (NC) programs that reduces the sensitivity of literal comparison to variable names while retaining syntactic and semantic information relevant to program structure. We formalized a dictionary of typed canonical Structured Text patterns and evaluated its use for static program comparison. An industrial ventilation project comprising 189 program units was used to construct the dictionary. Statements were converted into signatures that retained statement types, selected expression structures, variable roles and data types, and literal classes. Frequent signatures were included as individual patterns, whereas rare signatures were grouped into generic categories. After correcting syntactic analysis errors, the dataset contained 7,794 statement occurrences. At a pattern depth of one and a minimum frequency of five, the dictionary contained 238 patterns covering 54.0% of all occurrences. Replacing lexical identifiers in 188 modified program units did not change either the full or thresholded pattern sequences. Across six procedures, comparison distances were zero for renamed variants and ranged from one to three for

controlled modifications. In an external archive containing 110 program variants, full representations differed from the modal reference in 65 cases at depth one and 75 cases at depth two. The method does not establish functional correctness. Its limitations include loss of variable identity, coarse representation of literals, incomplete syntax coverage, and the absence of independent expert validation of the generated programs.

*Keywords:* Structured Text, static analysis, canonical pattern, corpus-based dictionary, Levenshtein distance, industrial ventilation.

*Cite this article:* Shchigal S. E., Soloviev V. I. Typed Canonical Pattern Dictionary for Static Comparison of Structured Text PLC Programs. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):133–138.

*Original article submitted: 16.08.2026.* *Revision submitted: 21.09.2026.*

**Введение**

В вентиляции управляющий код реализует пуск, регулирование и защиты. Генерация из текстовых требований может уменьшить трудоемкость проектирования. Большие языковые модели применяются к программам контроллеров [1, 2], но правильный синтаксис не гарантирует сохранения защит. Статическое сравнение с эталоном, без выполнения кода на контроллере или модели объекта, выделяет варианты для проверки.

Одинаковая операция записывается с разными именами переменных; устойчивость к переименованию важна и для моделей кода [3]. Например, y := a AND b и out := in1 AND in2 имеют одинаковую форму при согласованном соответствии переменных. Напротив, небольшая замена команды открытия заслонки командой закрытия существенна для управления. Нормализация должна отделять произвольные имена от связей и назначения сигналов.

Обнаружение клонов — поиск одинаковых или сходных фрагментов [4]. CCFinder сравнивает нормализованные лексемы — минимальные значимые элементы текста [5]. Aroma использует структурный поиск [6], извлечение идиом выявляет повторяющиеся формы [7], TSED сравнивает синтаксические деревья [8], где операции — узлы, вложенность — связи. Корпусные закономерности служат основой обучаемых представлений кода [9], но готового словаря типизированных форм нашего проекта эти работы не дают.

Расстояние Левенштейна измеряет минимальное число вставок, удалений и замен элементов последовательности [10]. Набор STMutants позволяет исследовать реакцию представления на искусственные изменения программ Structured Text [11], но отличие последовательностей не равнозначно обнаружению функционального дефекта.

Цель — построить частотный словарь типизированных канонических шаблонов по неразмеченному корпусу и проверить покрытие, устойчивость к лексической замене и реакцию на изменения. Домен здесь — управление вентиляционным оборудованием. Корпусный словарь еще не является полной моделью инженерного смысла.

**Корпус и правила представления**

Экспорт одного проекта CODESYS содержит 189 единиц: 41 функциональный блок, 138 методов, 8 функций и 2 программы. Функциональный блок сохраняет состояние между вызовами; методы анализировались с декларациями родительских блоков. Корпус включает управление вентиляцией, обмен по Modbus и преобразования данных. Словарь строился и покрытие оценивалось на одних данных, без независимой тестовой выборки.

Лексический анализатор выделяет лексемы, синтаксический — строит дерево. Обход фиксирует текущий оператор, затем вложенные тела в исходном порядке. Литерал — записанная константа, например TRUE, 0, T#5s. Канонический шаблон — строковая сигнатура, определяемая правилами нормализации данной работы, а не отраслевым стандартом.

Переменная заменяется ролью и типом: вход I, выход O, вход-выход IO, локальная L, глобальная G. Поля экземпляров, имена функций и типы блоков сохраняются. Логические литералы кодируются как BT и BF, ноль — N0, прочие числа, время и строки — N, T, S. Операнды AND, OR, XOR, +, *, =, <> упорядочиваются; глубокие выражения заменяются знаком $\sim$. Выходное присваивание aoSpeed := 0.0 получает сигнатуру A O:REAL:=N0.

Для IF сохраняются число ветвей, наличие ELSE и условия. Для CASE и циклов — вид конструкции и вложенные операторы, но не метки выбора, условия и границы циклов. Аргумен-

ты вызовов упорядочиваются без имен формальных параметров. Эти упрощения ограничивают различимость.

**Формирование словаря и расстояние**

Пусть $P$ — программа, $s_i$ — поддерживаемый оператор, $n$ — их число, $m$ — глубина выражений, $\sigma_m$ — функция сигнатуры. Полная последовательность задается формулой (1):

$$B_m(P) = (\sigma_m(s_1), \ldots, \sigma_m(s_n)). \tag{1}$$

Для корпуса $C$ совокупность $S(C)$ учитывает все вхождения операторов. Частота и словарь при пороге $K$ определяются формулой (2):

$$f_{C,m}(\sigma) = \sum_{s \in S(C)} \mathbf{1}[\sigma_m(s) = \sigma], \qquad D_{K,m} = \{\sigma : f_{C,m}(\sigma) \geq K\}. \tag{2}$$

Индикатор **1** равен единице при истинности условия, нулю иначе. Пороговое кодирование задается формулой (3):

$$b_{K,m}(s) = \begin{cases} \sigma_m(s), & \sigma_m(s) \in D_{K,m}, \\ \mathrm{GEN}(\mathrm{kind}(s)), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Здесь kind — вид оператора, GEN — обобщенная категория. Применение (3) в исходном порядке дает $B_{K,m}(P)$. Конечный алфавит при $m$=1, $K$=5 содержит 238 шаблонов и пять категорий хвоста: присваивание, вызов, условие, выбор, цикл; всего 243 символа. Покрытие задается формулой (4):

$$\mathrm{Cov}(D_{K,m}) = \frac{\sum_{s \in S(C)} \mathbf{1}[\sigma_m(s) \in D_{K,m}]}{|S(C)|}. \tag{4}$$

Для последовательностей $(b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_1, \ldots, c_r)$ расстояние определяется рекуррентно по формуле (5):

$$L_{i,j} = \min\{L_{i-1,j} + 1,\ L_{i,j-1} + 1,\ L_{i-1,j-1} + \mathbf{1}[b_i \neq c_j]\}. \tag{5}$$

Начальные условия: $L_{0,j} = j$, $L_{i,0} = i$; итог $d = L_{n,r}$. Стоимость каждой операции — единица. Полное расстояние сравнивает $B_m$, пороговое — $B_{K,m}$. Условие $d \geq 1$ означает различие представлений, не опасность изменения. Значения $K$=5, $m \in \{0,1,2,3\}$ не оптимизированы по экспертной разметке.

**Протокол и воспроизводимость**

Сопоставлены версии анализа, глубины, лексическая замена, шесть изменений и внешний архив. Расчеты выполнены в разрешающем режиме с контекстом родительского блока. Сравнивались последовательности, не множества. Единица с неизменившимся текстом исключена из переименования.

Архив Figshare версии 3 содержит по десять вариантов 11 программ: всего 110, а не 108 окончательно отобранных мутантов STMutants [11]. Эталоном семейства служила наиболее частая последовательность; при равенстве частот — первая в детерминированном порядке файлов. Модальный эталон не является подтвержденной исходной программой.

Артефакт v0.2.0 содержит код, сценарии, тесты, синтетический пример, контрольные суммы и манифест агрегатов (https://github.com/stchigalsergey/st-functional-canonizer/releases/tag/v0.2.0). Промышленный корпус и словарь закрыты: точные показатели требуют законного доступа к совпадающему снимку 189 файлов. Открытый алгоритм проверяется на собственных и синтетических данных.

**Исправление анализа и покрытие**

Первая версия при $m$=1, $K$=5 дала 7819 вхождений, 233 частых шаблона, покрытие 54,5 %, включая 183 неразобранных фрагмента RAW. Исправление меток CASE дало 7794 вхождения, 2754 различные сигнатуры, 238 шаблонов и 54,0 % покрытия без RAW. Далее используются исправленные показатели.

Отсутствие RAW не доказывает полноту анализа: разрешающий режим отбрасывал 339 знаков разыменования ∧ в 58 файлах до разбора. Строгий режим выпуска останавливается с диагностикой, но разыменование не поддерживает. Агрегаты относятся к разрешающему расчету, а не к успешному строгому анализу всего корпуса.

В таблице 1 и на рисунке показана зависимость от глубины: 7794 вхождения, порог пять. При глубине один частые шаблоны покрывают 4209 вхождений, остальные 3585 переходят в общие категории.

*Таблица 1*

*Размер словаря и точное покрытие при разных глубинах*

| Глубина | Различных сигнатур | Частых шаблонов | Покрытие, % |
|---|---|---|---|
| 0 | 1585 | 181 | 72,0 |
| 1 | 2754 | 238 | 54,0 |
| 2 | 3181 | 219 | 47,2 |
| 3 | 3384 | 214 | 44,8 |

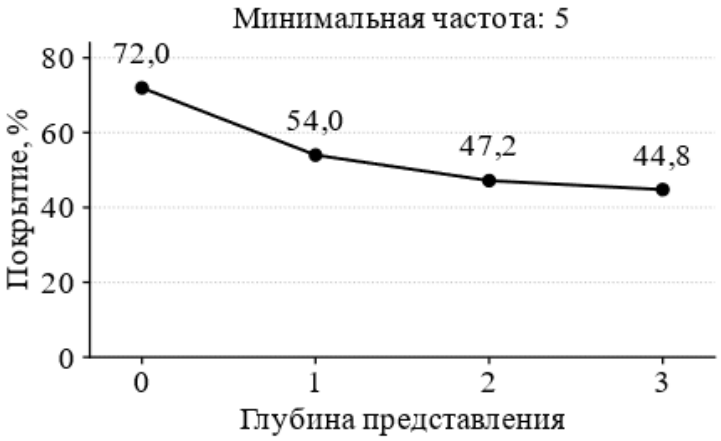



**Рис.** *Точное покрытие при разных глубинах и минимальной частоте пять*

Словарь включает логические присваивания, условия, циклы, таймеры и чтение регистров, отражая управление и обмен данными.

**Лексическая замена и контролируемые изменения**

При $m$=1 полные и пороговые последовательности сохранились в 188 из 188 измененных единиц. Варианты не компилировались и не исполнялись. Замена затронула заголовки 109 единиц и 3089 меток именованных аргументов в 51 единице без сопоставления с декларациями вызываемых блоков. Это нечувствительность к конкретной лексической замене, не доказательство сохранения поведения.

На шести процедурах при $m$=1, $K$=5 пороговое расстояние до переименованного варианта равно нулю, до измененного — от одного до трех (таблица 2). Защелка сохраняет аварию после исчезновения причины: один IF устанавливает флаг, отдельные IF выполняют автоматический и ручной сброс. Удалялся ручной сброс. Ограничение хода удерживает значение в диапазоне 0–100 %.

Правило $d \geq 1$ выделило шесть подготовленных изменений; малая выборка известных преобразований не определяет чувствительность на реальных ответах модели.

**Внешний архив**

От модального эталона отличаются 31 из 110 представлений ручного словаря примерно из 17 элементов, 38 из 110 порогового словаря глубины один и 36 из 110 глубины два. Полные

*Таблица 2*

*Контролируемые изменения и расстояние до измененного варианта*

| Процедура | Изменение | Расстояние |
|---|---|---|
| FB_AirFilter | Удален ручной сброс защелки | 2 |
| FB_ActuatorSim | Удалено ограничение хода | 3 |
| FanController. DetectFlowTransitions | Удалена фиксация таймаута | 3 |
| LiquidStageBase. DecideState | Удалено таймерное подтверждение пуска | 2 |
| RecuperatorStageBase. DecideState | Удалена защитная ветвь | 2 |
| RecirculationStage. DecideState | Инвертирована аварийная команда прямотока | 1 |

сигнатуры различаются в 65 и 75 случаях: 59 и 68 % против 35 и 33 % для пороговых. Это различия последовательностей, не обнаружение функциональных дефектов.

Обобщение редких сигнатур снижает различимость. Выбор эталона при равенстве частот менял показатели по типам мутаций: без исходных программ и разметки они не приводятся.

**Обсуждение результатов**

Частотное построение заменяет ручное перечисление. Большая глубина сохраняет структуру, уменьшая повторяемость; порог объединяет редкие формы. Покрытие не измеряет переносимость и безопасность.

Теряется тождество переменных одинаковой роли и типа: y := a AND b и y := a AND a, а также doOpen := TRUE и doClose := TRUE могут совпасть. Нужны канонические номера с сохранением связей между вхождениями и признаки назначения выходов из интерфейса, привязки канала или спецификации.

Укрупнение литералов может скрыть изменение выдержки с пяти до пятисот секунд: критичные параметры требуют точных значений или обоснованных классов. Сортировка аргументов теряет позиционное значение, пропуск условий циклов и меток выбора — сведения об управлении. Эти потери нельзя трактовать как семантическую эквивалентность.

Редактирующее расстояние штрафует перестановку независимых действий. Для отличения допустимой перестановки от опасной замены нужны зависимости и доменные последствия. Словарь следует фиксировать до оценки новых программ и проверять на независимых проектах с разделением управляющего и транспортного кода.

Экспертная разметка допустимых реализаций и ошибок реально сгенерированного кода необходима для оценки чувствительности, специфичности и порогов. Шесть изменений и корпусное покрытие этого не заменяют. STMutants не представляет ошибки вентиляции и здесь не имеет подтвержденного эталона поведения.

**Заключение**

Получены 238 частых шаблонов с покрытием 54,0 % и пять категорий хвоста. Устойчивость к лексической замене и различимость изменений установлены в пределах протокола, без доказательства функциональной корректности. Для профиля ошибок нужны сохранение тождества сигналов и критичных литералов, расширение анализа и экспертная проверка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Koziolek H., Gruener S., Ashiwal V. ChatGPT for PLC/DCS Control Logic Generation. *2023 IEEE 28th International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA).* 2023:1–8. DOI: 10.1109/ETFA54631.2023.10275411.
2. Fakih M., Dharmaji R., Moghaddas Y., Quiros Araya G., Ogundare O., Al Faruque M. A. LLM4PLC: Harnessing Large Language Models for Verifiable Programming of PLCs in Industrial

Control Systems. *Proceedings of the 46th International Conference on Software Engineering: Software Engineering in Practice*. 2024:192–203. DOI: 10.1145/3639477.3639743.

3. Yefet N., Alon U., Yahav E. Adversarial Examples for Models of Code. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*. 2020;4(OOPSLA):1–30. DOI: 10.1145/3428230.
4. Roy C. K., Cordy J. R., Koschke R. Comparison and Evaluation of Code Clone Detection Techniques and Tools: A Qualitative Approach. *Science of Computer Programming*. 2009;74(7):470–495. DOI: 10.1016/j.scico.2009.02.007.
5. Kamiya T., Kusumoto S., Inoue K. CCFinder: A Multilinguistic Token-Based Code Clone Detection System for Large Scale Source Code. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 2002;28(7):654–670. DOI: 10.1109/TSE.2002.1019480.
6. Luan S., Yang D., Barnaby C., Sen K., Chandra S. Aroma: Code Recommendation via Structural Code Search. *Proceedings of the ACM on Programming Languages*. 2019;3(OOPSLA):1–28. DOI: 10.1145/3360578.
7. Allamanis M., Sutton C. Mining Idioms from Source Code. *Proceedings of the 22nd ACM SIGSOFT International Symposium on Foundations of Software Engineering*. 2014:472–483. DOI: 10.1145/2635868.2635901.
8. Song Y., Lothritz C., Tang D., Bissyandé T., Klein J. Revisiting Code Similarity Evaluation with Abstract Syntax Tree Edit Distance. *Proceedings of the 62nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2024;2:38–46. DOI: 10.18653/v1/2024.acl-short.3.
9. Allamanis M., Barr E. T., Devanbu P., Sutton C. A Survey of Machine Learning for Big Code and Naturalness. *ACM Computing Surveys*. 2018;51(4):81. DOI: 10.1145/3212695.
10. Левенштейн В. И. Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов. *Доклады Академии наук СССР*. 1965;163(4):845–848. Режим доступа: https://www.mathnet.ru/rus/dan31411.
11. Kabir M. H., Islam M. R., Lou H. H. STMutants: A Mutation Testing Dataset for Structured Text Programs in Industrial Automation. 2026. arXiv:2606.05499v1. DOI: 10.48550/arXiv.2606.05499.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ МОЛЕКУЛЫ УГЛЕРОДА В ПЕРВОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

**Ю. Н. Штанов**[1,а], **В. П. Кощеев**[2,б]

[1] *Тюменский индустриальный университет, филиал «Сургутский институт нефти и газа», г. Сургут, Российская Федерация*

[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), филиал «Стрела», г. Жуковский, Московская область, Российская Федерация*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5822-3368,* ✍ *yuran1987@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru*

*Аннотация*: в работе рассматривается задача вычисления полной энергии молекулы углерода с помощью алгоритма искусственного интеллекта. Разработанный алгоритм искусственного интеллекта сравнивается с методом численного интегрирования и известными алгоритмами искусственного интеллекта: нейросеть Колмогорова–Арнольда и случайный лес. Оценка качества разработанных алгоритмов производится с использованием метрик $R^2$, MAE, RMSE. Особое внимание уделяется сравнительному анализу точности, вычислительной эффективности и области применимости каждого подхода.

*Ключевые слова:* теория возмущений, полная энергия, машинное обучение, Python, случайный лес, многослойный перцептрон, искусственный интеллект.

*Для цитирования:* Штанов Ю. Н., Кощеев В. П. Моделирование полной энергии молекулы углерода в первом порядке теории возмущений с помощью алгоритма искусственного интеллекта. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):139–147.

*Поступила в редакцию: 29.06.2026.* *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

# CALCULATION OF THE TOTAL ENERGY OF A CARBON MOLECULE USING FIRST-ORDER PERTURBATION THEORY AND MACHINE LEARNING

**Yu. N. Shtanov**[1,a], **V. P. Koshcheev**[2,b]

[1] *Industrial University of Tyumen, Surgut Branch, Surgut, Russian Federation*

[2] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Strela Branch, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation*

[а] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5822-3368,* ✍ *yuran1987@mail.ru*

[б] *ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0724-9760, koshcheev1@yandex.ru*

*Abstract:* we developed a machine-learning approach for calculating the total energy of a carbon molecule. We compared its performance with numerical integration and two established machine-learning methods: a Kolmogorov–Arnold network and a random forest. We evaluated the accuracy of the methods using the coefficient of determination ($R^2$), mean absolute error (MAE), and root mean square error (RMSE). We compared the methods in terms of accuracy, computational efficiency, and applicability to different calculation tasks.

*Keywords:* perturbation theory, total energy, machine learning, Python, random forest, multilayer perceptron, artificial intelligence.

*Cite this article:* Shtanov Yu. N., Koshcheev V. P. Calculation of the Total Energy of a Carbon Molecule Using First-Order Perturbation Theory and Machine Learning. *Russian Journal of Cybernetics.* 2026;7(3):139–147.

*Original article submitted: 29.06.2026.* *Revision submitted: 20.09.2026.*

## Введение

С помощью компьютерного эксперимента в [1, 2] исследуются новые типы упорядоченных структур, состоящих из атомарного углерода. Потенциальная энергия взаимодействия между атомами вычисляется с помощью уравнения теории функционала плотности, решение которого для основного состояния совпадает с решением уравнения Хартри–Фока [3]. С другой стороны, достоверность вычисления с помощью многочисленных версий теории функционала плотности

достигается тогда, когда результаты совпадают между собой [4]. В работе [5] показано, что полная энергия трехатомной молекулы может быть вычислена как сумма полных энергий двухатомных молекул с помощью метода компьютерного моделирования в первом порядке теории возмущений.

Аппроксимация многомерных функций является весьма актуальной задачей машинного обучения [6, 7]. В настоящей работе предлагается алгоритм аппроксимации сложной многомерной функции с использованием глубокого многослойного перцептрона [8] с предварительной активацией слоя, адаптивным интервальным разбиением области определения для локализации сложности функции. Алгоритмы реализованы на языке Python с использованием фреймворка PyTorch и scikit-learn [9]. Полученный алгоритм сравнивается с алгоритмом машинного обучения случайный лес (Random Forest) [9] и нейросетью Колмогорова–Арнольда (Kolmogorov–Arnold Networks, KAN) [10]. Оценка качества разработанных алгоритмов производится с использованием метрик MAE, RMSE и $R^2$.

**Полная энергия системы**

Трехатомную молекулу будем описывать с помощью стационарного уравнения Шредингера:

$$H\psi = E\psi. \tag{1}$$

Гамильтониан уравнения (1) представим в виде:

$$H = H^0 + U. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} U = {} & \tfrac{Z_1 Z_2 e^2}{|r_1 - r_2|} + \sum_{j_1=1}^{Z_1} \sum_{j_2=1}^{Z_2} \tfrac{e^2}{|r_1 + r_{1j_1} - r_2 - r_{2j_2}|} - \sum_{j_1=1}^{Z_1} \tfrac{Z_2 e^2}{|r_1 + r_{1j_1} - r_2|} - \sum_{j_2=1}^{Z_2} \tfrac{Z_1 e^2}{|r_1 - r_2 - r_{2j_2}|} + \\ & + \tfrac{Z_1 Z_3 e^2}{|r_1 - r_3|} + \sum_{j_1=1}^{Z_1} \sum_{j_3=1}^{Z_3} \tfrac{e^2}{|r_1 + r_{1j_1} - r_3 - r_{3j_3}|} - \sum_{j_1=1}^{Z_1} \tfrac{Z_3 e^2}{|r_1 + r_{1j_1} - r_3|} - \sum_{j_3=1}^{Z_3} \tfrac{Z_1 e^2}{|r_1 - r_3 - r_{3j_3}|} + \\ & + \tfrac{Z_3 Z_2 e^2}{|r_3 - r_2|} + \sum_{j_3=1}^{Z_3} \sum_{j_2=1}^{Z_2} \tfrac{e^2}{|r_3 + r_{3j_3} - r_2 - r_{2j_2}|} - \sum_{j_3=1}^{Z_3} \tfrac{Z_2 e^2}{|r_3 + r_{3j_3} - r_2|} - \sum_{j_2=1}^{Z_2} \tfrac{Z_3 e^2}{|r_3 - r_2 - r_{2j_2}|}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$— потенциальная энергия взаимодействия трех атомов; $r_1$, $r_2$и $r_3$ — координаты первого, второго и третьего атомного ядра; $r_1 + r_{1j_1}$, $r_2 + r_{2j_2}$ и $r_3 + r_{3j_3}$ — координаты $j_1$-го, $j_2$-го и $j_3$-го электронов первого, второго и третьего атома соответственно; $r_1 - r_2 = r_{12} + \delta r_{12}$, $r_1 - r_3 = r_{13} + \delta r_{13}$, $r_3 - r_2 = r_{32} + \delta r_{32}$; коллективные колебания атомных электронов и ядер описываются вектором $\delta r_{mn} = \delta r_{mn}^{\text{nucl}} + \delta r_{mn}^{\text{el}}$; $r_{mn} = |r_{mn}|$ — расстояние между $n$-ым и $m$-ым атомами в кластере.

Решение уравнения (1) с гамильтонианом (2) будем искать с помощью теории возмущений $\psi = \psi^0 + \psi^1 + \ldots$ и $E = E^0 + E^1 + \ldots$. Потенциальную энергию (электронные термы) трехатомного кластера будем искать в первом порядке теории возмущений:

$$E^1 = \left\langle \psi^0 \right| U \left| \psi^0 \right\rangle, \tag{4}$$

где угловые скобки $\langle \ldots \rangle$ были введены Дираком [11].

Гамильтониан $H^0$ представим в виде $H^0 = H_1^0 + H_2^0 + H_3^0$, где $H_i^0$ — гамильтониан $i$-го атома; $i$=1,2,3.

Решение уравнения Шредингера $H^0\psi^0 = E^0\psi^0$ будем искать в виде $\psi^0 = \psi_1^0\psi_2^0\psi_3^0$ и $E^0 = E_1^0 + E_2^0 + E_3^0$, где уравнение Шредингера для $i$-го изолированного атома имеет вид:

$$H_i^0\psi_i^0 = E_i^0\psi_i^0, \tag{5}$$

где $\psi_i^0 = \psi_i^0\,(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{iZ_i})$.

Усреднение по квантовым флуктуациям местоположения атомных электронов будем осуществлять с помощью метода [12], который Бете использовал для вычисления атомного формфактора, а усреднение по коллективным колебаниям атомных электронов и ядер выполним по квадрату модуля волновой функции гармонического осциллятора в основном состоянии. Средние величины будем обозначать $\left\langle \psi_1^0 \right| U \left| \psi_1^0 \right\rangle = \langle \ldots \rangle_{e1}$, $\left\langle \psi_2^0 \right| U \left| \psi_2^0 \right\rangle = \langle \ldots \rangle_{e2}$, $\left\langle \psi_3^0 \right| U \left| \psi_3^0 \right\rangle = \langle \ldots \rangle_{e3}$ и $\left\langle \psi^0 \right| U \left| \psi^0 \right\rangle_{\text{pl}} = \langle \ldots \rangle_{\text{pl}}$.

Разложим потенциальную энергию взаимодействия (3) в интеграл Фурье:

$$U = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e^2}{k^2} \left[ Z_1 Z_2 + \frac{1}{2} \sum_{m \neq n=1}^{3} V_{mn}(k) \exp\left(ik\delta r_{mn}\right) \right] \exp\left(ikr_{mn}\right), \tag{6}$$

где $V_{12}(k) = \sum_{j_1=1}^{Z_1} \sum_{j_2=1}^{Z_2} \exp\left(ik\left(r_{1j_1} - r_{2j_2}\right)\right) - Z_2 \sum_{j_1=1}^{Z_1} \exp\left(ikr_{1j_1}\right) - Z_1 \sum_{j_2=1}^{Z_2} \exp\left(ikr_{2j_2}\right)$.

Усредним потенциальную энергию взаимодействия трех атомов (6):

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m \neq n=1}^{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e^2}{k^2} \left[ Z_m - F_m(k) \right] \left[ Z_n - F_n(k) \right] \exp\left[ ikr_{mn} - k^2 \Delta_{mn} \right], \tag{7}$$

где $\left\langle \sum_{j_m=1}^{Z_m} \exp\left(ikr_{mj_m}\right) \right\rangle_{em} = F_m(k)$; $F_m(0) = Z_m$ — атомные форм-факторы первого, второго и третьего атомов; $\left\langle \exp\left( ik \sum_{m \neq n=1}^{3} \delta r_{mn} \right) \right\rangle_{\text{pl}} = \exp\left[ -k^2 \sum_{m \neq n=1}^{3} \Delta_{mn} \right]$;$\Delta_{mn} = \Delta_{nm}$; $2\Delta_{mn} = \sigma_{\text{nucl}}^2 + \sigma_{\text{el}}^2$ — сумма средних квадратов амплитуды коллективных атомных ядерных $\sigma_{\text{nucl}}^2 = \frac{\hbar}{2\omega_{\text{nucl}}\mu_{\text{nucl}}}$ и электронных $\sigma_{\text{el}}^2 = \frac{\hbar}{2\omega_{\text{el}}\mu_{\text{el}}}$ колебаний в расчете на одну степень свободы; упругая постоянная $\omega_{\text{el}}^2\mu_{\text{el}} = \omega_{\text{nucl}}^2\mu_{\text{nucl}} = U''_{mn}(r_{mn}^{\min})$ есть значение второй производной в минимуме потенциальной энергии между $n$-ым и $m$-ым атомами в кластере.

Так как $\omega_{\text{el}}^2/\omega_{\text{nucl}}^2 = \mu_{\text{nucl}}/\mu_{\text{el}} \gg 1$, то квант энергии коллективных колебаний электронов (энергия плазмона) равен:

$$\hbar\omega_{\text{el}} \approx 4\Delta_{mn} U''_{mn}\left(r_{mn}^{\min}\right), \tag{8}$$

где $r_{mn}^{\min}$ находим из решения уравнения $\partial U_{mn}\left(r_{mn}^{\min}, \Delta\right)/\partial r = 0$.

В результате поиска максимального значения уравнения (8) получим единственное решение, содержащее непосредственно измеряемые величины $\hbar\omega_{el}$ и $r_{\min}$.

Известно, что волновая функция трехатомного кластера должна быть антисимметричной относительно перестановки координат, определяющих местоположения электронов. Если волновая функция трехатомного кластера выбрана в виде произведения волновых функций изолированных атомов $\psi^0 = \psi_1^0\psi_2^0\psi_3^0$, то обменные силы будут учитываться только для электронов изолированных атомов.

Выражение (7) для потенциальной энергии взаимодействия без учета обменных сил между электронами различных изолированных атомов запишем в виде:

$$\begin{gathered} \langle U \rangle = \tfrac{1}{2} \sum_{m \neq n=1}^{3} U\left(r_{mn}, \Delta_{mn}\right); \\ U\left(r_{mn}, \Delta_{mn}\right) = Z_m Z_n e^2 \Phi\left(r_{mn}, \Delta_{mn}\right)/r_{mn}, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\Phi\left(r_{mn}, \Delta_{mn}\right)$ — функция экранирования потенциальной энергии двухатомного кластера (молекулы) [5] имеет вид:

$$\Phi\left(r_{mn}, \Delta_{mn}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{F_m(k)}{Z_m} \right] \left[ 1 - \frac{F_n(k)}{Z_n} \right] \sin\left(kr_{mn}\right) \exp\left[ -k^2 \Delta_{mn} \right] dk. \tag{10}$$

Известно [3], что вместо многочастичного уравнения Шредингера (5) строятся одночастичные приближения на основе уравнений Хартри–Фока или формализма теории функционала плотности. Атомный форм-фактор является Фурье-компонентой плотности распределения атомных электронов:

$$F_m(k) = \int n_m(r) \exp\left(-ikr\right) d^3r, \tag{11}$$

где $n_{1,2}(r) = N_1 \left|\psi_{1\text{s}}(r)\right|^2 + N_2 \left|\psi_{2\text{s}}(r)\right|^2 + N_3 \left|\psi_{2\text{p}}(r)\right|^2$ — электронная плотность для атома, $N_1, N_2, N_3$ — количество электронов на оболочках 1s, 2s, 2p.

Волновые функции, которые аппроксимируют решение уравнения Хартри–Фока для изолированных атомов и энергии $E_i^0$, представлены в [13], тогда выражение (11) после вычисления интеграла для $Z = 2 \dots 10$ примет вид

$$F_m(k) = N_1 F_{1s}(k,\alpha) + N_2 F_{2s}(k,\beta) + N_3 F_{2p}(k,\gamma), \tag{12}$$

$$F_{1s}(k,A) = F_{2s}(k,c) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} A_i A_j \times \begin{cases} \frac{8\xi_i^{3/2}\xi_j^{3/2}\xi_{ij}}{\left(\xi_{ij}^2+k^2\right)^2}, & i<2\ 8\ j<2 \\ \frac{8\xi_i^{3/2}\xi_j^{5/2}\left(3\xi_{ij}^2-k^2\right)}{\sqrt{3}\left(\xi_{ij}^2+k^2\right)^3}, & i<2\neq j<2 \\ \frac{32\xi_i^{5/2}\xi_j^{5/2}\xi_{ij}\left(\xi_{ij}^2-k^2\right)}{\left(\xi_{ij}^2+k^2\right)^4}, & i>2,j>2 \end{cases}$$

$$F_{2p}(k,\gamma) = 32\sum_{i=7}^{10}\sum_{j=7}^{10}\gamma_{i-6}\gamma_{j-6}(\xi_i\xi_j)^{5/2}\frac{\xi_{ij}\left(\xi_{ij}^2-5k^2\right)}{\left(k^2+\xi_{ij}^2\right)^4},$$

где $\xi_{ij} = \xi_i + \xi_j$, $\alpha,\beta,\gamma,\xi$ — константы приближения из работы [13].

Выражение (11) для $Z = 11 \dots 12$ запишется в виде:

$$F_m(k) = N_1 F_{1s}(k,\alpha) + N_2 F_{2s}(k,\beta) + N_3 F_{3s}(k,\gamma) + N_4 F_{2p}(k,\eta), \tag{13}$$

где $F_{1s}(k,c) = F_{2s}(k,c) = F_{3s}(k,c) = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_i c_j \times I_{ij}(k)$, $F_{2p}(k,c) = \sum_{i=9}^{13}\sum_{j=9}^{13} c_{i-8}c_{j-8}Q_{ij}(k)$,

$$I_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{16\xi_1^4}{\left[4\xi_1^2+k^2\right]^2}, & i=j=1 \\ \frac{32\sqrt{10}}{5}\xi_i^{3/2}\xi_j^{7/2}\frac{\xi_{ij}(\xi_{ij}^2-k^2)}{\left[\xi_{ij}^2+k^2\right]^4}, & i=1,j\geq 2 \text{ или } i\geq 2,j=1 \\ \frac{128}{3}(\xi_i\xi_j)^{7/2}\frac{\xi_{ij}(3\xi_{ij}^4-10\xi_{ij}^2k^2+3k^4)}{\left[\xi_{1j}^2+k^2\right]^6}, & i,j>2 \end{cases}$$

$$Q_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{64\xi_9^6(4\xi_9^2-5k^2)}{\left[4\xi_9^2+k^2\right]^4}, & i=j=9 \\ \frac{192}{\sqrt{105}}\xi_9^{5/2}\xi_j^{9/2}\frac{\xi_{ij}\left(21k^4-54k^2\xi_{ij}^2+5\xi_{ij}^4\right)}{\left(k^2+\xi_{ij}^2\right)^6}, & \text{иначе} \\ \frac{512}{7}(\xi_i\xi_j)^{9/2}\frac{\xi_{ij}(7\xi_{ij}^6-133\xi_{ij}^4k^2+169\xi_{ij}^2k^4-27k^6)}{\left[\xi_{1j}^2+k^2\right]^8}, & i,j>9. \end{cases}$$

Выражение (11) для $Z = 13 \dots 18$ запишется в виде:

$$F_m(k) = N_1 F_{1s}(k,\alpha) + N_2 F_{2s}(k,\beta) + N_3 F_{3s}(k,\gamma) + N_4 F_{2p}(k,\eta) + N_5 F_{3p}(k,\zeta), \tag{14}$$

где $F_{1s}(k,c) = F_{2s}(k,c) = F_{3s}(k,c) = 16\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8} c_i c_j I_{ij}(k)$, $\xi_{ij8} = \xi_{i+8} + \xi_{j+8}$

$$I_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{\xi_1^4}{(4\xi_1^2+k^2)^2}, & i=j=1 \\ \frac{6\sqrt{10}}{15}\xi_{\min(i,j)}^{3/2}\xi_{\max(i,j)}^{7/2}\cdot\frac{\xi_{ij}[\xi_{ij}^2-k^2]}{[\xi_{ij}^2+k^2]^4}, & \min(i,j)=1, \max(i,j)\neq 1 \\ \frac{8}{3}\xi_i^{7/2}\xi_j^{7/2}\cdot\frac{\xi_{ij}[3\xi_{ij}^4-10\xi_{ij}^2k^2+3k^4]}{[\xi_{ij}^2+k^2]^6}, & i>1,j>1 \end{cases}$$

$$F_{2p}(k,c) = F_{3p}(k,c) = \frac{64c_1^2\xi_9^6\left(4\xi_9^2-5k^2\right)}{\left(k^2+4\xi_9^2\right)^4} + \\ + \frac{384c_1\xi_9^{5/2}}{\sqrt{105}}\sum_{j=2}^{8}\frac{c_j\xi_{j+8}^{9/2}(\xi_9+\xi_{j+8})\left[21k^4-54k^2(\xi_9+\xi_{j+8})^2+5(\xi_9+\xi_{j+8})^4\right]}{(k^2+(\xi_9+\xi_{j+8})^2)^6} - \\ - \frac{512}{7}\sum_{i=2}^{8}\sum_{j=2}^{8}\frac{c_ic_j\xi_{i+8}^{9/2}\xi_{j+8}^{9/2}[27k^6\xi_{ij8}-169k^4\xi_{ij8}^3+133k^2\xi_{ij8}^5-7\xi_{ij8}^7]}{\left[\xi_{ij8}^2+k^2\right]^8}.$$

**Программная реализация**

Для решения задачи компьютерного моделирования полной энергии взаимодействия двух атомов была разработана программа TotalEnergy [14, 15]. Программа написана на языке программирования C++, а графический интерфейс строится с использованием библиотеки Qt 6 [16]. Для вычисления выражения (9) используется численное интегрирование с применением библиотеки GNU Scientific Library (GSL) [17].

Аппроксимация функции экранирования $\Phi(r,\Delta)$ представляет собой довольно сложную задачу, так как при малых значениях $\Delta$ возникают быстрые осцилляции, и функция смещается в область малых $r/a_0$, а при больших значениях $\Delta$ функция становится гладкой и смещается в область больших $r/a_0$. При решении задачи аппроксимации $\Phi(r,\Delta)$ было выявлено, что классические подходы имеют ограничения:

1. Кубическая сплайн-аппроксимация требует правильного выбора сетки и не масштабируется на случай функций многих переменных.

2. Обученные на всем интервале алгоритмы машинного обучения не позволяют получить гладкую функцию, нейросетевые алгоритмы плохо обучаются из-за осцилляций функции.

Поэтому предлагается подход, сочетающий в себе преимущества сплайнов и нейросетей. Интервальное разбиение области по $r/a_0$ с перекрытием выполнено с помощью метода $k$-средних [9, 18]. В качестве признаков, характеризующих функцию на каждом интервале, добавлялись базисы B-сплайнов порядка $p=3$ (кубические сплайны) с $G$ внутренними узлами и количеством $M=G+p-1$, вычисленные с помощью формулы Кокса – де Бура [19]:

$$B_{i,p}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+p} - t_i} \cdot B_{i,p-1}(x) + \frac{t_{i+p+1} - x}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,p-1}(x), \tag{15}$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & t_i \le x \le t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

и Фурье-признаки, отвечающие за осцилляции функции [20]:

$$C(x) = [\sin(x \cdot c_1), \cos(x \cdot c_1); \ldots \sin(x \cdot c_m), \cos(x \cdot c_m)], \tag{16}$$

где $m$ — количество признаков, $c_i$ — независимое случайное число, распределенное по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, отвечающей за масштаб частот.

Нейросетевой алгоритм будет строиться на основе многослойного персептрона, каждый слой которого представляет собой Residual блок [21], в котором реализуется принцип «активация на ребрах» [22]. В качестве функции активации была выбрана SiLU [23]. В результате алгоритм построения Residual блока имеет вид:

$$\begin{array}{l} z = LN(x) \\ z = SiLU(z) \\ z = z \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + b_1 \\ z = LN(z) \\ z = SiLU(z) \\ y = z \cdot \mathrm{B}^{\mathrm{T}} + b_2 + s(x) = F(z) + s(x) \end{array}, \tag{17}$$

где A,B,C — матрицы весов, которые подбирают в процессе обучения нейросети; $LN(x_i) = \gamma_i \cdot (x_i - \mu) \Big/ \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon} + \beta_i$ — функция для нормализации слоя [24] для $i$-го нейрона в слое; $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$— математическое ожидание; дисперсия $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$; $\varepsilon > 0$ — малая константа, необходимая для исключения деления на ноль; $\gamma_i$,$\beta_i$ — параметры, настраиваемые вместе с остальными весами нейросети во время обучения, остающиеся фиксированными во время использования; $s(x)$ отвечает за проекционный слой и shortcut-путь:

$$s(x) = \begin{cases} \mathrm{C}^{\mathrm{T}} \cdot x + b_3, & L_{\text{in}} \ne L_{\text{out}} \\ x, & L_{\text{in}} = L_{\text{out}} \end{cases}, \tag{18}$$

где $L_{\text{in}}$,$L_{\text{out}}$ — размерность входного и выходного вектора.

В алгоритме (17) степень смешивания информации никак не регулируется, что приводит к нежелательным эффектам. Для изменения степени нелинейности воспользуемся механизмом Highway Networks [25], тогда получим для $k$-го интервала:

$$\hat{\Phi}_k = \alpha\left(Z_1,Z_2,\Delta\right)\cdot\left[g\left(\Delta\right)\cdot F\left(x\right)+\left(1-g\left(\Delta\right)\right)\cdot s\left(x\right)\right], \tag{19}$$

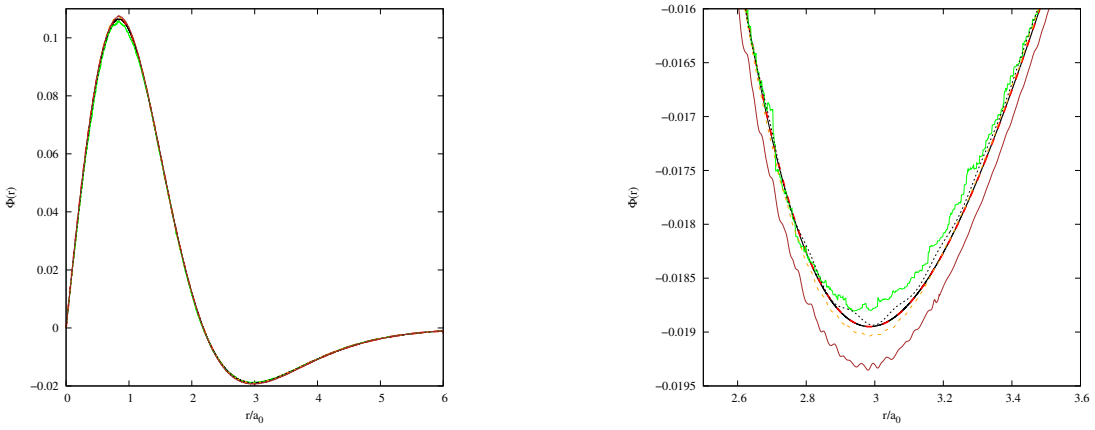
а результирующее предсказание

$$\hat{\Phi}\left(Z_1,Z_2,\Delta,r\right)=\frac{\sum_{k=1}^{K}\omega_k\cdot\hat{\Phi}_k}{\sum_{k=1}^{K}\omega_k}, \tag{20}$$

где $\omega_k=\exp\left(-\varepsilon_k\right)$ – вес при $\varepsilon_k$ ошибке на $k$-м интервале; $g\left(\Delta\right)=MLP_{gate}\left(\Delta\right)$ — трехслойная нейросеть предсказывает значения $g\in[0;1]$, $\alpha(Z_1,Z_2,\,\Delta)=MLP_{amp}(Z_1,Z_2,\Delta)$ — четырехслойная нейросеть предсказывает значения $\alpha\in[0;\infty]$.

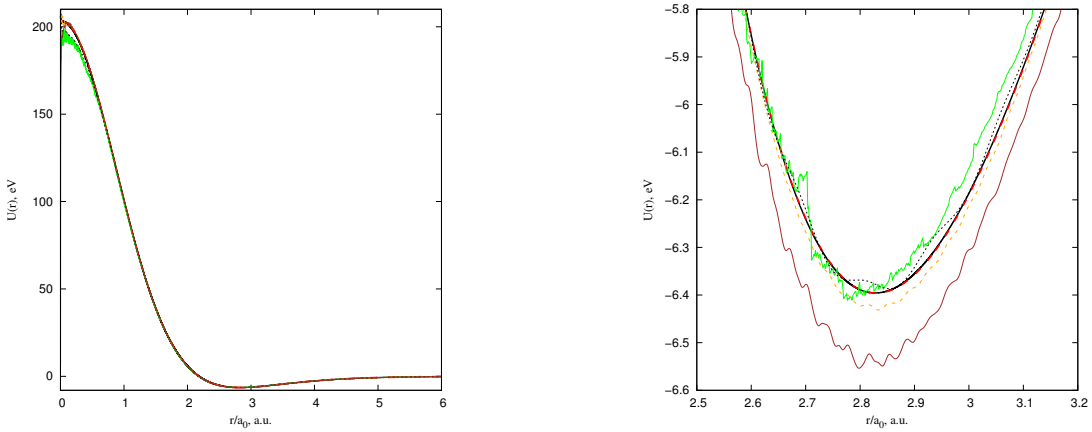
Параметр $g\left(\Delta\right)$ отвечает за степень смешивания и определяет, сколько информации берем от $F\left(x\right)$ и $s\left(x\right)$, а параметр $\alpha(Z_1,Z_2,\,\Delta)$ управляет масштабом. Данный подход можно назвать физически обусловленной вентильной (gate) гиперсвязью, или коротко **Gated Hyper-Connection (GHD)**, он сочетает механизмы Highway Networks, Manifold-Constrained Hyper-Connections (mHC) [26].

С помощью модифицированной программы TotalEnergy был создан датасет для выражения (10) для двухатомных молекул с $Z_1$=2...21, $Z_2$=2...21 и $\Delta/a_0^2\in[0.001;1]$, $r/a_0\in[0;6]$. Таким образом, был сформирован набор данных, содержащий $4\cdot10^6$ образцов, каждый из которых представлен вектором базовых признаков $x=(Z_1,Z_2,\Delta,r)$ и соответствующим значением целевой функции $\Phi(r,\Delta)$. Для обучения и тестирования нейросетей использовался язык программирования Python и библиотеки PyTorch [9], выполнялось разделение выборки на обучающую (65 %), валидационную (15 %) и тестовую (20 %). Количество признаков на каждом интервале обучения было равным 40 сплайн- и 20 Фурье-признакам, которые вместе с базовыми признаками были нормированы с помощью нормализации [9], а целевая функция нормирована с помощью масштабирования в диапазон [-1;1]. Архитектура нейросети состояла из 4 Residual блоков с размерностью слоев [512,512,384,256,128] с учетом механизма (20) при $K=5$. Обучение проводилось в течение 500 эпох с механизмом ранней остановки для предотвращения переобучения. При обучении нейросетей использовалась видеокарта Nvidia RTX 5070 с 12 Гб видеопамяти. На рис. 1 а, б выполнено сравнение результатов расчета функции экранирования $\Phi\left(r,\Delta\right)$, на рис. 2 а, б — потенциальной энергии взаимодействия для молекулы углерода C(3p)+C(3p) при $\Delta/a_0^2\approx0.278$, полученных с помощью нейросетей и численного интегрирования.




*а* *б*

**Рис. 1.** *а — Сравнение результатов расчета функции экранирования* $\Phi\left(r,\Delta\right)$ *для молекулы углерода C(3p)+C(3p) при* $\Delta/a_0^2=0.278$, $r/a_0\in[0;6]$; *б — Сравнение результатов расчета функции экранирования* $\Phi\left(r,\Delta\right)$ *для молекулы углерода C(3p)+C(3p) при* $\Delta/a_0^2=0.278$, $r/a_0\in[2.5;3.6]$




*а* *б*

**Рис. 2.** *а — Сравнение результатов расчета потенциальной энергии* $U\,(r,\Delta)$ *для молекулы углерода C(3p)+C(3p) при* $\Delta/a_0^2 = 0.278$, $r/a_0 \in [0;6]$*; б — Сравнение результатов расчета потенциальной энергии* $U\,(r,\Delta)$ *для молекулы углерода C(3p)+C(3p) при* $\Delta/a_0^2 = 0.278$, $r/a_0 \in [2.5;3.2]$

Кроме нейросети, обученной с учетом механизма (20) при $K = 5$ и $K = 1$, были обучены нейросеть Колмогорова–Арнольда, интервальная модель случайного леса и классический многослойный персептрон (MLP). На рисунках введены следующие обозначения: черная сплошная линия — численное интегрирование; красная пунктирная — нейросеть Колмогорова–Арнольда [10]; зеленая сплошная — алгоритм случайного леса [9]; оранжевая пунктирная — нейросеть с учетом механизма (20) при $K = 5$; черная пунктирная — нейросеть, обученная с учетом механизма (20) при $K = 1$; коричневая сплошная — классический многослойный персептрон. После обучения нейросетей на тестовой выборке было выполнено вычисление метрик MAE, RMSE и $R^2$, которые представлены в таблице.

*Таблица*

*Показатели обученных моделей (Random Forest, KAN, классический MLP) и нейросетей, обученных с учетом механизма* (20) *при K=5, K=1 на тестовой выборке*

| Показатели модели | Random Forest | KAN | Классический MLP | Нейросеть, обученная с учетом механизма (20) при $K = 5$ | Нейросеть, обученная с учетом механизма (20) при $K = 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Время обучения, минут | 3 | 195 | 179 | 276 | 193 |
| $R^2$ | 0.997 | 0.9995 | 0.999469 | 0.9994 | 0.9989 |
| MAE, $10^{-4}$ | 2.54 | 1.44 | 3.39 | 3.16 | 4 |
| RMSE $\cdot 10^{-4}$ | 6.58 | 8.7 | 9.19 | 9.95 | 13.04 |
| MSE $\cdot 10^{-7}$ | 4376 | 7.576 | 8.439 | 9.906 | 16.992 |
| SMAPE, % | 3.1 | 2.87 | 10.8 | 5.7 | 8.44 |

**Вывод**

Видно, что обученная нейросеть Колмогорова–Арнольда (KAN) показывает результаты, сопоставимые с результатами численного интегрирования. Интервальная модель случайного леса, несмотря на высокое значение $R^2$, имеет существенный недостаток: отсутствие гладкости в областях экстремумов функции, поэтому можно сделать вывод о ее непригодности для аппроксимации функций. Разработанная нейросеть с механизмом Gated Hyper-Connection при $K = 5$ показывает результаты, наиболее близкие к KAN, но требует дополнительного исследования для

улучшения модели. Нейросетевой подход, апробированный на двухатомной молекуле, показывает перспективные результаты для многоатомных структур и позволяет использовать обученную нейросетевую модель для решения более сложных задач молекулярной физики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Borsovszky J. et al. Photodissociation of Dicarbon: How Nature Breaks an Unusual Multiple Bond. *PNAS.* 2021;118(52):e2113315118. DOI: 10.1073/pnas.2113315118.
2. Yurchenko S. N., Szabó I., Pyatenko E., Tennyson J. ExoMol Line Lists XXXI: Spectroscopy of Lowest Eights Electronic States of $C_2$. *MNRAS.* 2018;480(3):3397–3411. DOI: 10.1093/mnras/sty2050.
3. Sarry A. M., Sarry M. F. On the Density Functional Theory. *Physics of the Solid State.* 2012;54:1315–1322. DOI: 10.1134/S1063783412060297.
4. Teale A. M. et al. DFT Exchange: Sharing Perspectives on the Workhorse of Quantum Chemistry and Materials Science. *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2022;24(47):28700-28781. DOI: 10.1039/D2CP02827A.
5. Koshcheev V. P., Shtanov Y. N. Simulation of the Total Energy of a Triatomic Silicon Cluster in the First Order of Perturbation Theory. 2025. arXiv:2507.00053. DOI: 10.48550/arXiv.2507.00053.
6. Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями. *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022;38(1):54–73. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73.
7. Галабурдин А. В. Аппроксимация функций нейронными сетями. *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2026;10(1):50–57. DOI: 10.23947/2587-8999-2026-10-1-50-57.
8. Rumelhart D. E., McClelland J. L. Learning Internal Representations by Error Propagation. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition: Foundations.* MIT Press. 1987:318–362.
9. Рашка С. *Машинное обучение с PyTorch и Scikit-Learn.* Астана: Фолиант; 2024. 688 с.
10. Liu Z., Wang Y., Vaidya S. et al. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks. 2024. arXiv:2404.19756. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.
11. Дирак П. А. М. *Принципы квантовой механики.* М.: Наука; 1979. 479 с.
12. Бете Г. *Квантовая механика.* М.: Мир; 1965. 333 с.
13. Clementi E., Roetti C. Roothaan-Hartree-Fock Atomic Wavefunctions: Basis Functions and Their Coefficients for Ground and Certain Excited States of Neutral and Ionized Atoms, $Z \leq 54$. *Atomic Data and Nuclear Data Tables.* 1974;14(3):177–478. DOI: 10.1016/S0092-640X(74)80016-1.
14. Штанов Ю. Н., Кощеев В. П. Программа моделирования полной энергии взаимодействия двух атомов в первом порядке теории возмущений (Моделирование полной энергии взаимодействия атомов в первом порядке теории возмущений). Свидетельство о государственной регистрации компьютерных программ № 2024660504. М.: Роспатент; 2024.
15. Штанов Ю. Н., Кощеев В. П., Моргун Д. А. *Библиотека программ «JINRLIB».* Режим доступа: http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/tropics/index.html.
16. Прохоренок Н. А. *Qt 6. Разработка оконных приложений на C++.* СПб.: БХВ-Петербург; 2022. 512 с.
17. GNU Project. *GNU Scientific Library.* Режим доступа: https://www.gnu.org/software/gsl/.
18. Arthur D., Vassilvitskii S. k-Means++: The Advantages of Careful Seeding. *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms.* 2007;8:1027–1035.
19. De Boor C. Subroutine Package for Calculating with B-splines. *Techn. Rep.* 1971:109–121.
20. Tancik M., Srinivasan P. P., Mildenhall B. et al. Fourier Features Let Networks Learn High Frequency Functions in Low Dimensional Domains. 2020. arXiv:2006.10739. DOI: 10.48550/arXiv.2006.10739.
21. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep Residual Learning for Image Recognition. 2015. arXiv:1512.03385. DOI: 10.48550/arXiv.1512.03385.
22. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Identity Mappings in Deep Residual Networks. *Computer Vision – ECCV 2016. Lecture Notes in Computer Science.* Eds: Leibe B., Matas J., Sebe N., Welling M. 2016;9908. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-46493-0_38.

23. Elfwing S., Uchibe E., Doya K. Sigmoid-Weighted Linear Units for Neural Network Function Approximation in Reinforcement Learning. 2017. arXiv:1702.03118. DOI: 10.48550/arXiv.1702.03118.
24. Ba J. L., Kiros J. R., Hinton G. E. Layer Normalization. 2016. arXiv:1607.06450. DOI: 10.48550/arXiv.1607.06450.
25. Srivastava R. K., Greff K., Schmidhuber J. Highway Networks. 2015. arXiv:1505.00387. DOI: 10.48550/arXiv.1505.00387.
26. Xie Z., Liang W. et al. mHC: Manifold-Constrained Hyper-Connections. 2025. arXiv:2512.24880. DOI: 10.48550/arXiv.2512.24880.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПНЕВМОГИДРАВЛИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ СИСТЕМ ПОДРЕССОРИВАНИЯ НА ОСНОВЕ СОПРЯЖЕННОЙ ГИДРОДИНАМИКО-ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

**А. В. Титова**[а], **А. И. Карпов**[б]

*Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, г. Ижевск, Российская Федерация*

[а] *ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7836-729X,* ✍ *titovaspace@ya.ru*

[б] *ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8380-1599, karpov@udman.ru*

*Аннотация*: представлены математическая модель и результаты численного исследования переходных процессов в пневмогидравлических устройствах систем подрессоривания транспортных машин. Модель основана на сопряжении нульмерной термодинамической модели газовой полости и уравнения динамики поршня с осесимметричными нестационарными уравнениями Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей рабочие полости устройства. Уравнения гидродинамики решаются методом конечных объемов по неявной схеме; согласование полей давления и скорости выполняется процедурой неявного расщепления по операторам. Достоверность модели подтверждена сравнением с экспериментальными данными и с результатами расчетов по нульмерной схеме. Выполнено параметрическое исследование влияния радиуса дроссельного отверстия, начального объема газовой полости, а также вязкости и температуры рабочей жидкости на характер переходного процесса при ступенчатом нагружении. Показано, что радиус дросселя является определяющим параметром демпфирования: при малых сечениях процесс становится апериодическим и сопровождается кратковременным пиком давления, аналогичным локальному гидравлическому удару, а при больших сечениях возникают слабозатухающие колебания. Установлено, что начальный объем газа регулирует эквивалентную жесткость газовой пружины и конечный ход поршня, а изменение температуры жидкости в диапазоне условий эксплуатации смещает упругодемпфирующую характеристику устройства вследствие изменения вязкости на несколько порядков. Сформулированы практические рекомендации по выбору параметров дроссельного узла и рабочей жидкости при проектировании систем подрессоривания.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, сопряженная задача, уравнения Навье–Стокса, метод конечных объемов, пневмогидравлическое устройство, переходный процесс.

*Для цитирования:* Титова А. В., Карпов А. И. Математическое моделирование переходных процессов в пневмогидравлических устройствах систем подрессоривания на основе сопряженной гидродинамико-термодинамической модели. *Успехи кибернетики.* 2026;7(3):148–155.

*Поступила в редакцию: 13.07.2026.* *В окончательном варианте: 20.09.2026.*

# SIMULATION OF TRANSIENT PROCESSES IN PNEUMOHYDRAULIC SUSPENSIONS USING A COUPLED HYDRODYNAMIC AND THERMODYNAMIC MODEL

**A. V. Titova**[a], **A. I. Karpov**[b]

*Udmurt Federal Research Center, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation*

[a] *ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7836-729X,* ✍ *titovaspace@ya.ru*

[b] *ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8380-1599, karpov@udman.ru*

*Abstract:* we developed a simulation model and performed a numerical simulation of transient processes in pneumohydraulic devices used in vehicle suspension systems. The model coupled a zero-dimensional thermodynamic model of the gas chamber and the piston equation of motion with axisymmetric unsteady Navier–Stokes equations for a viscous incompressible fluid filling the working chambers. We solved the hydrodynamic equations using the finite volume method with an implicit time-stepping scheme and treated the pressure–velocity coupling using an implicit operator-splitting procedure. We validated the model against experimental data and the results of a zero-dimensional

model. We then performed a parametric study to assess the effects of the throttle-orifice radius, initial gas-chamber volume, and fluid viscosity and temperature on the transient response to step loading. We found that the throttle-orifice radius is the main damping parameter: small orifices produce an aperiodic response with a short-lived pressure peak similar to a local hydraulic shock, whereas large orifices produce weakly damped oscillations. The initial gas volume determines the effective stiffness of the gas spring and the final piston displacement, while changes in fluid temperature over the operating range alter the device's stiffness–damping characteristics because of changes in fluid viscosity spanning several orders of magnitude. Based on these results, we formulated practical recommendations for selecting throttle-unit parameters and working fluids for suspension-system design.

*Keywords:* mathematical modeling, coupled problem, Navier–Stokes equations, finite volume method, pneumohydraulic device, transient process.

*Cite this article:* Titova A. V., Karpov A. I. Simulation of Transient Processes in Pneumohydraulic Suspensions Using a Coupled Hydrodynamic and Thermodynamic Model. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):148–155.

*Original article submitted: 13.07.2026.* *Revision submitted: 20.09.2026.*

**Введение**

Пневмогидравлические устройства (ПГУ) широко применяются в системах подрессоривания большегрузных колесных, гусеничных и специальных транспортных машин в качестве компактных узлов, объединяющих функции упругого звена и демпфера [1, 2]. Газовая полость обеспечивает нелинейную прогрессивную упругую характеристику, а перетекание рабочей жидкости через дроссельные отверстия – диссипацию энергии колебаний. Работа таких устройств основана на взаимосвязанных гидротермодинамических процессах: дросселировании вязкой жидкости, сжатии газа, движении поршня и теплообмене между фазами.

На ранних стадиях проектирования традиционно используются нульмерные (сосредоточенные) модели, в которых рабочие полости описываются осредненными давлениями, объемами и расходами [3, 4]. Такие модели удобны для расчета статической упругой характеристики и быстрого перебора вариантов конструкции [5]. Однако они не воспроизводят пространственную структуру течения: образование вихрей, отрыв потока на кромках дросселя, инерцию столба жидкости и связанные с ней локальные пики давления. Развитие вычислительной гидродинамики сделало возможным прямое численное моделирование указанных процессов [6–8].

В работах [9–11] предложена и верифицирована методика расчета динамических характеристик ПГУ на основе сопряжения гидродинамической модели жидкой фазы с термодинамической моделью газовой полости и уравнением движения поршня. Настоящая статья развивает данное направление: с использованием сопряженной модели выполнено параметрическое исследование влияния конструкционных (радиус дроссельного отверстия, начальный объем газовой полости) и эксплуатационных (вязкость и температура рабочей жидкости) факторов на переходные процессы в ПГУ, а также сформулированы инженерные рекомендации по применению результатов расчета при проектировании систем подрессоривания.

**Математическая модель и численный метод**

Расчетная область (рис. 1) соответствует пневмогидравлическому амортизатору, включающему гидроцилиндр с подвижным поршнем $P$, дроссельное сечение $S_{12}$ и газовую полость $V_3$, отделенную от жидкости гибкой непроницаемой диафрагмой $D$. При приложении внешней силы $F$ поршень вытесняет рабочую жидкость из полости $V_1$ через дроссель в полость $V_2$; перетекание жидкости изменяет объем газовой полости, а сжатый газ создает восстанавливающее усилие. Задача рассматривается в осесимметричной постановке в координатах $(x, r)$; жидкость считается вязкой и несжимаемой, сжатие газа – адиабатическим.

Течение жидкой фазы описывается нестационарными уравнениями Навье–Стокса (1)–(3), движение поршня – уравнением динамики (4), газовая полость – нульмерной термодинамической моделью адиабатического сжатия (5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right) \quad (1)$$

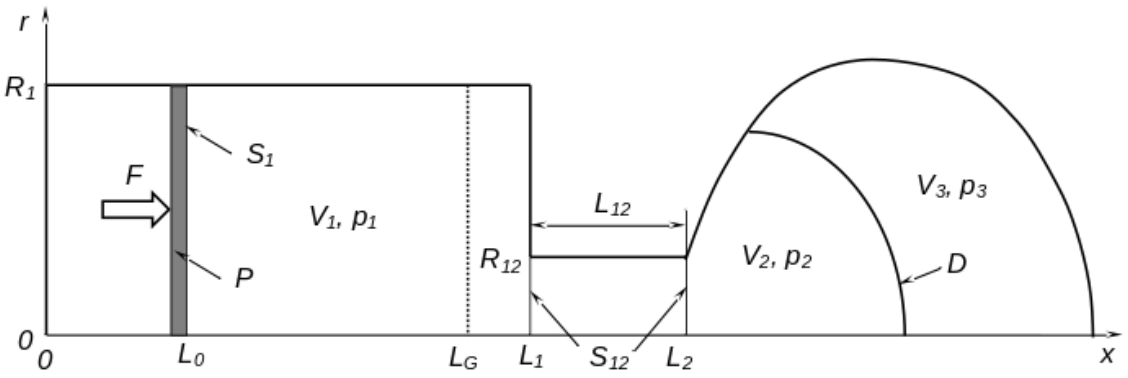



**Рис. 1.** *Геометрия осесимметричной расчетной области: $F$ – внешняя сила; $P$ – поршень; $V_1$, $V_2$ – гидравлические полости; $V_3$ – газовая полость; $S_{12}$ ($R_{12}$) – дроссельное сечение; $D$ – диафрагма*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \tag{3}$$

$$m\frac{d^2 L_0}{dt^2} = F - p_1 S_1 \tag{4}$$

$$p_3 V_3^{\gamma} = \text{const}, \tag{5}$$

где $u$, $v$ – осевая и радиальная компоненты скорости; $\rho$ – плотность; $v$ – кинематическая вязкость жидкости; $m$ – масса поршня; $L_0$ – координата поршня; $S_1$ – площадь поршня; $p_1$ – давление в запоршневой полости; $p_3$, $V_3$ – давление и объем газа; $\gamma$ – показатель адиабаты. Граничные условия: условие симметрии на оси, условие прилипания на неподвижных стенках и на поршне, кинематическое согласование скорости жидкости со скоростью подвижных границ.

Уравнения (1)–(3) дискретизируются методом конечных объемов на неразнесенной сетке с комбинированной аппроксимацией конвективных членов (схема «центральные разности – против потока») и неявной схемой интегрирования по времени; согласование полей давления и скорости выполняется алгоритмом PISO [12, 13]. Движение поршня и изменение объема газовой полости учитываются перестроением расчетной сетки на каждом шаге по времени. Выполняется сгущение сетки в зоне дросселя и в пристеночных областях; проведена проверка сеточной сходимости. Базовые параметры модели, соответствующие натурному амортизатору [5], приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

*Базовые параметры расчетной модели [5]*

| **Параметр** | **Значение** | **Ед. изм.** |
|---|---|---|
| Внешняя нагрузка | 40 | кН |
| Радиус рабочего гидроцилиндра | 0,055 | м |
| Начальный объем газовой полости | 0,00357 | $м^3$ |
| Масса поршня | 10,5 | кг |
| Начальное давление | 3,57 | МПа |
| Плотность жидкости | 850 | $кг/м^3$ |
| Коэффициент расхода | 0,7 | – |

**Проверка достоверности модели**

На рис. 2 сопоставлены зависимости перемещения поршня от времени, рассчитанные по нульмерной и сопряженной моделям при ступенчатом нагружении силой $F = 40$ кН, с экспериментально измеренным конечным статическим положением [5]. Обе модели выходят на одно

и то же равновесное положение, согласующееся с экспериментом, однако сопряженная модель демонстрирует существенно более быстрое затухание колебаний. Различие объясняется тем, что в сопряженной постановке автоматически учитываются дополнительные механизмы диссипации энергии: вязкое трение в пограничных слоях, формирование вихревых структур за дросселем и инерция жидкости в каналах. Нульмерная модель, использующая квазистационарную зависимость расхода от перепада давления, эти эффекты не воспроизводит.

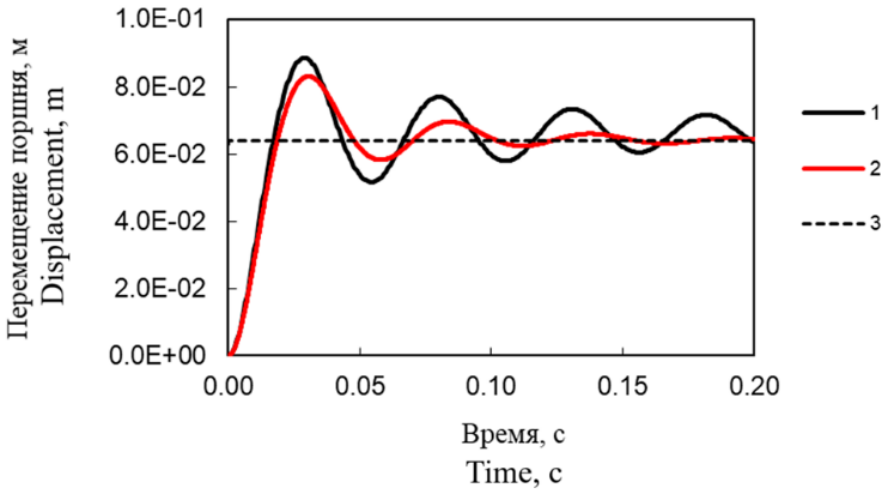



**Рис. 2.** *Динамика перемещения поршня при $F = 40$ кН: 1 – нульмерная модель; 2 – сопряженная модель; 3 – эксперимент (конечное положение) [5]*

**Влияние радиуса дроссельного отверстия**

Радиус дроссельного отверстия является главным конструкционным параметром, определяющим интенсивность демпфирования. На рис. 3 представлены зависимости перемещения поршня от времени для радиусов дросселя от 0,004 до 0,024 м (номер кривой соответствует радиусу отверстия в миллиметрах). Для малых радиусов процесс апериодический: поршень плавно, без перерегулирования выходит на положение равновесия, что свидетельствует о передемпфировании системы. С увеличением радиуса процесс становится колебательным, амплитуда и число колебаний возрастают.

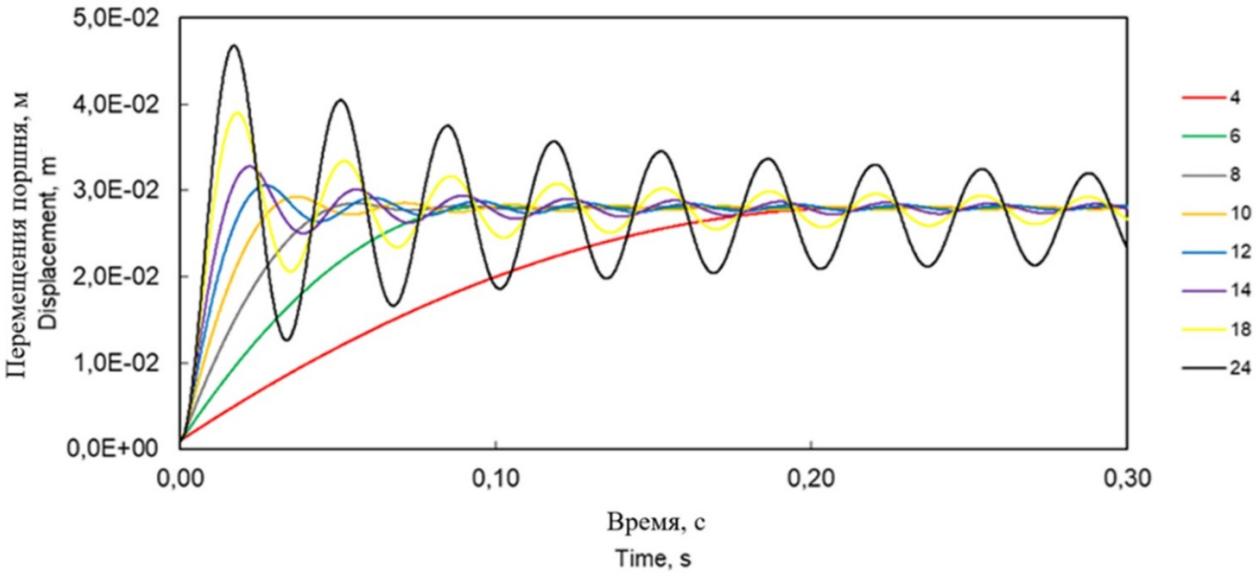



**Рис. 3.** *Влияние радиуса дросселя на перемещение поршня (номер кривой – радиус отверстия в мм)*

Практически важный эффект обнаружен при чрезмерном заужении дросселя. В первые мгновения после приложения нагрузки жидкость, обладающая массой, не может мгновенно разогнаться в узком отверстии; инерция столба жидкости создает кратковременное, но интенсивное сопротивление сжатию, вызывая пик давления в запоршневой полости – эффект, аналогичный локальному гидравлическому удару. Чрезмерное уменьшение сечения дросселя в попытке повысить демпфирование может, таким образом, приводить к опасным пиковым нагрузкам на элементы конструкции. По результатам серии расчетов рациональный диапазон радиусов дросселя для рассматриваемой схемы составляет 0,014–0,018 м: в этом интервале достигается компромисс между быстродействием и отсутствием значительного перерегулирования.

**Влияние начального объема газовой полости**

Начальный объем газовой полости определяет эквивалентную жесткость «газовой пружины». На рис. 4 приведены переходные процессы для значений начального объема от 0,003 до 0,00357 м$^3$. Увеличение объема приводит к большему конечному перемещению поршня при той же нагрузке: для достижения равновесного давления в большем объеме требуется большее относительное сжатие газа. Уменьшение объема, напротив, делает систему жестче и сокращает ход поршня. В инженерной практике данный параметр может рассматриваться как средство регулирования статической жесткости подвески без изменения геометрии дроссельного узла.

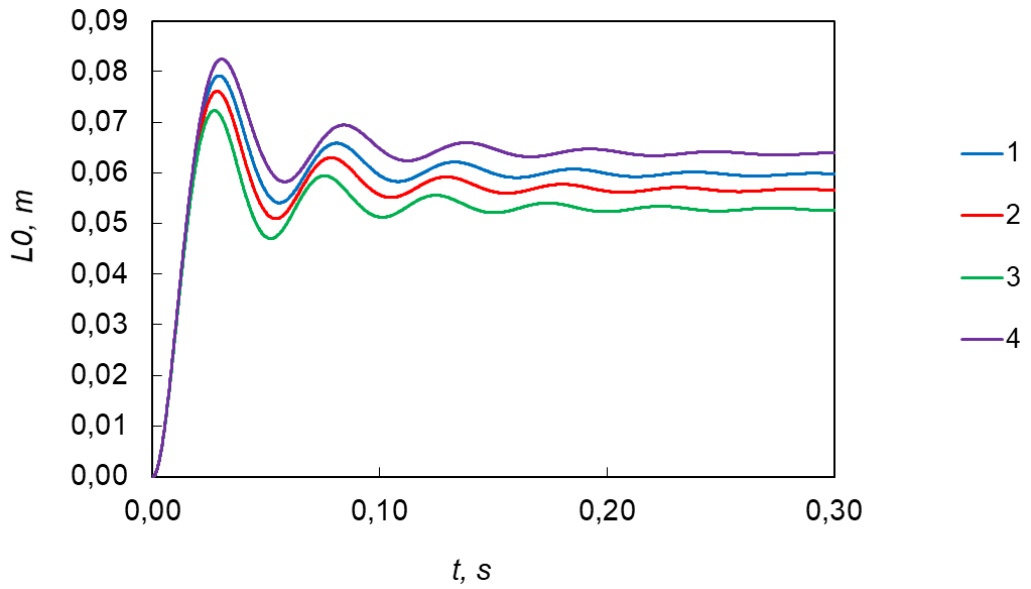



**Рис. 4.** *Влияние начального объема газовой полости на перемещение поршня: 1 – 0,00336 м$^3$; 2 – 0,0032 м$^3$; 3 – 0,003 м$^3$; 4 – 0,00357 м$^3$*

**Влияние вязкости и температуры рабочей жидкости**

Вязкость жидкости определяет величину диссипативных потерь. Расчеты в диапазоне динамической вязкости от 0,01 до 1,0 Па·с (рис. 5) демонстрируют переход от слабодемпфированных колебаний к апериодическому режиму. При низкой вязкости гидравлическое сопротивление мало, и система совершает многочисленные колебания; при высокой вязкости силы трения доминируют, обеспечивая медленный монотонный отклик без перерегулирования.

Вязкость не является постоянной эксплуатационной характеристикой: она резко зависит от температуры. В табл. 1 приведены справочные данные для рабочих жидкостей Т-750 и Dexron III [14], а на рис. 6 – соответствующие температурные зависимости. При охлаждении от плюс 40 до минус 40 °С динамическая вязкость возрастает более чем на два порядка (примерно в 80–150 раз), а во всем диапазоне температур эксплуатации – почти на три порядка.

Расчеты, выполненные с учетом температурного изменения свойств жидкости (рис. 7), показывают значительный дрейф упругодемпфирующей характеристики устройства. При низких

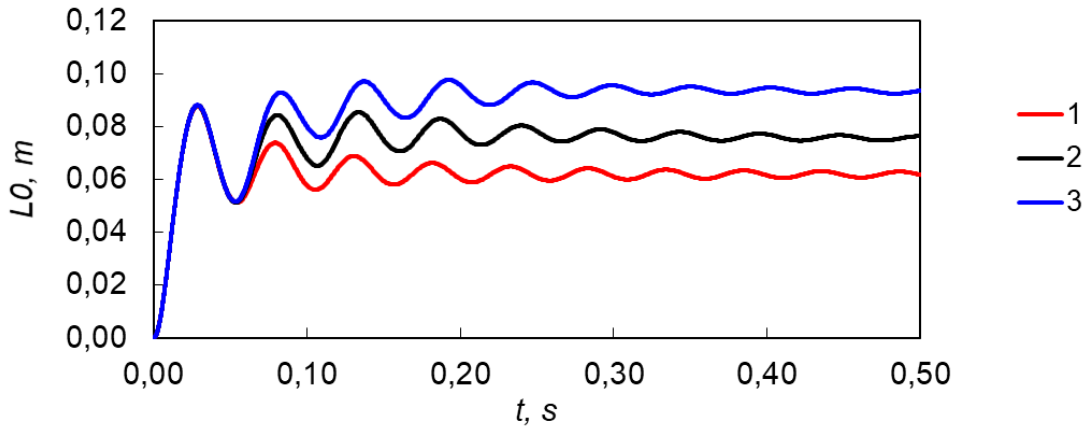



**Рис. 5.** *Влияние динамической вязкости рабочей жидкости на перемещение поршня: 1 – 1,0 Па·с; 2 – 0,1 Па·с; 3 – 0,01 Па·с*

*Таблица 2*

*Справочные значения вязкости и плотности рабочих жидкостей [14]*

| T, °C | $\mu$ (T-750), Па·с | $\rho$ (T-750), кг/м$^3$ | $\mu$ (Dexron III), Па·с | $\rho$ (Dexron III), кг/м$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| −40 | 1,4025 | 935 | 2,355 | 942 |
| −20 | 0,3716 | 929 | 0,7432 | 929 |
| 0 | 0,03915 | 870 | 0,178 | 890 |
| +20 | 0,0174 | 870 | 0,05298 | 883 |
| +40 | 0,00946 | 860 | 0,03045 | 870 |
| +60 | 0,004439 | 807 | 0,01694 | 847 |
| +80 | 0,002639 | 754 | 0,010008 | 834 |
| +100 | 0,001852 | 741 | 0,005865 | 781 |

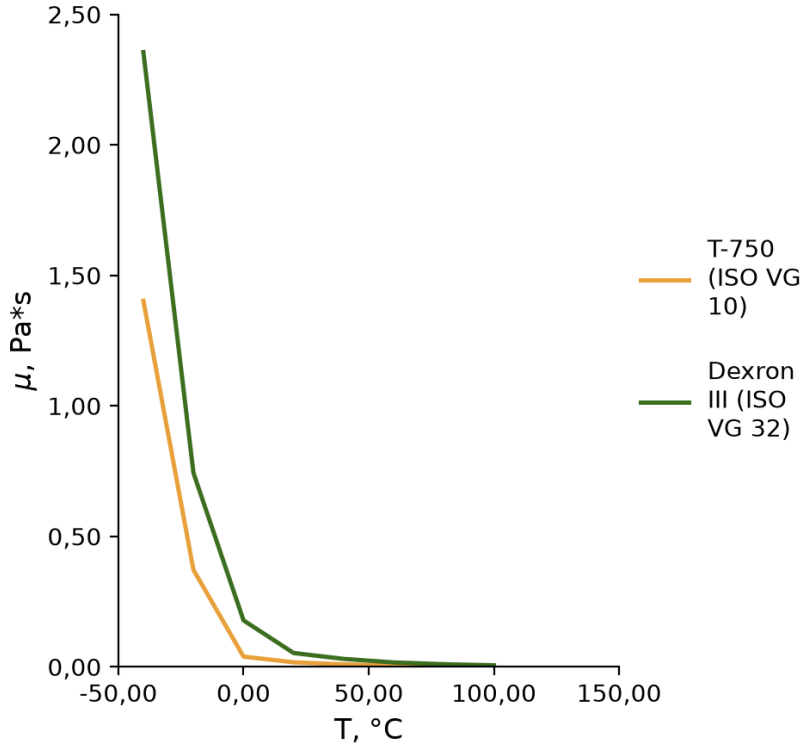



**Рис. 6.** *Зависимость динамической вязкости рабочих жидкостей от температуры*

температурах рост вязкости приводит к чрезмерному демпфированию: подвеска становится жесткой и передает пиковые усилия на корпус машины. При высоких температурах падение вязкости, напротив, способно вызвать потерю демпфирующих свойств и раскачку подрессоренной массы. Один и тот же дроссельный узел, следовательно, может работать в качественно разных режимах в зависимости от температуры эксплуатации.

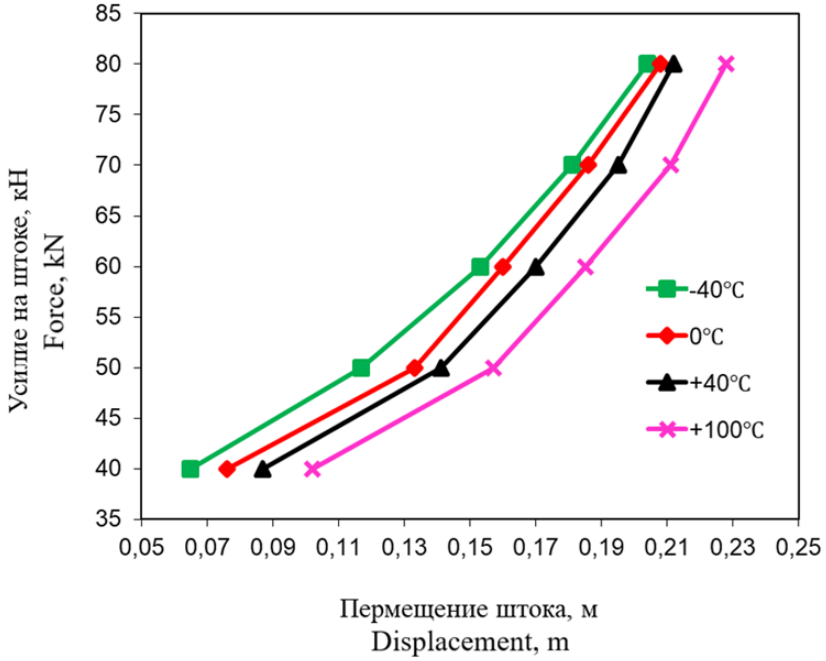



**Рис. 7.** *Влияние температуры на упругую характеристику устройства через изменение свойств рабочей жидкости*

**Обсуждение и практические рекомендации**

Полученные результаты показывают, что конструкционные и эксплуатационные параметры ПГУ нельзя рассматривать изолированно: радиус дросселя задает базовый уровень гидравлического сопротивления, начальный объем газа – статическую жесткость, а вязкость и температура жидкости смещают режим работы демпфера в широких пределах. Главное преимущество сопряженного подхода перед нульмерным расчетом состоит в возможности анализировать физическую структуру переходного процесса: зоны ускорения потока, области рециркуляции и локальные пики давления.

Для инженерной практики целесообразна двухуровневая схема расчета. На первом этапе нульмерная модель применяется для концептуального проектирования: предварительного выбора объема газа, рабочего хода и диапазона дроссельных сечений. На втором этапе отобранные варианты анализируются с помощью сопряженной модели, которая необходима при проектировании дроссельного узла, анализе ударных режимов, оценке риска кавитации и проверке вариантов, близких к предельным по давлению или температуре.

Оптимизацию дросселя следует выполнять как поиск компромисса между временем выхода на равновесие, допустимым перерегулированием и отсутствием кратковременных пиков давления. Следует избегать острых входных кромок и резких геометрических переходов, способствующих отрыву потока и вихреобразованию. При выборе рабочей жидкости необходимо учитывать вязкостно-температурную характеристику в целом, а не только вязкость при стандартной температуре; проверочные расчеты должны выполняться для крайних температур эксплуатации.

Ограничением исследования является то, что расчеты выполнены для конкретной базовой схемы при ступенчатом нагружении. Для окончательного проектирования необходимо учитывать реальный спектр дорожных воздействий, тепловой режим длительной работы, старение жидкости и возможную кавитацию.

**Заключение**

Построена сопряженная гидродинамико-термодинамическая модель переходных процессов в пневмогидравлических устройствах систем подрессоривания, и реализован соответствующий вычислительный алгоритм. Сопоставление с экспериментальными данными и с нульмерной моделью показало, что сопряженная постановка воспроизводит более быстрое и физически обоснованное затухание колебаний за счет учета вязкого трения, вихреобразования и инерции жидкости.

Параметрическое исследование выявило определяющую роль радиуса дроссельного отверстия: его чрезмерное уменьшение вызывает кратковременные пики давления, аналогичные локальному гидравлическому удару, а рациональный диапазон для рассмотренной схемы составляет 0,014–0,018 м. Начальный объем газовой полости регулирует эквивалентную жесткость и конечный ход поршня. Вязкость и температура рабочей жидкости существенно меняют характер переходного процесса, что необходимо учитывать при выборе жидкости и настройке демпфера. Полученные результаты могут использоваться при проектировании систем подрессоривания большегрузных транспортных машин.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Певзнер Я. М., Горелик А. М. *Пневматические и гидропневматические подвески*. М.: Машгиз; 1963. 320 с.
2. Bauer W. *Hydropneumatic Suspension Systems*. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer; 2021. 306 p.
3. Михайлин А. А., Маринкин А. П. Расчет гидропневматической подвески. *Автомобильная промышленность*. 1999;2:17–19.
4. Ципилев А. А. *Методы определения расчетных характеристик и оценки тепловой нагруженности пневмогидравлических устройств систем подрессоривания быстроходных гусеничных машин на этапе проектирования*: дис. ... канд. техн. наук. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана; 2017. 211 с.
5. Сарач Е. Б., Ципилев А. А. Исследование внутренней динамики пневмогидравлических устройств. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2017;2:19–29. DOI: 10.18698/0536-1044-2017-2-19-29.
6. Yang L., Yang F., Xia M. B. Modeling and Dynamic Analysis of a Novel Hydro-Pneumatic Suspension System. *Applied Mechanics and Materials*. 2015;772:188–191. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.772.188.
7. Wu W., Tang H., Zhang S. et al. High-Precision Dynamics Characteristic Modeling Method Research Considering the Influence Factors of Hydropneumatic Suspension. *Shock and Vibration*. 2020;2020(6):1–21.
8. Li R., Yang F., Lin D. Design, Experimental Modeling and Analysis of Compact Double-Gas-Chamber Hydro-Pneumatic Strut. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022;172:109015.
9. Титова А. В., Карпов А. И. Расчет упругой характеристики пневмогидравлического амортизатора гусеничной машины. *Химическая физика и мезоскопия*. 2025;27(3):283–290. DOI: 10.62669/17270227.2025.3.27.
10. Титова А. В., Карпов А. И. Опыт применения программного комплекса FlowVision для расчета характеристик гидропневматических подвесок большегрузных транспортных средств. *Химическая физика и мезоскопия*. 2025;27(1):94–103. DOI: 10.62669/17270227.2025.1.10.
11. Karpov A. I., Titova A. V., Shaklein A. A. CFD Approach to the Prediction of the Hydropneumatic Suspension Dynamical Behavior. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* (в печати).
12. Patankar S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington: Hemisphere; 1980. 197 p.
13. Issa R. I. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986;62(1):40–65. DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9.
14. ISO 3448:1992. *Industrial Liquid Lubricants – ISO Viscosity Classification*. Geneva: International Organization for Standardization; 1992. Режим доступа: https://www.iso.org/standard/8774.html.

# ОБЗОР МЕТОДОВ УЛУЧШЕНИЯ ТОЧНОСТИ НЕЙРОННЫХ СХЕМ ЗА СЧЕТ УСРЕДНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТА

**Т. С. Акобян**
*Сургутский государственный университет, г. Сургут, Российская Федерация*
✍ *ackobyan.tigran2018@yandex.ru*

*Аннотация*: в работе представлено экспериментальное исследование применения метода экстраполяции Ричардсона для повышения точности вычислений в нейронных схемах. Основное содержание работы включает разбор математического аппарата метода Ричардсона, включая вывод формул, анализ асимптотического разложения погрешности, рекурсивную схему и оценку сходимости; разработку математической модели нейронной схемы, формализацию различных источников погрешностей и механизма их компенсации с помощью экстраполяции; постановку и результаты серии вычислительных экспериментов на тестовых задачах (аппроксимация, интегрирование, классификация с шумом); демонстрацию того, что метод Ричардсона позволяет повысить точность вычислений в 3.5 раза по сравнению с традиционными подходами при тех же затратах, а также повышает порядок сходимости; сопоставление метода Ричардсона с альтернативными подходами к повышению точности, которое показало, что метод обеспечивает лучшее соотношение точности и вычислительных затрат.

*Ключевые слова:* метод Ричардсона, экстраполяция, нейронные схемы, точность вычислений, усреднение результатов, дискретизация, численные методы, нейроморфные системы.

*Для цитирования:* Акобян Т. С. Обзор методов улучшения точности нейронных схем за счет усреднения результата. *Успехи кибернетики*. 2026;7(3):156–159.

*Поступила в редакцию: 25.05.2026.* *В окончательном варианте: 25.09.2026.*

# A REVIEW OF NEURAL NETWORK ACCURACY IMPROVEMENT USING AVERAGED OUTPUTS

**T. S. Akobyan**
*Surgut State University, Surgut, Russian Federation*
✍ *ackobyan.tigran2018@yandex.ru*

*Abstract:* we studied the application of Richardson extrapolation to improving the accuracy of neural network computations. We analyzed the mathematical framework of the Richardson method, including the derivation of the relevant formulas, asymptotic error expansion, recursive extrapolation scheme, and convergence estimates. We developed a mathematical model of a neural network, formalized the main sources of computational error, and implemented an extrapolation-based procedure for reducing these errors. We then conducted a series of computational experiments on test problems involving approximation, numerical integration, and classification in the presence of noise. The results showed that Richardson extrapolation improved computational accuracy by a factor of 3.5 compared with conventional approaches at the same computational cost and increased the convergence order. We also compared Richardson extrapolation with alternative accuracy-enhancement methods. The comparison showed that Richardson extrapolation provided a more favorable trade-off between accuracy and computational cost.

*Keywords:* Richardson method, extrapolation, neural networks, computational accuracy, averaged outputs, discretization, numerical methods, neuromorphic systems.

*Cite this article:* Akobyan T. S. A Review of Neural Network Accuracy Improvement Using Averaged Outputs. *Russian Journal of Cybernetics*. 2026;7(3):156–159.

*Original article submitted: 25.05.2026.* *Revision submitted: 25.09.2026.*

Современные нейронные сети и нейроморфные вычислительные системы предъявляют высокие требования к точности вычислений [1]. Ошибки дискретизации, шумы и ограниченная разрядность вычислений способны существенно ухудшить качество работы интеллектуальных систем.

Наиболее критичны вопросы точности в задачах автономного управления, медицинской диагностики и анализа больших данных. Накопление погрешности и снижение качества итоговых результатов зависит в том числе от незначительных вычислительных ошибок.

Для достижения более высокой точности традиционно применяются такие методы, как масштабирование нейронной сети, более мелкий шаг интегрирования и использование арифметики высокой точности [2]. Однако платой за это становится рост ресурсоемкости вычислений и замедление работы алгоритмов.

Среди результативных способов решения данной задачи выделяется метод экстраполяции Ричардсона [3]. Его суть заключается в совместном использовании результатов расчетов, полученных на сетках с разным шагом дискретизации. Это дает возможность устранить главные компоненты погрешности и увеличить порядок точности вычислений.

**Метод Ричардсона**

Пусть результат численного метода есть функция шага дискретизации $h$, представимая асимптотическим разложением [3]:

$$R(h) = R + c_1 h^p + c_2 h^{p+1} + O(h^{p+2}),$$

где $R$ — точное решение, $p$ — порядок точности метода, а $c_1$ и $c_2$ — константы.

Если вычислить решение на двух сетках с шагами $h$ и $\frac{h}{2}$, получим:

$$R(h) = R + c_1 h^p + O(h^{p+1}),$$

$$R(\frac{h}{2}) = R + c_1 (\frac{h}{2})^p + O(h^{p+1}).$$

Исключая основной член погрешности, получаем формулу экстраполяции Ричардсона [4]:

$$R \approx \frac{2^p R\left(\frac{h}{2}\right) - R\left(h\right)}{2^p - 1}.$$

После применения экстраполяции порядок точности увеличивается. Например, метод первого порядка $O(h)$ преобразуется в метод второго порядка $O(h^2)$ [5]. При многократном применении процедуры возможно достижение порядка $O(h^4)$ и выше.

На рисунке 1 представлена зависимость ошибки вычислений от шага дискретизации. Видно, что после применения экстраполяции Ричардсона ошибка уменьшается значительно быстрее.

**Применение метода в нейронных схемах**

В нейронных схемах источниками ошибок являются временная и пространственная дискретизация, ошибки округления и стохастический шум [6].

Для рекуррентных нейронных сетей динамика нейрона описывается дифференциальным уравнением:

$$\tau(\frac{dy}{dt}) = -y + \phi(Wx + b),$$

где $\tau$ — постоянная времени, $\varphi$ — функция активации, $W$ — матрица весов.

При использовании явной схемы Эйлера вычисление выполняется по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_n, t_n).$$

Погрешность схемы имеет порядок $O(\Delta t)$ [5]. Метод Ричардсона позволяет уменьшить эту ошибку за счет вычислений при нескольких шагах интегрирования.

Для нейронных схем особенно важно учитывать влияние шума. Допустим, что $\eta$ является случайной ошибкой вычислений, в таком случае итоговый результат можно записать как $\hat{y} = y + \eta$.

После усреднения по $M$ независимым запускам дисперсия уменьшается:

$$\sigma^2_{avg} = \frac{\sigma^2}{M}.$$

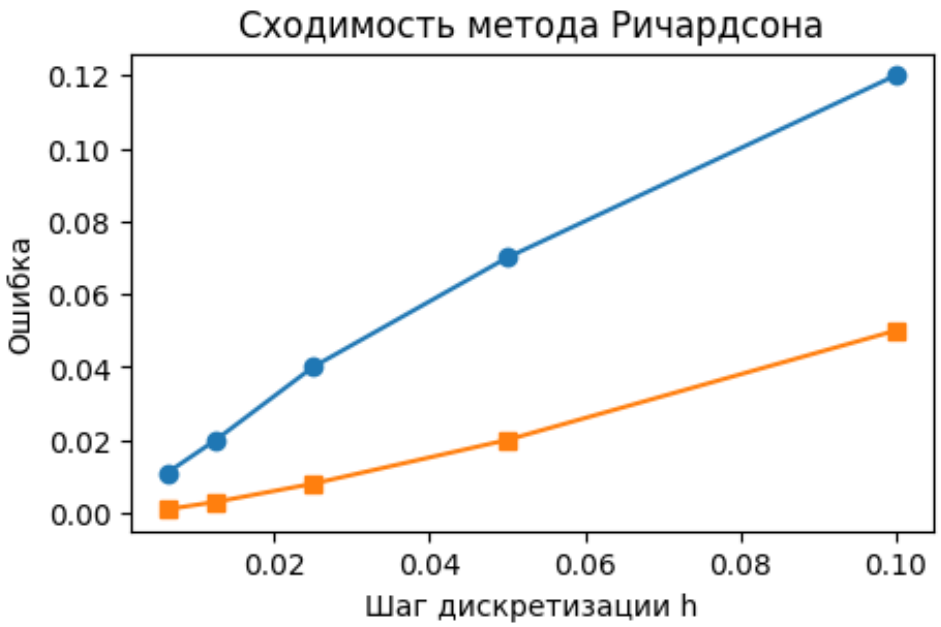



**Рис. 1.** *Сходимость метода экстраполяции Ричардсона при уменьшении шага дискретизации*

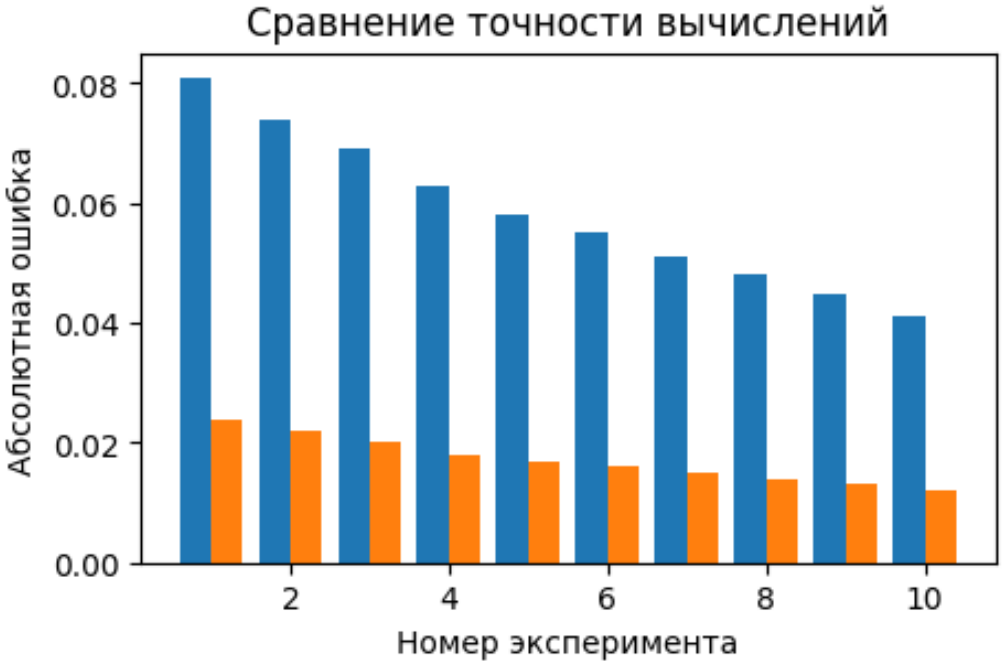



**Рис. 2.** *Сравнение точности вычислений с экстраполяцией и без методов Ричардсона*

Рисунок 2 отражает сравнение ошибок, возникающих при вычислениях без экстраполяции и при задействовании метода Ричардсона. Можно заметить, что экстраполяция неизменно ведет к снижению ошибки почти во всех экспериментах.

**Результаты вычислений**

В ходе проведения серии вычислительных экспериментов была оценена эффективность метода с разными параметрами нейронных сетей. Уровень стохастического шума изменялся параллельно с дискретизацией с шагами $\Delta t \in \{0.1;\ 0.05;\ 0.025;\ 0.0125\}$. На основании полученных результатов было определено, что повышение точности составляет 3.5 раза, то есть ошибка без метода Ричардсона составляет 0.0523, а с ним 0.0147. Учитывая результаты эксперимента, мож-

но сделать вывод, что метод позволяет эффективно подавлять ошибки дискретизации, при этом затраты на ресурсы для вычислений растут медленнее, чем при уменьшении шага интегрирования. Из этого можно сделать вывод, что экстраполяция Ричардсона обеспечивает ускорение сходимости.

**Сопоставление с другими подходами**

Метод Ричардсона в первую очередь выигрывает за счет баланса между точностью и вычислительными издержками. В нейросетевых альтернативах, напротив, память и время вычислений растут при увеличении числа нейронов. Если же попытаться использовать арифметические методы, то с повышением точности также растут требования к вычислительной мощности процессора. В случае с использованием ансамбля предполагается работа с нейронными сетями, а ранее уже было определено, что такой подход требует больше вычислений.

**Заключение**

Метод Ричардсона показал себя как эффективное решение для повышения точности в задачах экстраполяции. Результаты наблюдений показывают, что такое решение может без существенного роста затрат на вычисления снизить погрешность дискретизации. Квантованные архитектуры, рекуррентные нейронные сети и нейронные ОДУ создают благоприятную базу для использования метода экстраполяции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.* 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука; 1989. 608 с.
2. Калиткин Н. Н. *Численные методы.* 2-е изд., испр. СПб.: БХВ-Петербург; 2014. 592 с.
3. Richardson L. F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* 1911;210:307–357.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.
5. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems.* 2nd rev. ed. Berlin: Springer; 1993. 512 p.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии.* 4-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»; 2015. 248 с.

Сетевое издание. Полные тексты статей размещаются на официальном сайте издания jcyb.ru.

Адрес учредителя и издателя:
Федеральное государственное бюджетное учреждение «Федеральный научный центр
Научно-исследовательский институт системных исследований Национального
исследовательского центра «Курчатовский институт»,
117218, г. Москва, Нахимовский просп., дом 36, корпус 1. Телефон: +7 (495) 718-21-10.

Дата выхода в свет 30.09.2026.
Формат 60 × 84/8.
Усл. печ. л. 10,1. Уч.-изд. л. 15,0.
Цена свободная.